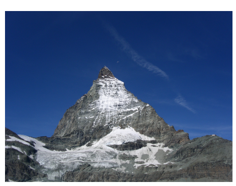
Kallenrode, 26.11.2008

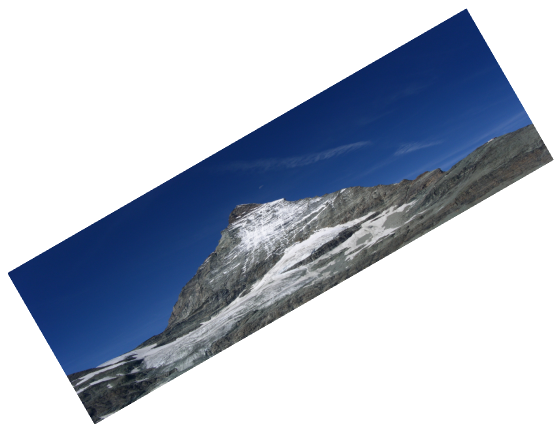
Übungsaufgaben ‘Mathematik für Physiker 2’, Blatt 5

ABGABE: 3.12.2008 16:00

Die Abschlussübung Lineare Algebra sammelt einige Konzepte/Formalismen zusammen – Bitte nur einen der beiden Aufgabenbereiche bearbeiten!

Für die graphischen Darstellungen können Sie MatLab oder octave verwenden, müssen es aber nicht. Wenn Sie ‘von Hand’ arbeiten, verwenden Sie einfach einzelne geeignete Punkte; wenn Sie mit MatLab arbeiten, geben Sie bitte das entsprechende Code-Fragment mit an.





Aufgabenbereich 1: Bergsteigen mit Knick in der Optik

Eine Besteigung des Matterhorns entlang des normalerweise verwendeten Hörnligrats (rechte Flanke in der normalen Abbildung) lässt sich vereinfachen, in dem man einfach das Matterhorn horizontal etwas streckt (dann ist der Grat nicht mehr so steil) und ihn anschließend waagerecht dreht. Oder als etwas ernsthaftere Anwendung: für die Objekterkennung ist es hilfreich, wenn ein Bild eine Standardausrichtung hat – das linke der beiden Bilder wäre das Muster. Ein Beobachter (Mensch oder Maschine) kann jedoch durch Neigung des Kopfes und Verzerrung aus irgendeinem Grund zur Wahrnehmung der rechten Szene gelangen. Ihre Aufgabe ist es, die Transformation zu erkennen und rückgängig zu machen.

1. Die Transformation setzt sich zusammen aus einer Streckung `S` des Bildes entlang der x-Achse um einen Faktor $2\sqrt{2}$ und einer anschließenden Drehung `D` um $\alpha = \pi/4$ (entspricht 45°, d.h. $\sin\alpha = \cos\alpha = 1/\sqrt{2}$). Stellen Sie die Transformationsmatrizen `S` und `D` auf (Drehrichtung beachten!). Bestimmen Sie die Matrix `T` für die kombinierte Transformation.

2. Ist es egal, in welcher Reihenfolge die beiden Transformationen `S` und `D` ausgeführt werden? Begründen Sie formal und anschaulich.

3. In welche Form wird ein Quadrat bei dieser Transformation überführt, in welche Form ein Kreis? Beschreiben Sie anschaulich (inkl. Skizze) und für eine der beiden Figuren formal!

4. Normalerweise (d.h. im Ausgangssystem) müssen die Bergsteiger von $\vec{A} = (4, 1)$ nach $\vec{B} = (2, 5)$ steigen. Berechnen Sie den dabei zurück gelegten Weg. Wie lang ist der Weg nach der Transformation?

5. Bleibt der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ erhalten? (Winkel berechnen!)

6. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von `S` und `T`. Begründen Sie die Ergebnisse auch anschaulich.

7. Bestimmen Sie die Eigenschaften der Transformationsmatrix (regulär, orthogonal, symmetrisch etc.). Welche Folgerungen ergeben sich daraus für die Einheitswerte und -vektoren und finden Sie die Folgerungen in Ihrer Rechnung bestätigt.

8. Nachdem wir uns die ganze Zeit mit der Verzerrung beschäftigt haben: Bestimmen Sie die Rücktransformation, d.h. den Übergang vom rechten zum linken Bild.

Bewertung:

Aufgabenteil	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte	10	5	8	5	3	9	3	5

Aufgabenbereich 2: Eine verzerrte Scheibenwelt

Die Welt ist flach, wir beschränken uns auf zwei Dimensionen (Scheibenwelt – Elephanten und Schildkröte vernachlässigen). Die Bewohner einer elastischen kreisförmigen Scheibe mit Radius $R =$ 1 Scheibenradius geraten mit ihrer Welt in Raumbereiche, in denen starke gravitative Effekte (z.B. Asteroiden in der Nähe) ihre Welt verformen derart, dass ein Punkt $\vec{r}$ auf einen Punkt $\vec{r}\,'$ überführt wird gemäß

$$\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \vec{r} = \mathtt{A}\vec{r}\,.$$

1. Stellen Sie die Scheibe im Zustand vor der Transformation mathematisch und zeichnerisch dar; ebenso im Zustand nach der Transformation. (Hinweis: es kann hilfreich sein, den Ortsvektor des Randes mit Hilfe von Polarkoordinaten darzustellen; dann lässt sich der Kreis einfach in Abhängigkeit vom Parameter φ beschreiben.)

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte und -vektoren der Transformationsmatrix. Erläutern Sie deren mathematische Bedeutung; zeichnen Sie deren Lage in die Graphik aus (a) ein.

3. Was für eine mathematische Figur wird der Rand der verformten Scheibe? Welche Bedeutung haben die Eigenvektoren in dieser Figur, welche die Eigenwerte?

4. Zwischen der Stadt $A = (1/3, -1/4)$ auf der Hauptinsel und der Stadt $B = (-1/9, 9/10)$ auf einer Insel im Randbereich besteht eine Flugverbindung. Im Nichtverformten System hat dieser Flug 1 Stunde gedauert – wie lange dauert er auf dem verformten Planeten (die Geschwindigkeit des Fliegers hat sich nicht verändert, nur die Geometrie, über die er fliegt).

5. Bestimmen Sie die Eigenschaften der Transformationsmatrix (regulär, orthogonal, symmetrisch etc.). Welche Folgerungen ergeben sich daraus für die Einheitswerte und -vektoren und finden Sie die Folgerungen in Ihrer Rechnung bestätigt.

6. Die Matrix $\mathtt{A}$ beschreibt eine elastische Transformation im 2D. Vergleichen Sie ihre Eigenschaften mit denen einer Drehung (was waren die Eigenschaften einer Drehung?).

7. Welche Form muss eine Linie mit Radius $r' = 1$ um den Ursprung auf der unverformten Welt gehabt haben? Wie können Sie diese mathematisch bestimmen?

8. Lässt sich diese (oder eine ähnliche) Transformation auch mit Hilfe einer orthogonalen Matrix darstellen? Das wäre zumindest für die Rücktransformation praktisch. Begründen Sie!

Bewertung:

Aufgabenteil	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte	10	9	5	5	5	3	10	3