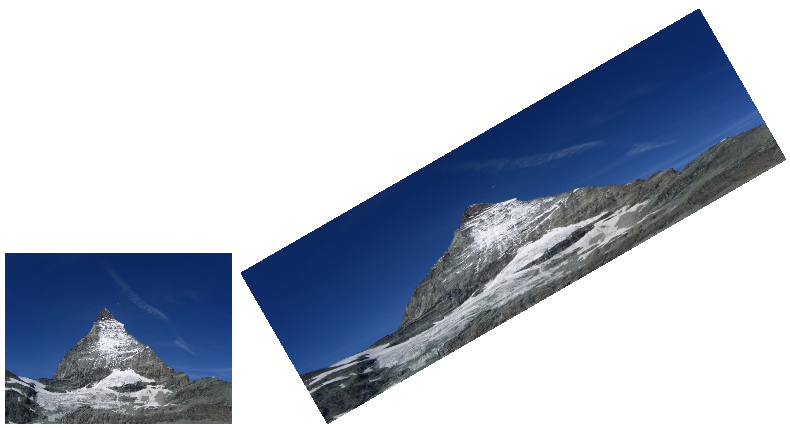
Kallenrode, 26.11.2008

Übungsaufgaben 'Mathematik für Physiker 2', Blatt 5

ABGABE: 3.12.2008 16:00

Die Abschlussübung Lineare Algebra sammelt einige Konzepte/Formalismen zusammen – Bitte nur einen der beiden Aufgabenbereiche bearbeiten!

Für die graphischen Darstellungen können Sie MatLab oder octave verwenden, müssen es aber nicht. Wenn Sie 'von Hand' arbeiten, verwenden Sie einfach einzelne geeignete Punkte; wenn Sie mit MatLab arbeiten, geben Sie bitte das entsprechende Code-Fragment mit an.



Aufgabenbereich 1: Bergsteigen einfach

Eine Besteigung des Matterhorns entlang des normalerweise verwendeten Hörnligrats (rechte Flanke in der normalen Abbildung) lässt sich vereinfachen, in dem man einfach das Matterhorn horizontal etwas streckt (dann ist der Grat nicht mehr so steil) und ihn anschließend waagerecht dreht. Oder als etwas ernsthaftere Anwendung: für die Objekterkennung ist es hilfreich, wenn ein Bild eine Standardausrichtung hat – das linke der beiden Bilder wäre das Muster. Ein Beobachter (Mensch oder Maschine) kann jedoch durch Neigung des Kopfes und Verzerrung aus irgendeinem Grund zur Wahrnehmung der rechten Szene gelangen. Ihre Aufgabe ist es, die Transformation zu erkennen und rückgängig zu machen.

1. Die Transformation setzt sich zusammen aus einer Streckung S des Bildes entlang der x-Achse um einen Faktor $2\sqrt{2}$ und einer anschließenden Drehung D um $\alpha = \pi/4$ (entspricht 45°, d.h. $\sin\alpha = \cos\alpha = 1/\sqrt{2}$). Stellen Sie die Transformationsmatrizen S und D auf (Drehrichtung beachten!). Bestimmen Sie die Matrix T für die kombinierte Transformation.
   Lösung: bei der Streckung entlang der x-Achse wird jeweils die x-Koordinate mit dem Streckungsfaktor, in diesem Fall $2\sqrt{2}$, multipliziert während die y-Komponente unverändert erhalten bleibt:
   $$\mathtt{S} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Da sich jeder Vektor als $\vec{r} = \sum x_i \vec{b}_i$ darstellen lässt, brauchen wir nur zu überprüfen, ob wir aus den Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems die richtigen Basisvektoren $\vec{b}_i$ des neuen Systems erhalten. Der Basisvektor in x-Richtung wird um den entsprechenden Betrag verlängert:

$$\vec{b}_x = \mathtt{S}\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2}\,\vec{e}_x$$

und der Basisvektor in y-Richtung entspricht dem alten Einheitsvektor in y-Richtung:

$$\vec{b}_y = \mathtt{S}\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_y \ .$$

Für die Drehung gilt (vergleiche auch Vorlesung)

$$\mathtt{D} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \ .$$

Zur Richtung: bei der Drehung soll die neue x-Achse, beschrieben durch den Basisvektor $\vec{b}_1$ auf die Winkelhalbierende des ersten Quadranten (aus Sicht des ursprünglichen Koordinatensystems) abgebildet werden:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Auf diese Weise haben wir also einen Vektor im Ausgangskoordinatensystem um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn gedreht.
Betrachten wir einen beliebigen Vektor $\vec{r}$. Dieser wird zuerst gestreckt, $\vec{r}' = \mathtt{S}\vec{r}$ und anschließend gedreht

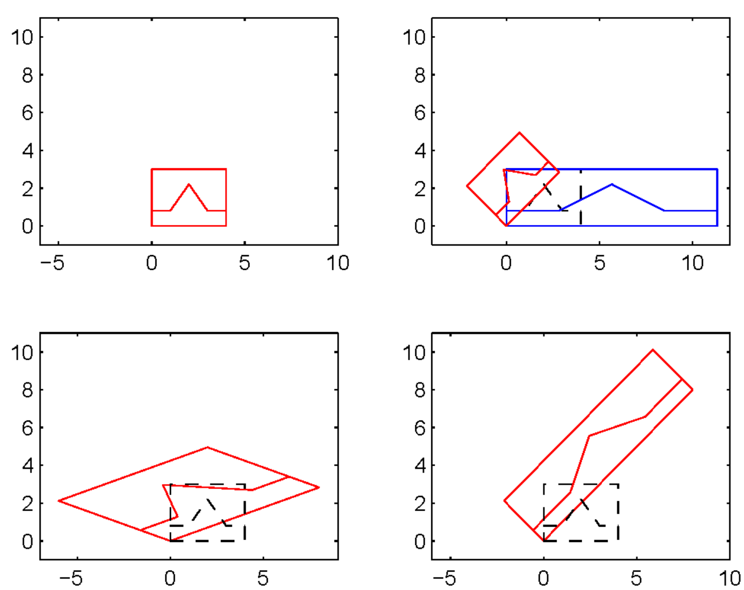
$$\vec{r}'' = \mathtt{D}\vec{r}' = \mathtt{D}(\mathtt{S}\vec{r}) \ .$$

Die Matrixmultiplikation ist assoziativ:

$$\mathtt{D}(\mathtt{S}\vec{r}) = \mathtt{DS}\vec{r} = (\mathtt{DS})\vec{r})\mathtt{T}\vec{r}$$

mit $\mathtt{T} = \mathtt{DS}$. Erst die Streckung dann die Drehung liefert als Transformationsmatrix

$$\mathtt{T} = \mathtt{DS} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1/\sqrt{2} \\ 2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \ ;$$



Anmerkung: Sie trauen Ihrer Lösung nicht? Gut, dann nähern wir in der linken Abbildung das Matterhorn durch ein Dreieck auf einer horizontalen Linie an. Damit erhalten wir für die Punkte des Horizonts und des Matterhorns die folgenden Vektoren:

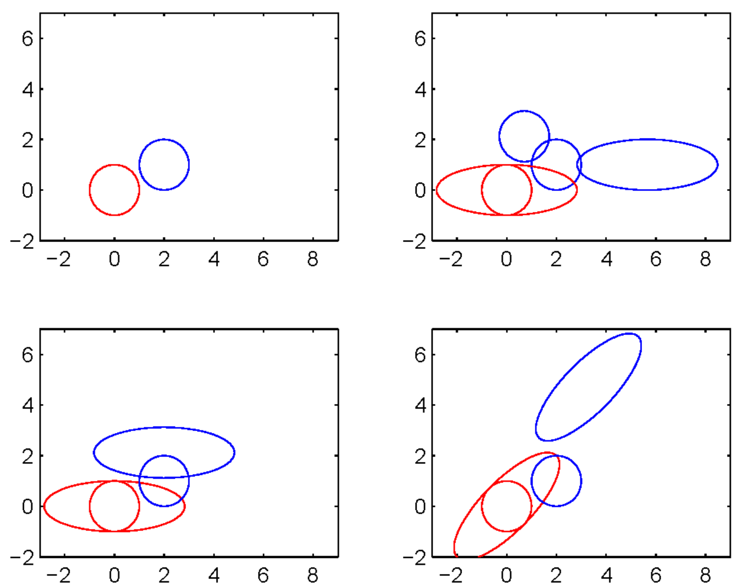
$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0.8 \end{pmatrix} ;$$

die entsprechende Form ist im linken oberen Teilbild gegeben. Im rechten oberen Teilbild ist das Ausgangsbild einmal gestreckt (blau) und ein mal rotiert (rot), d.h. es ist jeweils gebildet $\mathtt{S}\vec{r}_i$ (blau) bzw. $\mathtt{D}\vec{r}_i$. In der unteren Zeile ist links erst gedreht und dann gestreckt, rechts dagegen erst gestreckt und dann gedreht worden. Das entsprechende MatLab-Script (`matterhornframe`) findet sich auch in stud.ip

2. Ist es egal, in welcher Reihenfolge die beiden Transformationen $\mathtt{S}$ und $\mathtt{D}$ ausgeführt werden? Begründen Sie formal und anschaulich.
   Lösung: formal: Matrixmultiplikation ist zwar assoziativ, aber nicht kommutativ. Die Gültigkeit des Assoziativgesetzes erlaubt es, statt der Ausführung erst der Streckung und dann der Drehung die beiden in einer Transformation $\mathtt{T} = \mathtt{D}\,\mathtt{S}$ zusammenzufassen. Die Nicht-Gültigkeit des Kommutativegesetzes lässt sich auch für dieses spezielle Paar von Matrizen zeigen:

$$\mathtt{T}_2 = \mathtt{SD} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq \mathtt{T} .$$

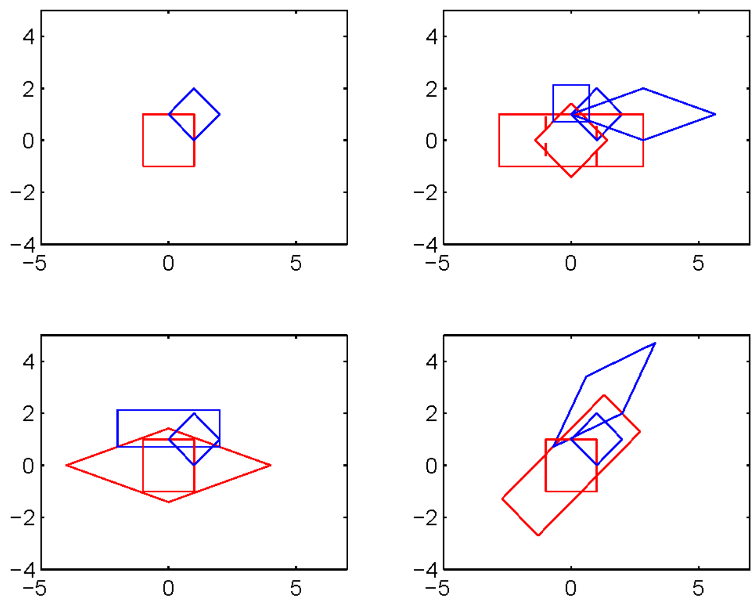
   Anschaulich: die Streckung erfolgt entlang der x-Achse des Ausgangskoordinatensystems. Betrachten wir eine Fläche, bei der eine der Figurenachsen (z.B. eine Seite) entlang der x-Achse orientiert ist. Dann wird diese Fläche erst entlang dieser Figurenachse gestreckt und dann gedreht. Beim Vertauschen wird die Fläche erst gedreht. Dann ist die Figurenachse nicht mehr parallel der x-Achse. Da die Streckung aber weiterhin entlang der x-Achse erfolgt, erfolgt sie nicht entlang der Figurenachse und führt zu einer Verzerrung.



3. In welche Form wird ein Quadrat bei dieser Transformation überführt, in welche Form ein Kreis? Beschreiben Sie anschaulich (inkl. Skizze) und für eine der beiden Figuren formal!
   Lösung: die Streckung eines Kreises führt stets auf eine Ellipse mit der großen Halbachse parallel zur x-Achse. Das gilt für Kreise um den Ursprung ebenso wie für Kreise um einen beliebigen Punkt (a, b). Anschließend wird der Ortsvektor des Mittelpunktes und mit ihm die Ellipse um den Winkel α gedreht:

$$\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} 2 & -1/\sqrt{2} \\ 2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + r\cos\varphi \\ b + r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a + r\cos\varphi) - (b + r\sin\varphi)/\sqrt{2} \\ 2(a + r\cos\varphi) + (b + r\sin\varphi)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \forall\varphi \in [0, 2\pi] .$$

Das Ergebnis ist in der Abbildung oben gegeben (Struktur wie Abbildung oben, Datei in stud.ip, `formtransformation.m`) Oben links ein um den Ursprung zentrierter Kreis (rot) sowie ein um $\vec{r} = (2,1)$ zentrierter Kreis (blau). Rechts oben die einzelnen Transformationen angewendet auf beide Kreise. Die Rotation verändert den im den Ursprung zentrierten Kreis nicht, der andere Kreis dagegen wird in eine andere Position gedreht (der Vektor zum Kreismittelpunkt wird gedreht und der Kreis mitgeführt). Die Streckung erfolgt beim im Mittelpunkt zentrierten Kreis symmetrisch um den Ursprung (und damit um den Ausgangskreis), beim anderen Kreis wird auch der Ortsvektor des Mittelpunkts gestreckt, d.h. der Ausgangskreis liegt nicht mehr in der Mitte des gestreckten. Links unten die Transformationen in falscher Reihenfolge: erst wird gedreht und dann gestreckt. Bei dem im Ursprung zentrierten Kreis (rot) ist die Drehung bedeutungslos, er wird nur gestreckt. Der Mittelpunkt des blauen Kreises dagegen wird erst zusammen mit dem Kreis gedreht und dann parallel zur x-Achse gestreckt. Daher ist bei beiden die große Halbachse parallel zur x-Achse ausgerichtet. Rechts unten erfolgt die Transformation in der korrekten Reihenfolge: die Kreise werden erst zu Ellipsen gestreckt und anschließend gedreht. Für zwei Quadrate folgt die entsprechende Abbildung:



4. Normalerweise (d.h. im Ausgangssystem) müssen die Bergsteiger von $\vec{A} = (4,1)$ nach $\vec{B} = (2,5)$ steigen. Berechnen Sie den dabei zurück gelegten Weg. Wie lang ist der Weg nach der Transformation?
Lösung: vor der Transformation ist

$$s = |\vec{B} - \vec{A}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}\,.$$

Transformation der beiden Orte liefert

$$\vec{A}' = \begin{pmatrix} 2 & -1/\sqrt{2} \\ 2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 1/\sqrt{2} \\ 8 + 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{B}' = \begin{pmatrix} 2 & -1/\sqrt{2} \\ 2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 5/\sqrt{2} \\ 4 + 5/\sqrt{2} \end{pmatrix}\,.$$

und damit für den Abstand

$$\begin{aligned} s' &= |\vec{B}' - \vec{A}'| = \left| \begin{pmatrix} 4 - 5/\sqrt{2} \\ 4 + 5/\sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 - 1/\sqrt{2} \\ 8 + 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4(1 + 1/\sqrt{2}) \\ -4(1 - 1/\sqrt{2}) \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{16[(1 + 1/\sqrt{2})^2 + (1 - 1/\sqrt{2})^2]} = \sqrt{16[1 + 1/2 + 1 + 1/2]} = \sqrt{48} \neq s\,. \end{aligned}$$

Der Abstand bleibt nicht erhalten (ist auch nicht zu erwarten, da die Transformationsmatrix nicht orthogonal ist).

5. Bleibt der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ erhalten? (Winkel berechnen!)
Lösung: anschaulich sicherlich nicht, da z.B. ein auf der Spitze stehendes Quadrat durch die Streckung in einen Rhombus überführt wird. Winkel zwischen den Vektoren aus dem Skalarprodukt

$$\angle \vec{A}, \vec{B} = \arccos\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|}\right) = \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{29\cdot 17}}\right) \approx 54^\circ \ .$$

und nach der Transformation

$$\angle \vec{A}', \vec{B}' = \arccos\left(\frac{\vec{A}'\cdot\vec{B}'}{|\vec{A}'|\,|\vec{B}'|}\right) = \arccos\left(\frac{69}{\sqrt{129\cdot 57}}\right) \approx 36^\circ \neq \angle \vec{A}, \vec{B} \ .$$

6. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathtt{S}$ und $\mathtt{T}$. Begründen Sie die Ergebnisse auch anschaulich.
Lösung: für $\mathtt{S}$ ergeben sich die Eigenwerte aus $|\mathtt{S} - \lambda\mathtt{E}| = 0$ zu

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} 2\sqrt{2}-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2\sqrt{2}-\lambda)(1-\lambda) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 2\sqrt{2} \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix} \ .$$

Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich aus $(\mathtt{S} - \lambda\mathtt{E})\vec{x} = 0$. Für λ_1 ist

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-2\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 0x_1 + 0x_2 = 0 \\ 0x_1 + (1-2\sqrt{2})x_2 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 \text{ beliebig} \\ x_2 = 0 \end{matrix} \quad \text{z.B.} \quad \vec{x}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_x \ .$$

Ein Vektor entlang der x-Achse wird auf sich selbst abgebildet, allerdings um den Eigenwert λ_1 gestreckt. Der Eigenvektor zu λ_2 ist

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} (2\sqrt{2}-1)x_1 + 0x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2\text{bel.} \end{matrix} \quad \text{z.B.} \quad \vec{x}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_y \ .$$

Ein Vektor entlang der y-Achse wird ebenfalls auf sich selbst abgebildet; da der zugehörige Eigenwert 1 ist, wird er weder gestreckt noch gestaucht.
Für die Eigenwerte von $\mathtt{T}$ gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1/\sqrt{2} \\ 2 & 1/\sqrt{2}-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1/\sqrt{2}-\lambda)+2/\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}-2\lambda+\lambda/\sqrt{2}+\lambda^2+2/\sqrt{2} = \lambda^2+(1/\sqrt{2}-1)\lambda+2\sqrt{2} \ .$$

Quadratische Ergänzung oder pq-Formel liefern

$$\lambda_{1,2} = \frac{1-1/\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-1/\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\sqrt{2}} = \frac{1-1/\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}-1/2-8\sqrt{2}}{4}} \ .$$

Da der Radikant kleiner Null ist, ergeben sich komplexe Eigenwerte – und damit keine reellen Eigenvektoren. Das ist auch anschaulich, da bei der Drehung im 2D keine Richtung auf sich selbst abgebildet wird.

7. Bestimmen Sie die Eigenschaften der Transformationsmatrix (regulär, orthogonal, symmetrisch etc.). Welche Folgerungen ergeben sich daraus für die Einheitswerte und -vektoren und finden Sie die Folgerungen in Ihrer Rechnung bestätigt.
Lösung: die Transformationsmatrix ist nicht symmetrisch, d.h. wir haben keinen Grund, einfache Beziehungen zwischen den Eigenwerten zu erwarten. Die Determinante der Matrix ist

$$|\mathtt{T}| = \begin{vmatrix} 2 & -1/\sqrt{2} \\ 2 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = 4 + \frac{1}{2}$$

und damit ungleich Null (die Matrix ist regulär) und ungleich ± 1 (die Matrix ist nicht orthogonal).

8. Nachdem wir uns die ganze Zeit mit der Verzerrung beschäftigt haben: Bestimmen Sie die Rücktransformation, d.h. den Übergang vom rechten zum linken Bild.
   Lösung: da die Matrix regulär ist, gibt es eine Inverse. Das Verfahren zu ihrer Bestimmung ist egal; als Ergebnis ergibt sich

$$\mathtt{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

   Falls die Transformationen in der falschen Reihenfolge ausgeführt wurden, ergibt sich für die Inverse

$$\mathtt{T}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/\sqrt{2} \\ -1/4 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Bewertung:

Aufgabenteil	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte	10	5	8	5	3	9	3	5

Aufgabenbereich 2: Eine verzerrte Scheibenwelt

Die Welt ist flach, wir beschränken uns auf zwei Dimensionen (Scheibenwelt – Elephanten und Schildkröte bitte vernachlässigen). Die Bewohner einer elastischen kreisförmigen Scheibe mit Radius $R = 1$ Scheibenradius geraten mit ihrer Welt in Raumbereiche, in denen starke gravitative Effekte (z.B. Asteroiden in der Nähe) ihre Welt verformen derart, dass ein Punkt $\vec{r}$ auf einen Punkt $\vec{r}\,'$ überführt wird gemäß

$$\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \vec{r} = \mathtt{A}\vec{r} .$$

1. Stellen Sie die Scheibe im Zustand vor der Transformation mathematisch und zeichnerisch dar; ebenso im Zustand nach der Transformation. (Hinweis: es kann hilfreich sein, den Ortsvektor des Randes mit Hilfe von Polarkoordinaten darzustellen; dann lässt sich der Kreis einfach in Abhängigkeit vom Parameter φ beschreiben.)
   Lösung: vor der Transformation Kreis, d.h. kartesisch als $x^2 + y^2 = 1$ mit $x, y \in [-1, 1]$ oder in Polarkoordinaten als $r = 1$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ bzw. vektoriell

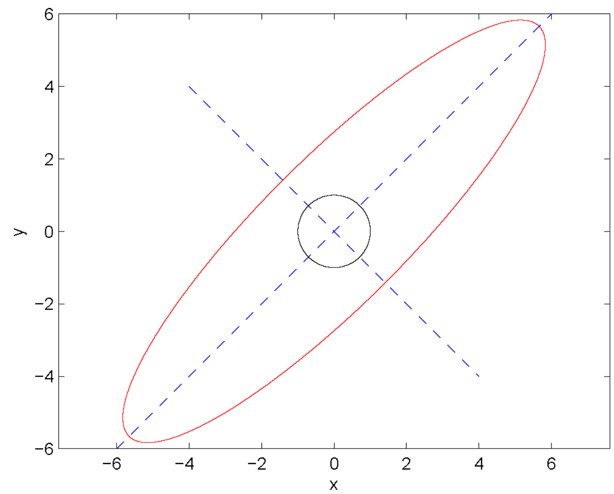
$$|\vec{r}| = \left| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right| = 1 \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi .$$

   Die Transformation des Kreises liefert mit Polarkoordinaten als Eingangsgrößen

$$\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos\varphi + 3\sin\varphi \\ 3\cos\varphi + 5\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \qquad (1)$$

bzw. mit kartesischen Koordinaten (dann müssen positive und negative Wurzel berücksichtigt werden!)

$$\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{r^2 - x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 3\sqrt{r^2 - x^2} \\ 3x + 5\sqrt{r^2 - x^2} \end{pmatrix} \qquad -1 \le x \le 1\,. \tag{2}$$



2. Bestimmen Sie die Eigenwerte und -vektoren der Transformationsmatrix. Erläutern Sie deren mathematische Bedeutung; zeichnen Sie deren Lage in die Graphik aus (a) ein.

   Lösung: Eigenwerte aus $|\mathtt{A} - \lambda\mathtt{E}| \stackrel{!}{=} 0$ bestimmen:

   $$0 \stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9 = 16 - 10\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 8)(\lambda - 2)$$

   und damit $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = 2$. Test: Spur der Matrix ist $5+5 = 10$, das entspricht der Summe der Eigenwerte; Determinante der Matrix ist $25 - 9 = 16$, das entspricht dem Produkt der Eigenwerte.

   Eigenvektoren gemäß $(\mathtt{A} - \lambda\mathtt{E})\vec{x} \stackrel{!}{=} 0$. Für $\lambda_1 = 8$ ergibt sich

   $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 5-8 & 3 \\ 3 & 5-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \vec{x}_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

   Für $\lambda_2 = 2$ ergibt sich

   $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 5-2 & 3 \\ 3 & 5-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 \quad \vec{x}_{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

   Die Richtungen der Eigenvektoren sind in der Abbildung als gestrichelte blaue Linien gegeben; sie weisen entlang der Winkelhalbierenden der einzelnen Quadranten. Diese Richtungen bleiben bei der Abbildung erhalten, allerdings skaliert um die jeweiligen Eigenwerte. Da beide Eigenwerte positiv und größer 1 sind, wird der Kreis bei der Transformation gestreckt: in Richtung des Eigenvektors $\vec{x}_{\lambda_1}$ um den Eigenwert $\lambda_1 = 8$, in Richtung des Eigenvektors $\vec{x}_{\lambda_2}$ um den Eigenwert $\lambda_2 = 2$. Alle Vektoren in andere Richtungen φ ändern bei der Abbildung sowohl die Richtung als den Betrag; der formale Zusammenhang ist durch (1) gegeben. Als Beispiel ergeben sich für die folgenden Richtungen (jeweils mit $r = 1$)

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r'_x	5.0000	5.6569	3.0000	-1.4142	-5.0000	-5.6569	-3.0000	1.4142	5.0000
r'_y	3.0000	5.6569	5.0000	1.4142	-3.0000	-5.6569	-5.0000	-1.4142	3.0000

3. Was für eine mathematische Figur wird der Rand der verformten Scheibe? Welche Bedeutung haben die Eigenvektoren in dieser Figur, welche die Eigenwerte?

Lösung: der Kreis wird zu einer Ellipse verformt, die Eigenvektoren geben die große und die kleine Halbachse der Ellipse an, die zugehörigen Eigenwerte deren jeweilige Längen im ursprünglichen Koordinatensystem.
Zur Darstellung der Ellipse: wir können ein neues Koordinatensystem wählen mit den Eigenvektoren als Basisvektoren. Die z_1-Achse liegt dabei entlang der großen Halbachse, d.h. $\vec{e}_{z_1} = \vec{x}_{\lambda_1}$, die z_2-Achse entlang der kleinen Halbachse, d.h. $\vec{e}_{z_2} = \vec{x}_{\lambda_2}$. In diesem Koordinatensystem gilt für die Ellipse in Parameterdarstellung

$$z_1 = \lambda_1 \cos\varphi \quad \text{und} \quad z_2 = \lambda_2 \sin\varphi \; .$$

Die Gleichung lässt sich wegen $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ umformen zu

$$\frac{z_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{z_2^2}{\lambda_2^2} = 1 \; .$$

Diese Darstellung der Ellipse erinnert an die eines Kreises – lediglich ist der Radius r nicht in alle Richtungen gleich sondern entlang der großen Halbachse maximal und entlang der kleinen Halbachse minimal.

4. Zwischen der Stadt $A = (1/3, -1/4)$ auf der Hauptinsel und der Stadt $B = (-1/9, 9/10)$ auf einer Insel im Randbereich besteht eine Flugverbindung. Im Nichtverformten System hat dieser Flug 1 Stunde gedauert – wie lange dauert er auf dem verformten Planeten (die Geschwindigkeit des Fliegers hat sich nicht verändert, nur die Geometrie, über die er fliegt).
Lösung: im nicht-verformten System beträgt der Abstand d zwischen A und B

$$d = |\vec{r}_A - \vec{r}_B| = \left| \begin{pmatrix} 1/3 + 1/9 \\ -1/4 - 9/10 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} 4/9 \\ -23/20 \end{matrix} \right| = \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{23^2}{400}} = \sqrt{\frac{49249}{32400}} \approx 1.233$$

Im verformten System ergeben sich für die beiden Orte die Ortsvektoren durch Transformation zu

$$\vec{r}\,'_A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/12 \\ -1/4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}\,'_B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/9 \\ 9/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 193/90 \\ 25/6 \end{pmatrix} \; .$$

Damit ergibt sich für den Abstand

$$\begin{aligned} d' &= |\vec{r}\,'_A - \vec{r}\,'_B| = \left| \begin{pmatrix} 11/12 - 193/90 \\ -1/4 - 25/6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -221/180 \\ -53/12 \end{pmatrix} \right| = \left| \sqrt{\frac{221^2}{180^2} + \frac{53^2}{12^2}} \right| \\ &= \left| \sqrt{\frac{340433}{16200}} \right| = 4.58 \; . \end{aligned}$$

Da sich die Geschwindigkeit des Fliegers nicht verändert, verhalten sich die Flugzeiten im verformten und unverformten System genauso wie die Strecken:

$$v = \frac{s_1}{t_1} = \frac{s_0}{t_0} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{s_1}{s_0} t_0 = 3.72 \text{ h} \; .$$

5. Bestimmen Sie die Eigenschaften der Transformationsmatrix (regulär, orthogonal, symmetrisch etc.). Welche Folgerungen ergeben sich daraus für die Einheitswerte und -vektoren und finden Sie die Folgerungen in Ihrer Rechnung bestätigt.
Lösung: die Matrix ist symmetrisch, reell, d.h. die Eigenwerte sollten reell sein. Das ist mit $\lambda_1 = 8$ und $\lambda_2 = 2$ der Fall. Außerdem sollten die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sein: das ist wegen $\vec{x}_{\lambda_1} \cdot \vec{x}_{\lambda_2} = 0$ der Fall. Damit bilden die beiden Eigenvektoren automatisch eine Basis orthonormierter Vektoren. Die Transformatiosmatrix ist jedoch nicht orthogonal, da

$$\mathtt{AA}' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix} \neq \mathtt{E} \, .$$

Das hätte man auch einfacher sehen können: die Determinante einer orthogonalen Matrix ist ± 1, jedoch ist $\det(\mathtt{A}) = 5^2 - 3^2 = 16 \neq 1$.

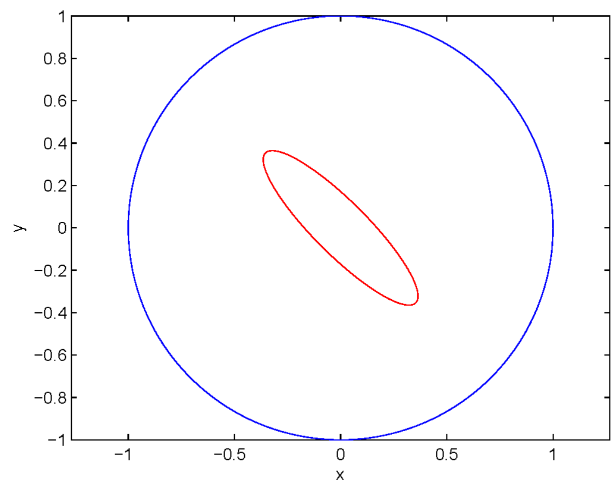
6. Die Matrix $\mathtt{A}$ beschreibt eine elastische Transformation im 2D. Vergleichen Sie ihre Eigenschaften mit denen einer Drehung (was waren die Eigenschaften einer Drehung?).
Lösung: die Drehmatrix ist ebenso wie die hier betrachtete Transformationsmatrix eine reelle symmetrische Matrix; im Gegensatz zur hier betrachteten Matrix ist die Drehmatrix jedoch auch orthogonal. Die Orthogonalität hat u.a. zur Folge, dass Abstände bei der Transformation erhalten bleiben (vgl. Aufgabe 7 von Zettel 3); das ist bei der elastischen Abbildung sicherlich nicht der Fall, da die Welt durch diese Transformation gestreckt wird.

7. Welche Form muss eine Linie mit Radius $r' = 1$ um den Ursprung auf der unverformten Welt gehabt haben? Wie können Sie diese mathematisch bestimmen?
Lösung: die Transformation aus der verformten Welt in die Ausgangwelt erfolgt mit Hilfe der zu $\mathtt{A}$ inversen Transformationsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} 5a_1 + 3a_3 & = & 1 \\ 3a_1 + 5a_3 & = & 0 \\ 5a_2 + 3a_4 & = & 0 \\ 3a_2 + 5a_4 & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathtt{A}^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} .$$

Der Kreis in der verformten Welt ist $r' = 1$ und $\varphi' \in [0, 2\pi]$, d.h. die rücktransformierte Kurve ist

$$\vec{r} = \mathtt{A}^{-1}\vec{r}' = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi' \\ \sin\varphi' \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5\cos\varphi' - 3\sin\varphi' \\ -3\cos\varphi' + 5\sin\varphi' \end{pmatrix} .$$



Als Ergebnis erhalten wir eine Ellipse, mit großer und kleiner Halbachse entlang den Winkelhalbierenden; allerdings ist bei der Rücktransformation die kleine Halbachse im ersten Quadranten während es bei der Hintransformation die große Halbachse war. Diese Achsen bilden die Eigenvektoren von $\mathtt{A}^{-1}$, die Eigenwerte sind in beiden Fällen kleiner Eins (jeweils $1/\lambda_1$ für die Winkelhalbierende im ersten Quadranten und $1/\lambda_2$ für den anderen Eigenvektor). Wie bei der Hintransformation ergibt sich für fie Ellipse in Parameterform

$$x = \frac{1}{\lambda_1}\cos\varphi' \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{\lambda_2}\sin\varphi'$$

mit der x-Achse entlang der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten. Die Gleichung lässt sich umformen zu

$$\lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 y^2 = 1 .$$

8. Lässt sich diese (oder eine ähnliche) Transformation auch mit Hilfe einer orthogonalen Matrix darstellen? Das wäre zumindest für die Rücktransformation praktisch. Begründen Sie!
Lösung: leider nicht; zwar könnten wir als Basisvektoren die beiden senkrecht aufeinander stehenden Eigenvektoren verwenden. Diese sind jedoch nicht normiert. Und genau das ist das Problem: die Streckung bewirkt, dass Abstände und Längen nicht erhalten bleiben. Letzteres ist aber bei der Transformation mit Hilfe einer orthogonalen Matrix immer der Fall.

Bewertung:

Aufgabenteil	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte	10	9	5	5	5	3	10	3