

## Übungsaufgaben Folgen und Reihen

1. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz (geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an):

|                                   |  |   |
|-----------------------------------|--|---|
| inverse Fakultäten:               | $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \dots$   | $a_n = \frac{1}{n!} \quad n \in \mathbb{N}$                   |
| echte Brüche:                     | $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$                                    | $a_n = \frac{n}{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$                  |
| inverse Quadrate:                 | $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$   | $a_n = \frac{1}{n^2} \quad n \in \mathbb{N}$                  |
| alternierender harmonische Folge: | $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$  | $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad n \in \mathbb{N}$           |
| Exponentialfolge:                 | $2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \dots$ | $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad n \in \mathbb{N}$ |

2. Verwenden Sie die Newton-Raphson Methode, um die Nullstellen der folgenden Funktionen zu suchen:

$$f(x) = (x - 5)^3, \quad g(x) = x^2 - 3, \quad h(x) = x^2 + 3.$$

Beginnen Sie jeweils mit den Startwerten  $x_s = 0$  und  $x_s = 6$ . Wie hängt das Ergebnis vom Startwert ab? Unter welchen Bedingungen darf das Ergebnis vom Startwert abhängen, unter welchen nicht?

3. Machen Sie eine Taylor-Entwicklung der folgenden Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$$

um  $x_0 = 0$  für  $f(x)$  und um  $x_0 = 1$  für  $g(x)$  und  $h(x)$ .

4. Bestimmen Sie die folgenden Größen mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung:  $f(x) = \sqrt{1-x}$  für  $x = 0.05$ , und  $h(x) = \tan(x)$  für  $x = 0.15$  (entspricht  $8.6^\circ$ ).
5. Bestimmen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 5}{2x^3 - 18x^2 + 30x - 14}.$$

Überprüfen Sie Ihre Lösungen mit Hilfe von MATLAB. (Hinweis: l'Hopital kann mehrfach angewendet werden!)

6. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{1 - \cos x}$$

in dem Sie Zähler und Nenner in eine Potenzreihe entwickeln und nur den führenden Term der Reihe verwenden. Liefert l'Hospital das gleiche Ergebnis? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis wieder mit Hilfe von MATLAB.