Kallenrode, www.sotere.uos.de

Übungsaufgaben Funktionen

1. Eine *Epizykloide* ist die Kurve, die von einem Perepheriepunkt eines Kreises mit Radius a beschrieben wird, wenn dieser auf der Außenseite eines anderen Kreises mit Radius A abrollt. In Parameterform ist die Epizykloide als

$$\begin{aligned} x &= (A+a)\cos\varphi - a\cos[(A+a)\varphi/a] \\ y &= (A+a)\sin\varphi - a\sin[(A+a)\varphi/a] \; . \end{aligned}$$

   Skizzieren Sie die Funktion (mit oder ohne MatLab). Lässt sich die Funktion in explizite Darstellung überführen?

2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen stetig differenzierbar (oder zumindest differenzierbar) sind in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x\,e^x\,\sin(x)\,, \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1}\,, \quad h(x) = |x| - x\,, \quad k(x) = x^{2/3}\,, \quad l(x) = e^{-\sqrt{x^2+a^2}}\;.$$

   Lösung: Stetigkeit und Differenzierbarkeit zusammengesetzter Funktionen

   Lösung: Produkte, Summen und stetige Funktionen stetiger Funktionen sind wieder stetige Funktionen. Alle Faktoren in $f(x)$ sind stetig, so dass $f(x)$ ebenfalls stetig ist. Außerdem hat $f(x)$ keine Kanten oder Knicke, so dass $f(x)$ auch differenzierbar ist mit $f'(x) = e^x(x\,\cos(x) + x\,\sin(x) + \sin(x))$. Auch $f'(x)$ setzt sich nur aus stetigen Funktionen zusammen, ist also selbst stetig. Daher ist $f(x)$ auch stetig differenzierbar.
   Für $g(x)$ gilt Stetigkeit mit der oben gegebenen Argumentation. Probleme mit einer etwaigen Definitionslücke oder Polstelle gibt es im Reellen nicht, ebenso keine Knicke, d.h. $g(x)$ ist auch differenzierbar. Für die Ableitung gilt $g'(x) = -2x/(x^2+1)^2$. Auch diese Funktion ist stetig, da sie sich aus stetigen Funktionen zusammen setzt. Damit ist auch $g(x)$ stetig differenzierbar.
   Die Funktion $h(x)$ erfordert eine Fallunterscheidung. Daher lässt sie sich etwas geschickter darstellen als

$$h(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases} \; .$$

   Die Funktion ist stetig in $\mathbb{R}$ für alle Punkte außer Null sind die einzelnen Funktionen stetig und für $x \to 0$ sind rechter und linger Grenzwert jeweils gleich dem Funktionswert $f(0) = 0$. Die Funktion ist differenzierbar in allen Punkten außer $x = 0$:

$$h'(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases} \; .$$

   Rechts- und linksseitiger Grenzwert der Ableitung sind für $x \to 0$ nicht identisch, d.h. die Funktion ist in diesem Punkt nicht differenzierbar. Die Ableitung ist jedoch stetig, so dass $h(x)$ stetig differenzierbar ist in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
   $k(x)$ ist stetig in $\mathbb{R}$. $k(x)$ ist auch differenzierbar mit der Ableitung $k'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, allerdings nicht differenzierbar in $x = 0$, da links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten unterschiedliches Vorzeichen haben (und für $x = 0$ nicht einmal endlich sind). Die Ableitung ist jedoch stetig, so dass auch $k(x)$ stetig differenzierbar ist in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
   $l(x)$ ist eine stetige Funktion einer stetigen Funktion und damit wieder stetig. Die Ableitung ist

$$l'(x) = -\frac{x e^{-\sqrt{x^2+a^2}}}{\sqrt{x^2+a^2}}\;.$$

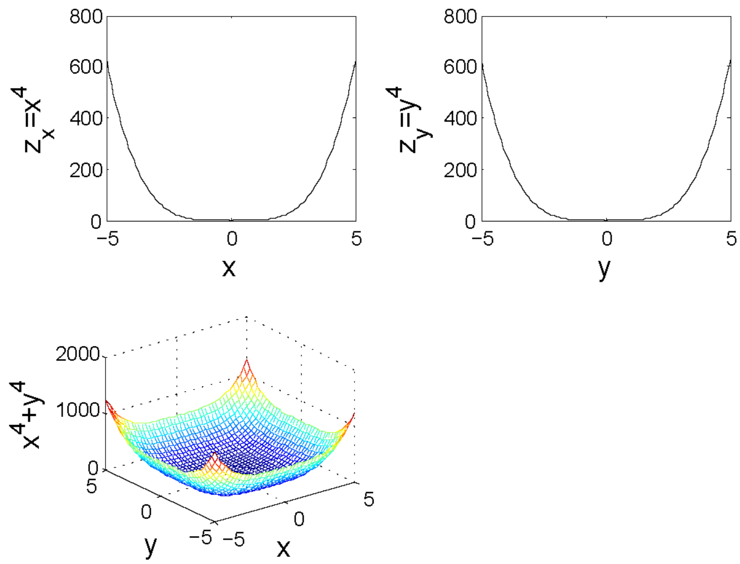
   Zumindest für $a \neq 0$ ist die Ableitung überall definiert und, da sie wieder nur aus stetigen Funktionen besteht, stetig, so dass $l(x)$ stetig differenzierbar ist.

3. Skizzieren Sie die folgenden Funktionen:

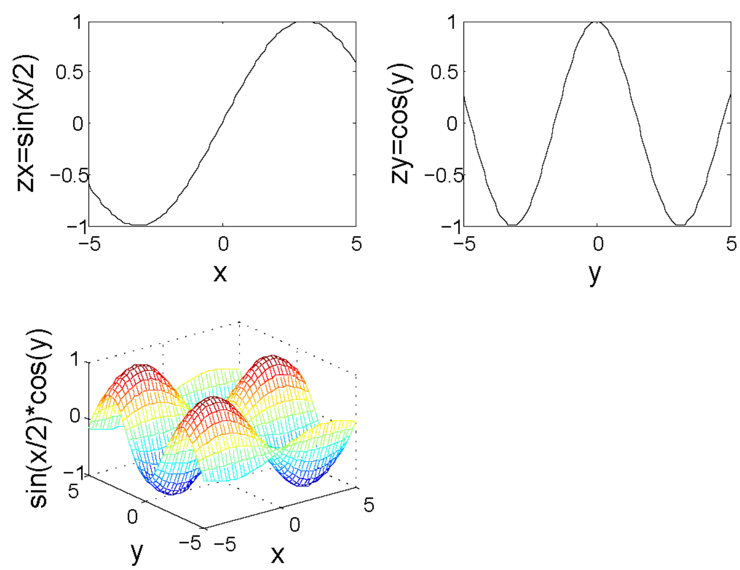
$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^4 \ , \\ g(x,y) &= \sin(x/2)\cos(y) \ , \\ h(x,y) &= (x/5)^3 y \\ i(x,y) &= \mathrm{e}^{-x/5}\sin(y/2)\cos(x) \ . \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich erst selbst, wie die Kurven aussehen sollen, verwenden Sie anschließend MatLab für eine genauere Darstellung.

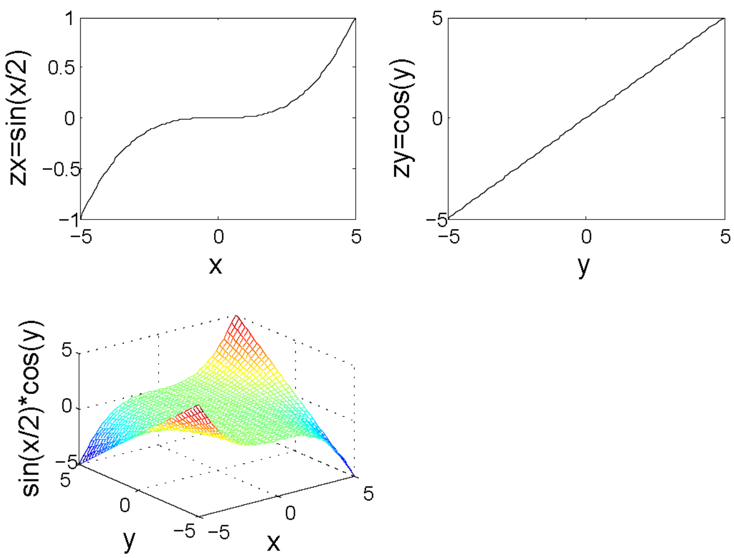
Lösung: die erste Funktion $f(x,y)$ besteht aus einer Summe von Termen, die jeweils nur von einer der Variablen abhängig sind. Daher ist es relativ einfach, sich die 3D-Darstellung als die Überlagerung der beiden Schnitte in der zx- und der zy-Ebene zu veranschaulichen. Für diese ergibt sich



Bei der zweiten Funktion können wir zwar auch wieder die Schnitte bilden, müssen jedoch beachten, dass diese nicht addiert sondern multipliziert werden. Als Funktionsplots erhalten wir



Die dritte Funktion erfordert höchstens beim Vorzeichen etwas Aufmerksamkeit:



Die vierte Funktion beinhaltet einen bereits aus $g(x, y)$ bekannten Anteil multipliziert mit einer abfallenden e-Funktion. Für die graphische Darstellung ergibt sich