Kallenrode, www.sotere.uos.de

Übungsaufgaben Differentiation

1. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden, in Parameterform gegebenen Funktionen:
   (a) Zykloide (Kurve, die von einem Punkt beschrieben wird, der außerhalb ($\lambda > 0$) oder innerhalb ($\lambda < 0$) eines Kreises auf einem vom Kreismittelpunkt ausgehenden und mit dem Kreis fest verbundenen Strahl befindet, während der Kreis, ohne zu gleiten, auf einer Geraden abrollt): $x = a(t - \lambda \sin t)$ und $y = a(1 - \lambda \cos t)$.
   (b) Evolvente (Kurve, die am Endpunkt eines fest gespannten Fadens beschrieben wird, wenn dieser von einem Kreis abgewickelt wird): $x = a\cos\varphi + a\varphi \sin\varphi$ und $y = a \sin\varphi - a\varphi\cos\varphi$.

2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen stetig differenzierbar (oder zumindest differenzierbar) sind in $\mathbb{R}$:
$$f(x) = x\,\mathrm{e}^x\,\sin(x)\,, \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1}\,, \quad h(x) = |x| - x\,, \quad k(x) = x^{2/3}\,, \quad l(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+a^2}}\,.$$

3. Radialsymmetrische Felder sind proportional zu r^n. Bestimmen Sie den Gradienten für die folgenden Felder:
$$\begin{aligned} A(r) &= c\,r\,, \\ B(r) &= \frac{c}{r}\,, \\ C(r) &= c\,r^n\,, \end{aligned}$$
jeweils in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten.

4. Bilden Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sin^2(ax)\,e^{by} + y^3 \\ g(x,y) &= xy^2 + 4x^5y + 16x + \cos x \\ h(x,y,z) &= 2\cos(3xy)\,e^{-xz} \end{aligned}$$
Überprüfen Sie, ob die gemischten Ableitungen identisch sind.

5. Gegeben ist das Feld $A = x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + 0.5$. Bestimmen Sie den Gradienten und die Ableitung in Richtung des Vektors $\vec{a} = (1, -3)$. Bestimmen Sie beides auch für den Ursprung und den Punkt (-1,-1). Skizzieren Sie Feld, Isolinien und Gradient (MatLab erlaubt).