Übungsaufgaben Differentiation

1. Bilden Sie die ersten Ableitungen der folgenden, in Parameterform gegebenen Funktionen:

   (a) Zykloide (Kurve, die von einem Punkt beschrieben wird, der außerhalb ($\lambda > 0$) oder innerhalb ($\lambda < 0$) eines Kreises auf einem vom Kreismittelpunkt ausgehenden und mit dem Kreis fest verbundenen Strahl befindet, während der Kreis, ohne zu gleiten, auf einer Geraden abrollt): $x = a(t - \lambda \sin t)$ und $y = a(1 - \lambda \cos t)$.

   (b) Evolvente (Kurve, die am Endpunkt eines fest gespannten Fadens beschrieben wird, wenn dieser von einem Kreis abgewickelt wird): $x = a \cos\varphi + a\varphi \sin\varphi$ und $y = a \sin\varphi - a\varphi \cos\varphi$.

   Lösung: die beiden in Parameterform gegebenen Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ werden nach t abgleitet. Die Ableitung von y nach x ergibt sich daraus zu

   $$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \ .$$

   (a) Für die Zykloide ergibt sich mit t als Parameter die Ableitung zu

   $$\begin{aligned} \dot{x} &= a(1 - \lambda \cos t) \\ \dot{y} &= a\lambda \sin t \\ y' &= \frac{a\lambda \sin t}{a(1 - \lambda \cos t)} \end{aligned}$$

   (b) Für die Evolvente ist φ der Parameter und die Ableitung wird

   $$\begin{aligned} \dot{x} &= -a \sin\varphi + a\varphi \cos\varphi + a \sin\varphi \\ \dot{y} &= a \cos\varphi + a\varphi \sin\varphi - a \cos\varphi \\ y' &= \frac{a\varphi \sin\varphi}{a\varphi \cos\varphi} = \tan\varphi \ . \end{aligned}$$

2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen stetig differenzierbar (oder zumindest differenzierbar) sind in $\mathbb{R}$:

   $$f(x) = x\,\mathrm{e}^x \sin(x)\,, \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1}\,, \quad h(x) = |x| - x\,, \quad k(x) = x^{2/3}\,, \quad l(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+a^2}} \ .$$

   Lösung: Produkte, Summen und stetige Funktionen stetiger Funktionen sind wieder stetige Funktionen. Alle Faktoren in $f(x)$ sind stetig, so dass $f(x)$ ebenfalls stetig ist. Außerdem hat $f(x)$ keine Kanten oder Knicke, so dass $f(x)$ auch differenzierbar ist mit $f'(x) = \mathrm{e}^x(x \cos(x) + x \sin(x) + \sin(x))$. Auch $f'(x)$ setzt sich nur aus stetigen Funktionen zusammen, ist also selbst stetig. Daher ist $f(x)$ auch stetig differenzierbar.
   Für $g(x)$ gilt Stetigkeit mit der oben gegebenen Argumentation. Probleme mit einer etwaigen Definitionslücke oder Polstelle gibt es im Reellen nicht, ebenso keine Knicke, d.h. $g(x)$ ist auch differenzierbar. Für die Ableitung gilt $g'(x) = -2x/(x^2+1)^2$. Auch diese Funktion ist stetig, da sie sich aus stetigen Funktionen zusammen setzt. Damit ist auch $g(x)$ stetig diffferenzierbar.
   Die Funktion $h(x)$ erfordert eine Fallunterscheidung. Daher lässt sie sich etwas geschickter darstellen als

   $$h(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases} \ .$$

   Die Funktion ist stetig in $\mathbb{R}$ für alle Punkte außer Null sind die einzelnen Funktionen stetig und für $x \to 0$ sind rechter und linger Grenzwert jeweils gleich dem Funktionswert $f(0) = 0$. Die Funktion ist differenzierbar in allen Punkten außer $x = 0$:

   $$h'(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases} \ .$$

Rechts- und linksseitiger Grenzwert der Ableitung sind für $x \to 0$ nicht identisch, d.h. die Funktion ist in diesem Punkt nicht differenzierbar. Die Ableitung ist jedoch stetig, so dass $h(x)$ stetig differenzierbar ist in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
$k(x)$ ist stetig in $\mathbb{R}$. $k(x)$ ist auch differenzierbar mit der Ableitung $k'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, allerdings nicht differenzierbar in $x = 0$, da links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten unterschiedliches Vorzeichen haben (und für $x = 0$ nicht einmal endlich sind). Die Ableitung ist jedoch stetig, so dass auch $k(x)$ stetig differenzierbar ist in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
$l(x)$ ist eine stetige Funktion einer stetigen Funktion und damit wieder stetig. Die Ableitung ist

$$l'(x) = -\frac{x\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+a^2}}}{\sqrt{x^2+a^2}} \; .$$

Zumindest für $a \neq 0$ ist die Ableitung überall definiert und, da sie wieder nur aus stetigen Funktionen besteht, stetig, so dass $l(x)$ stetig differenzierbar ist.

3. Radialsymmetrische Felder sind proportional zu r^n. Bestimmen Sie den Gradienten für die folgenden Felder:

$$\begin{aligned} A(r) &= c\,r \; , \\ B(r) &= \frac{c}{r} \; , \\ C(r) &= c\,r^n \; , \end{aligned}$$

jeweils in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten.

Lösung: In kartesischen Koordinaten ist das reine Rechnerei. Vorbetrachtung: es ist $r^n = \sqrt{x^2+y^2+z^2}^n = (x^2+y^2+z^2)^{n/2}$. Ableitung nach einer Komponente ergibt

$$\frac{\partial r^n}{\partial x} = \frac{\partial (x^2+y^2+z^2)^(n/2)}{\partial x} = \frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}\,2x = nx\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{n-2} = nxr^{n-2} \; .$$

Für den Gradienten erhalten wir dann

$$\nabla r^n = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} nr^{n-2} = r\vec{e}_r\,nr^{n-2} = nr^{n-1}\,\vec{e}_r \; . \tag{1}$$

Angewandt auf die obigen Felder ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla A &= \nabla(cr) = c\vec{e}_r \; , \\ \nabla B &= \nabla\frac{c}{r} = \nabla(cr^{-1}) = -\frac{c}{r^2}\vec{e}_r \; , \\ \nabla C &= \nabla(cr^n) = ncr^{n-1}\,\vec{e}_r \; . \end{aligned}$$

In Kugelkoordinaten hätten wir (1) einfacher erhalten. Für den Gradienten in Kugelkoordinaten gilt

$$\nabla A = \frac{\partial A}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\frac{\partial A}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \; .$$

Da die Felder radialsymmetrisch sind, hängen wie weder von ϑ noch von φ ab, d.h. der Gradient vereinfacht sich zu

$$\nabla A = \frac{\partial A}{\partial r}\vec{e}_r = \frac{\partial r^n}{\partial r}\vec{e}_r = nr^{n-1}\,\vec{e}_r \; ,$$

entsprechend (1).

4. Bilden Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sin^2(ax)\,e^{by} + y^3 \\ g(x,y) &= xy^2 + 4x^5y + 16x + \cos x \end{aligned}$$

$$h(x,y,z) \quad = \quad 2\cos(3xy)\, e^{-xz}$$

Überprüfen Sie, ob die gemischten Ableitungen identisch sind.
Lösung: Ableitungen einfach, Produktregel und Kettenregel berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
f_x &= 2a\sin(ax)\,\cos(ax)\mathrm{e}^{by}\\
f_y &= b\,sin^2(ax)\,\mathrm{e}^{by} + 3y^2\\
f_{xx} &= 2a\,(a\cos^2(ax) - a\sin^2(ax))\mathrm{e}^{by}\\
f_{xy} &= 2ab\sin(ax)\,\cos(ax)\,\mathrm{e}^{by}\\
f_{yx} &= 2ab\sin(ax)\,\cos(ax)\,\mathrm{e}^{by} = f_{xy}\\
f_{yy} &= b^2\,\sin^2(ax)\,\mathrm{e}^{by} + 6y\\
g_x &= y^2 + 20x^4y + 16 - \sin x\\
g_y &= 2xy + 4x^5\\
g_{xx} &= 80x^3y - \cos x\\
g_{xy} &= 2y + 20x^4\\
g_{yx} &= 2y + 20x^4 = g_{xy}\\
g_{yy} &= 2x
\end{aligned}$$

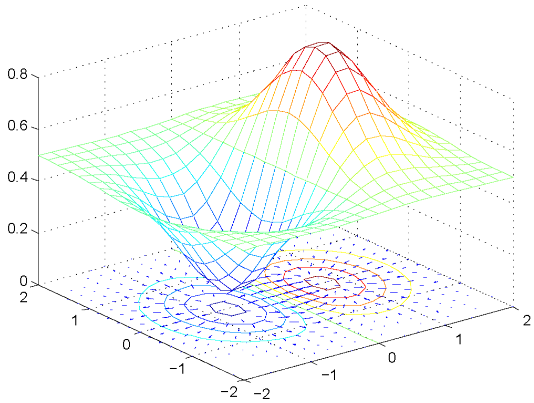
Bei den zweiten Ableitungen von h an die Kreativität der Studierenden appellieren; formal Anwendung der Produktregel, wobei ein Faktor jeweils wieder die Anwendung der Produktregel erfordert (wurde auch bei $h(x)$ in der voran gegangenen Aufgabe benötigt):

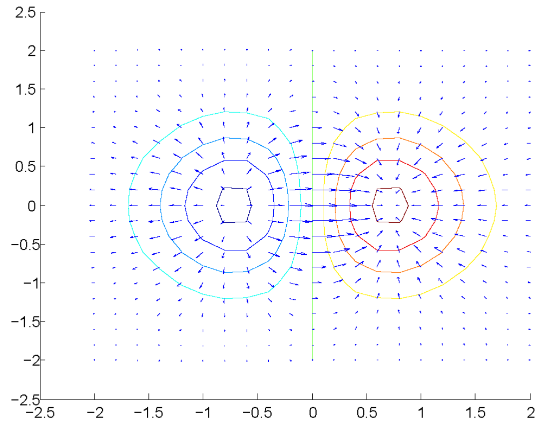
$$\begin{aligned}
[f(x)\,g(x)\,h(x)]' &= [f(x)\,\{g(x)\,h(x)\}]'\\
&= f(x)\,\{g(x)\,h(x)\}' + f'(x)\,\{g(x)\,h(x)\}\\
&= f(x)\,\{g(x)\,h'(x) + g'(x)\,h(x)\} + f'(x)\,\{g(x)\,h(x)\}\\
&= f(x)\,g(x)\,h'(x) + f(x)\,g'(x)\,h(x) + f'(x)\,g(x)\,h(x)
\end{aligned}$$

Angewandt auf die Aufgabe:

$$\begin{aligned}
h_x &= -6y\sin(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} - 2z\,\cos(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz}\\
h_y &= -6x\,\sin(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz}\\
h_z &= -2x\,\cos(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz}\\
h_{xx} &= -18y^2\cos(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} + 12zy\sin(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} + 2z^2\,\cos(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz}\\
h_{xy} &= -18xy\,\cos(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} + 6zx\,\sin(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} - 6\sin(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz}\\
h_{xz} &= 6yx\,\sin(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} + 2zx\,\cos(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} - 2\cos(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz}\\
h_{yx} &= -6\,\sin(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} - 18xy\,\cos(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} + 6xz\,\cos(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} = h_{xy}\\
h_{yy} &= -18x^2\,\cos(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz}\\
h_{yz} &= 6x^2\,\sin(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz}\\
h_{zx} &= -2\,\cos(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} + 6xy\,\sin(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} + 2xz\,\cos(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} = h_{xz}\\
h_{zy} &= 6x^2\,\sin(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz} = h_{yz}\\
h_{zz} &= 2x^2\,\cos(3xy)\,\mathrm{e}^{-xz}
\end{aligned}$$

5. Gegeben ist das Feld $A = x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + 0.5$. Bestimmen Sie den Gradienten und die Ableitung in Richtung des Vektors $\vec{a} = (1, -3)$. Bestimmen Sie beides auch für den Ursprung und den Punkt (-1,-1). Skizzieren Sie Feld, Isolinien und Gradient (MatLab erlaubt).
Lösung: Feld, Isoflächen und Gradient:





Der Gradient ergibt sich zu

$$\nabla A = \begin{pmatrix} (1-2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ -2xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{pmatrix} \; ,$$

dritte Komponente verschwindet, da nur 2D-Feld betrachtet. Die Richtungsableitung ergibt sich als die Projektion des Gradienten auf den Einheitsvektor der gegebenen Richtung:

$$\frac{\partial A}{\partial \vec{a}} = \nabla A \cdot \vec{e}_a = \nabla A \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

und damit nach Einsetzen

$$\frac{\partial A}{\partial \vec{a}} = \begin{pmatrix} (1-2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ -2xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(1-2x^2+6xy\right) \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \; .$$

Die Richtungsableitung gibt nur einen Betrag, die Richtung ist bereits durch $\vec{e}_a$ festgelegt. Für den Ursprung ergibt sich

$$\nabla A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial A}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \; ,$$

d.h. die Steigung in Richtung von $\vec{a}$ beträgt nur $\frac{1}{\sqrt{10}}$ des Gradienten.
Für den Punkt (-1,-1) ergibt sich

$$\nabla A = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-2} \\ -2\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial A}{\partial \vec{a}} = \frac{5}{\sqrt{10}}\mathrm{e}^{-2} \; .$$