Übungsaufgaben Integration

1. Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsmethode:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sin(kx+d)\,\mathrm{d}x \\ G(x) &= \int \frac{1}{2x+9}\,\mathrm{d}x \\ H(x) &= \int x\,\sqrt{5x^2-32}\,\mathrm{d}x\ . \end{aligned}$$

   Lösung: Alle Integrale sind einfach, die Substitution beim letzten sollte für die Studierenden ebenfalls zu erkennen sein:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sin(kx+d)\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit} \qquad u = kx+d \qquad \text{und} \qquad u' = k \\ &= \int \sin u\,\frac{\mathrm{d}u}{k} = -\frac{1}{k}\,\cos u + c = -\frac{1}{k}\,\cos(kx+d) + c\ . \\ G(x) &= \int \frac{1}{2x+9}\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit} \qquad u = 2x+9 \qquad \text{und} \qquad u' = 2 \\ &= \int \frac{1}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\,\ln u + c = \frac{1}{2}\,\ln(2x+9) + c\ . \\ H(x) &= \int x\,\sqrt{5x^2-32}\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit} \qquad u = 5x^2-32 \qquad \text{und} \qquad u' = 10x \\ &= \int x\,\sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{10x} = \frac{1}{10}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{10}\,u^{3/2}\,\frac{2}{3} + c = \frac{u}{15} = \frac{(5x^2-32)^{3/2}}{15} + c\ . \end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie die folgenden Integrale durch (gegebenenfalls mehrfache) Produktintegration:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x\,\cos x\,\mathrm{d}x \\ G(x) &= \int ax\,\mathrm{e}^{bx}\,\mathrm{d}x \\ H(x) &= \int \mathrm{e}^{x}\,\sin x\,\mathrm{d}x\ . \end{aligned}$$

   Lösung: bei den ersten beiden reicht einmalige Produktintegration (allerdings muss beim zweiten Integral auf die inneren Ableitungen geachtet werden):

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x\,\cos x\,\mathrm{d}x && u' = \cos x \quad \Rightarrow \quad u = \sin x \\ & && v = x \quad \Rightarrow \quad v' = 1 \\ &= x\,\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\,\sin x + \cos x\ . \\ G(x) &= \int ax\,\mathrm{e}^{bx}\,\mathrm{d}x && u' = \mathrm{e}^{bx} \quad \Rightarrow \quad u = \tfrac{1}{b}\,\mathrm{e}^{bx} \\ & && v = ax \quad \Rightarrow \quad v' = a \\ &= \tfrac{ax}{b}\,\mathrm{e}^{bx} - \int \tfrac{a}{b}\,\mathrm{e}^{bx} = \tfrac{ax}{b}\,\mathrm{e}^{bx} - \tfrac{a}{b^2}\,\mathrm{e}^{bx} + c\ . \end{aligned}$$

   Das letzte Integral erfordert doppelte Anwendung der Produktintegration. Bei der zweiten Integration erhalten wir als Restintegral wieder das Ausgangsintegral.

$$\begin{aligned} H(x) &= \int \mathrm{e}^{x}\,\sin x\,\mathrm{d}x && u' = \mathrm{e}^{x} \quad \Rightarrow \quad u = \mathrm{e}^{x} \\ & && v = \sin x \quad \Rightarrow \quad v' = \cos x \\ &= \mathrm{e}^{x}\,\sin x - \int \mathrm{e}^{x}\,\cos x\mathrm{d}x && u' = \mathrm{e}^{x} \quad \Rightarrow \quad u = \mathrm{e}^{x} \\ & && v = \cos x \quad \Rightarrow \quad v' = -\sin x \\ &= \mathrm{e}^{x}\,\sin x - \left(\mathrm{e}^{x}\,\cos x - \int \mathrm{e}^{x}(-\sin x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \mathrm{e}^{x}\,\sin x - \mathrm{e}^{x}\cos x - \int \mathrm{e}^{x}\sin x\,\mathrm{d}x\ , \end{aligned}$$

und nach Umformen

$$\Rightarrow 2 \int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x$$

bzw.

$$\Rightarrow \int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x \right) \, .$$

3. Bestimmen Sie die folgenden Mehrfachintegrale:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{x=1}^{3} \int_{y=2}^{4} \left(x^2 y + y^2 x^3 \right) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ G(x,y) &= \int_{x=-2}^{2} \int_{y=0}^{\pi} x^2 \sin y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Lösung: die Integrationsgrenzen sind jeweils unabhängig voneinander, so dass die Reihenfolge der Integration egal ist. Die gegebene Lösung ist also nur eine Möglichkeit!

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{x=1}^{3} \int_{y=2}^{4} \left(x^2 y + y^2 x^3 \right) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{x=1}^{3} \left[\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^3 x^3}{3} \right]_{y=2}^{4} \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=1}^{3} \left(6x^2 + \frac{56}{3} x^3 \right) \mathrm{d}x = \left[2x^3 + \frac{14}{3} x^4 \right]_{x=1}^{3} = \frac{1276}{3} \, . \\ G(x,y) &= \int_{x=-2}^{2} \int_{y=0}^{\pi} x^2 \sin y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{x=-2}^{2} \left[x^2 (-\cos y) \right]_{y=0}^{\pi} \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=-2}^{2} x^2 \left(-\left((-1) - 1 \right) \right) \mathrm{d}x = \int_{x=-2}^{2} 2x^2 \, \mathrm{d}x = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=-2}^{x=2} = \frac{32}{3} \, . \end{aligned}$$

4. Bestimmen Sie die folgenden Mehrfachintegrale:

$$\begin{aligned} G(x,y,z) &= \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{1} \int_{z=y}^{y^2} yz \sin x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, , \\ H(x,y,z) &= \int_{x=1}^{3} \int_{y=2-x}^{2+x} \int_{z=1}^{4} z^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, . \end{aligned}$$

Lösung: die Integrationsgrenzen sind nicht unabhängig voneinander, d.h. die Reihenfolge der Integration muss beachtet werden derart, dass erst dann über eine Variable integriert werden kann, wenn diese nicht mehr in der Integrationsgrenze einer anderen Variablen steht. Oder anders formuliert: wir müssen erst die Integrationen mit Integrationsgrenzen ausführen, die noch Variablen enthalten: alle Variablen müssen in den Integranden geholt werden, bevor die Integration ausgeführt werden kann.
Bei $G(x,y,z)$ muss daher die Integration über z vor der über y ausgeführt werden.

$$\begin{aligned} G &= \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{1} \int_{z=y}^{y^2} yz \sin x \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{1} y \left[\frac{z^2}{2} \right]_{y}^{y^2} \sin x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{1} y \left(\frac{y^4}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \sin x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{1} \left(\frac{y^5}{2} - \frac{y^3}{2} \right) \sin x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$= \int_{x=0}^{\pi/2} \left[\frac{y^6}{12} - \frac{y^4}{8}\right]_0^1 \sin x \,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8}\right) \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{-1}{24} \left[\cos x\right]_0^{\pi/2} = \frac{-1}{24}$$

Beachten Sie, dass die Integration über x zu beliebiger Zeit hätte ausgeführt werden können! Bei $H(x)$ muss die Integration über y vor der über x erfolgen (z egal), da y in seinen Integrationsgrenzen noch ein x enthält:

$$\begin{aligned}
H(x,y,z) &= \int_{x=1}^{3} \int_{y=2-x}^{2+x} \int_{z=1}^{4} z^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{x=1}^{3} \int_{y=2-x}^{2+x} \mathrm{e}^x \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=1}^{z=4} \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=1}^{3} \int_{y=2-x}^{2+x} 21 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = 21 \int_{x=1}^{3} \mathrm{e}^x \left[y\right]_{y=2-x}^{y=2+x} \mathrm{d}x = 21 \int_{x=1}^{3} 2x \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\
&= 42 \int_{x=1}^{3} x \,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = 42 \left[x \,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x\right]_{x=1}^{3} = 42 \left[x \,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right]_{x=1}^{3} = 42 \left[(x-1) \,\mathrm{e}^x\right]_{x=1}^{3} \\
&= 42 \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^3 = 84 \,\mathrm{e}^3 = 1687.2 \,.
\end{aligned}$$

5. Bestimmen Sie das Volumen eines Kreiskegels mit Höhe H und Radius R durch Integration (nicht als Rotationskörper!). Bestimmen Sie auch sein Trägheitsmoment.

   Lösung: für die Problem sind Zylinderkoordinaten angemessen, allerdings ist die Integrationsgrenze in ϱ von der Höhe abhängig (Strahlensatz):

   $$\frac{R}{H} = \frac{\varrho}{z} \qquad \Rightarrow \qquad \varrho = \frac{Rz}{H} \,.$$

   Damit ergibt sich für das Integral

   $$\begin{aligned}
   V &= \int \mathrm{d}V = \int_{z=0}^{H} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\varrho=0}^{Rz/H} \varrho \,\mathrm{d}\varrho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z = 2\pi \int_{z=0}^{H} \int_{\varrho=0}^{Rz/H} \varrho \,\mathrm{d}\varrho \,\mathrm{d}z = 2\pi \int_{z=0}^{H} \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_{\varrho=0}^{Rz/H} \mathrm{d}z \\
   &= 2\pi \int_{z=0}^{H} \frac{R^2 z^2}{2H^2} \,\mathrm{d}z = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_{z=0}^{H} z^2 \mathrm{d}z = \frac{\pi R^2}{H^2} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H \,.
   \end{aligned}$$

   Als Vergleichslösung können sie, denen das Verfahren bekannt ist, auf die Integration mit Hilfe eines Rotationskörpers zurück greifen. Dazu lässt man die Gerade $y = Rx/H$ um die x-Achse rotieren und erhält wie oben

   $$V = \int_0^H \pi (Rx/H)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi R^2}{H^2} \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H \,.$$

   Für das Volumen hätte man die doppelte Integration durch Verwendung des Rotationskörpers umgehen können, für das Trägheitsmoment ist dies nicht möglich. Für letzteres muss über das gleiche Volumen integriert werden, jedoch nicht als $\int V$ sondern als $\int \varrho^2 \,\mathrm{d}V$. Da das Rotationsintegral die Doppelintegration für das Volumen bestätigt hat, können wir aber zumindest genug Vertrauen in die Integrationsgrenzen haben um diese von oben zu übernehmen. Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment (mit $\rho = m/V$ als der Massendichte)

   $$\begin{aligned}
   I &= \rho \int \varrho^2 \mathrm{d}V = \int_{z=0}^{H} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\varrho=0}^{Rz/H} \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z = 2\pi\rho \int_{z=0}^{H} \int_{\varrho=0}^{Rz/H} \varrho^3 \,\mathrm{d}\varrho \,\mathrm{d}z = 2\pi\rho \int_{z=0}^{H} \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_{\varrho=0}^{Rz/H} \mathrm{d}z \\
   &= 2\pi\rho \int_{z=0}^{H} \frac{R^4 z^4}{4H^4} \,\mathrm{d}z = \rho \frac{\pi R^4}{2H^4} \int_{z=0}^{H} z^4 \mathrm{d}z = \rho \frac{\pi R^4}{2H^4} \left[\frac{z^5}{5}\right]_0^H = \rho \frac{1}{10} \pi R^4 H = \frac{3}{10} m R^2 \,.
   \end{aligned}$$