Kallenrode, www.sotere.uos.de

Übungsaufgaben Komplexe Zahlen und DGL

1. Wandeln Sie die folgenden komplexen Zahlen in die jeweils anderen Darstellungsformen um:

$$\begin{aligned} z_1 &= 4 - 7\mathrm{i} \\ z_2 &= -2 + \mathrm{i} \\ z_3 &= 32 \\ z_4 &= 5\,(\cos\pi/6 + \mathrm{i}\sin\pi/6) \\ z_5 &= 3\,(\cos\pi/11 + \mathrm{i}\sin\pi/11) \\ z_6 &= \sqrt{7}\,\mathrm{e}^{0.5\mathrm{i}} \\ z_7 &= \pi\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}\,. \end{aligned}$$

2. Gegeben sind die beiden komplexen Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2+4\mathrm{i} \\ 4-3\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} \\ 4\mathrm{i} \end{pmatrix}\,.$$

   Zerlegen Sie beide Vektoren in ihren Real- und Imaginärteil und bilden Sie ihre Summe, ihre Differenz und ihre Produkte (Achtung, beim Skalarprodukt müssen Sie aufpassen, dieses wird aus Normierungsgründen mit dem konjugiert komplexen des ersten Vektors gebildet!!!). Macht das Kreuzprodukt einen Sinn?

3. Berechnen Sie die folgenden Potenzen komplexer Zahlen in kartesischen und in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+\mathrm{i})^3 \\ z_2 &= (-2+5\mathrm{i})^5 \\ z_3 &= (3\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3})^7 \\ z_4 &= [(2+\mathrm{i})/(1-2\mathrm{i})]^5\,. \end{aligned}$$

4. Leiten Sie die folgenden Beziehungen (für $\alpha > 0$) her:

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha^2+1} \qquad \text{und} \qquad \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}\,.$$

   Hinweis: Winkelfunktionen mit Hilfe der Euler'schen Formel darstellen

5. Gegeben ist die lineare homogene Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a\dot{x} + 25x = 0$$

   mit $a > 0$. Bestimmen Sie a derart, dass sich der aperiodische Grenzfall ergibt.

6. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' - 3y &= 3x^2 - 4x \\ \ddot{x} - 2\dot{x} + x &= \mathrm{e}^{2t} \\ \ddot{x} - x &= t\,\sin t\,. \end{aligned}$$