Kallenrode, www.sotere.uos.de

Übungsaufgaben Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen Lösungen der links daneben stehenden Differentialgleichungen sind. Klassifizieren Sie die DGLs.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x} &= 0\,, \qquad y = c_1 + 2x + c_2 x^2 \\
x\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy &= 0\,, \qquad xy = 2\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x} \\
\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 4s &= 0\,, \qquad s = c_1\,\cos(2t + c_2)\,.
\end{aligned}$$

2. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned}
y' + xy &= 4x \\
y &= ay' + \cos\omega t \\
xy' - y &= x^2 + 4 \\
y' - 3y &= x\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

   Hinweis: die zweite DGL ist etwas mühsam zu integrieren – das Verfahren sollte aus Vorlesung/Skript/Übungen bekannt sein.

3. Lösen Sie die folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten durch Aufsuchen einer partikulären Lösung:

$$\begin{aligned}
y' &= 2x - y \\
y' + y &= \mathrm{e}^{-x} \\
y' - 4y &= 5\sin x\,.
\end{aligned}$$

4. Die DGL

$$(1 - x^2)\dot{x} = \frac{t-1}{t^2 - 2t + 5}$$

   ist eine nicht-lineare DGL erster Ordnung, da sie (a) eine Potenz der gesuchten Funktion x enthält und (b) ein Produkt aus der gesuchten Funktion und ihrer Ableitung. Betrachten Sie die Struktur der Gleichung genau und wenden Sie ein geeignetes, Ihnen von linearen Gleichungen bekanntes Lösungsverfahren an. (Hinweis: die Lösung einer DGL ist immer eine Funktion, allerdings nicht zwingend in expliziter Darstellung!)