Kallenrode, www.sotere.uos.de

Übungsaufgabe Verallgemeinerte Funktion

1. Bei einem in einer Ebene schwingenden Fadenpendel verlängert sich der Faden mit konstanter Rate b gemäß $l = a + bt$. Mit der Auslenkung θ gegenüber der vertikalen lässt sich die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen schreiben als

$$m(l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta}) = -mg\,\sin\theta \qquad \text{oder} \qquad (a+bt)\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + g\theta = 0\ . \tag{1}$$

Finden Sie eine allgemeine Lösung dieser Gleichung. Bestimmen Sie die spezielle Lösung für $\theta(0) = \theta_0$ und $\dot{\theta}(0) = 0$.
Hinweis: diese Aufgabe ist ein Anwendungsbeispiel für die Besselfunktion. Deren allgemeinste Darstellungsform ist

$$x^2 y''(x) + (1-2\alpha)xy'(x) + (\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma} + \alpha^2 - \nu^2\gamma^2)y(x) = 0 \tag{2}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y(x) = x^\alpha \left[c_1 J_\nu(\beta x^\gamma) + c_2 Y_\nu(\beta x^\gamma)\right]\ . \tag{3}$$

(Hinweis an die Studierenden: numerische Lösung in den MatLab-Tutorien versuchen und mit der hier gefundenen analytischen Lösung vergleichen.)

Lösung: bei dieser Differentialgleichung hängt die Auslenkung θ nicht nur von der Zeit sondern auch von der Länge des Fadens ab. Für diese führen wir die Variable $x = a + bt$ ein und können damit die Bewegungsgleichung umschreiben in

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + \frac{gx}{b^2}\theta = 0\ . \tag{4}$$

Vergleich mit (2) liefert $1 - 2\alpha = 2$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\alpha^2 - \nu^2\gamma^2 = 0$ und $\beta^2\gamma^2 = g/b^2$. Damit wird die allgemeine Lösung (3) zu

$$\theta(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left[c_1 J_1\left(\frac{2(gx)^{\frac{1}{2}}}{b}\right) + c_2 Y_1\left(\frac{2(gx)^{\frac{1}{2}}}{b}\right)\right]\ . \tag{5}$$

Dabei verschwindet der Y_1 Term nicht, da $x = a + bt$ stets von Null verschieden ist (zumindest für die nicht-trivialen Fälle $a > 0$ und $b > 0$). Damit haben wir die allgemeine Lösung bestimmt.

Zur Auswertung der gegebenen Anfangsbedingungen setzen wir die erste in die Lösung (5) ein unter Verwendung der Abkürzung

$$\lambda = \frac{2(ag)^{\frac{1}{2}}}{b} \tag{6}$$

(das a ergibt sich aus $x(0) = a + b0 = a$) und erhalten

$$\sqrt{a}\,\theta_0 = c_1 J_1(\lambda) + c_2 Y_1(\lambda)\ . \tag{7}$$

Zur Auswertung der Anfangsbedingung führen wir die Abkürzung

$$u = \frac{2\sqrt{gx}}{b} \tag{8}$$

ein und schreiben für θ:

$$\theta(u) = \frac{2\sqrt{g}}{b}\left[c_1\frac{J_1(u)}{u} + c_2\frac{Y_1(u)}{u}\right]\ . \tag{9}$$

Die zeitliche Ableitung wird damit zu

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{2\sqrt{g}}{b}\left[c_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{J_1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + c_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{Y_1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right] \\ &= \frac{2\sqrt{g}}{b}\left[-c_1\frac{J_2}{u} - c_2\frac{Y_2}{u}\right]\frac{\sqrt{g}}{x} = -\frac{2g}{bxu}\left[c_1 J_2(u) + c_2 Y_2(u)\right] \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Für $t = 0$ ergibt sich daraus

$$c_1 J_2(\lambda) + c_2 Y_2(\lambda) \ . \tag{11}$$

Kombination von (7) und (11) liefert für die Integrationskonstanten

$$c_1 = \frac{a^{1/2}\theta_0 Y_2(\lambda)}{J_1(\lambda)Y_2(\lambda) - J_2(\lambda)Y_1(\lambda)} = -\frac{\pi\lambda a^{1/2}\theta_0 Y_2(\lambda)}{2} \tag{12}$$

und

$$c_2 = \frac{\sqrt{a}\theta_0 J_2(\lambda)}{J_2(\lambda)Y_1(\lambda) - J_1(\lambda)Y_2(\lambda)} = \frac{\pi\lambda\sqrt{a}\theta_0 J_2(\lambda)}{2} \ . \tag{13}$$

Die jeweils letzten Schritte (Zusammenfassen der verschiedenen Ordnungen zum Umschreiben der Nennen) ist nicht offensichtlich, für eine sinnvolle Möglichkeit ist es ausreichend, bis zu den jeweils mittleren Termen zu gelangen. Die Gesamtlösung wird damit

$$\theta = \frac{\pi\lambda\theta_0}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}\left[J_2(\lambda)Y_1(u) - Y_2(\lambda)J_1(u)\right] \ . \tag{14}$$