Kallenrode, www.sotere.uos.de

Übungsaufgaben Vektoranalysis

1. Bestimmen Sie die Quellen des Feldes $\nabla A \times \nabla B$.

2. Bestimmen Sie die Quellstärke eines homogen geladenen Zylinders mit Radius R, der ein elektrisches Feld
$$\vec{E}(\varrho) = \begin{cases} c\varrho\,\vec{e}_\varrho & \text{Innenraum mit } R \geq \varrho \\ cR^2/\varrho\,\vec{e}_\varrho & \text{Außenraum mit } R < \varrho \end{cases}$$

3. Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsfeld einer mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ rotierenden Scheibe. Bestimmen Sie ferner die Rotation dieses Geschwindigkeitsfeldes.

4. Bestimmen Sie die Parameter a und b derart, dass die Rotation des Vektorfeldes
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^3z \\ axy^2z \\ 2x^2z + bxy^3 \end{pmatrix}$$
überall verschwindet.

5. Ein magnetisches Feld ist gegeben als
$$\vec{H} = \frac{1}{2}i\varrho\vec{e}_\varphi$$
Skizzieren Sie das Feld, bestimmen Sie seine Wirbel.

6. Bestimmen Sie die Rotation des Dipolfeldes
$$\vec{E} = -\frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^2}\begin{pmatrix} -x^2+y^2+z^2 \\ -2xy \\ -2xz \end{pmatrix} .$$
Zeigen Sie ferner, dass sich dieses Feld als der Gradient des skalaren Potentials
$$V(x,y,z) = \frac{\mu x}{4\pi\varepsilon_0\,(x^2+y^2+z^2)}$$
mit μ als dem Dipolmoment und ε_0 als der Permittivität darstellen lässt und bestimmen Sie die Quellstärke dieses Feldes. Überlegen Sie sich, was dies für die Rotation bedeutet.

7. Bestimmen Sie den Massenstrom
$$\vec{J} = \varrho v_0\vec{k} (= \varrho v_0\vec{e}_z)$$
mit ϱ als Dichte und $v_0\vec{k}$ als Geschwindigkeit durch eine Halbkugel mit Radius a wobei die Halbkugel auf der xy-Ebene aufliegt.

8. Gegeben ist das Feld $\vec{F} = (x,y,z)$. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für eine zylindrische Oberfläche mit $x^2+y^2=4$ und $0 \leq z \leq 4$.

9. Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{F} = (-y,x,1)$. Verifizieren Sie den Stokes'schen Satz für eine auf der xy-Ebene aufliegende Halbkugel mit $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$.