Kallenrode, www.sotere.uos.de

Übungsaufgaben Vektoranalysis

1. Bestimmen Sie die Quellen des Feldes $\nabla A \times \nabla B$.

   Lösung: Rechenregeln (Produktregel) verwenden, dazu die Abkürzungen $\vec{C} = \nabla A$ und $\vec{D} = \nabla B$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla A \times \nabla B) &= \nabla \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) \\ &= \vec{D} \cdot (\nabla \times \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\nabla \times \vec{D}) \\ &= \nabla C \cdot (\nabla \times \nabla A) - \nabla A \cdot (\nabla \times \nabla B) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

   da Gradientenfelder wirbelfrei sind.

2. Bestimmen Sie die Quellstärke eines homogen geladenen Zylinders mit Radius R, der ein elektrisches Feld

$$\vec{E}(\varrho) = \begin{cases} c\varrho\,\vec{e}_\varrho & \text{Innenraum mit } R \geq \varrho \\ cR^2/\varrho\,\vec{e}_\varrho & \text{Außenraum mit } R < \varrho \end{cases}$$

   Lösung: Divergenz in Zylinderkoordinaten ist allgemein

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial(\varrho A_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \; .$$

   Da das Feld nur von ϱ, nicht aber von φ oder z abhängt, verschwinden die entsprechenden Terme und es bleibt

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial(\varrho A_\varrho)}{\partial \varrho} \; .$$

   Für den Innenraum ist dann

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial c\varrho^2}{\partial \varrho} = \frac{1}{\varrho} 2c\varrho = 2c \; .$$

   Im Außenraum dagegen gilt

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho \frac{cR^2}{\varrho}}{\partial \varrho} = 0 \, ,$$

   d.h. im Außenraum verschwindet die Quellstärke erwartungsgemäß.

3. Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsfeld einer mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ rotierenden Scheibe. Bestimmen Sie ferner die Rotation dieses Geschwindigkeitsfeldes.

   Lösung: Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ gibt die Geschwindigkeit eines Teilchens an einem beliebigen Ort $\vec{r}$ auf der Scheibe:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} \; ,$$

   die Bewegung ist also auf die xy-Ebene beschränkt. Für die Rotation ergibt sich

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega - (-\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} = 2\vec{\omega} \; ; .$$

   Das Feld ist also, wie auch anschaulich zu erwarten, ein Wirbelfeld.
   Da es sich um ein Wirbelfeld handelt, muss das Geschwindigkeitsfeld quellen-frei sein, d.h.

$$\nabla \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \; .$$

4. Bestimmen Sie die Parameter a und b derart, dass die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^3 z \\ axy^2 z \\ 2x^2 z + bxy^3 \end{pmatrix}$$

überall verschwindet.

Lösung: die Rotation des Feldes ist

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^3 z \\ axy^2 z \\ 2x^2 z + bxy^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3bxy^2 - axy^2 \\ 4zx - y^3 - 4xz + by^3 \\ ay^2 z - 3zy^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \,. \end{aligned}$$

Die y-Komponente liefert $b = 1$, die z-Komponente $a = 3$. Einsetzen in x-Komponente liefert konsistentes Ergebnis.

5. Ein magnetisches Feld ist gegeben als

$$\vec{H} = \frac{1}{2} i \varrho \vec{e}_\varphi$$

Skizzieren Sie das Feld, bestimmen Sie seine Wirbel.

Lösung: Darstellung des Feldes in Zylinderkoordinaten, das Feld hat keine Komponente in z oder ϱ-Richtung, d.h. $H_z = 0$ und $H_\varrho = 0$. Feld als konzentrische Kreise um den Ursprung darstellbar. Für die Rotation in Kugelkoordinaten gilt allgemein

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\varrho + \left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \varrho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial (\varrho A_\varphi)}{\partial \varrho} - \frac{\partial A_\varrho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \,.$$

In diesem speziellen Fall überleben nur der zweite Term der ersten und der erste Term der letzten Klammer:

$$\nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho H_\varphi)}{\partial \varrho} \vec{e}_z = i \,.$$

Die Stromdichte i bestimmt also den Wirbel des Feldes, analog zu dem Ergebnis aus Aufgabe 3. Die so gefundene Gleichung ist übrigens allgemein gültig – sie ist (bis auf die Konstanten) eine der Maxwell-Gleichungen (Ampere'sches Gesetz) in differentieller Form.

6. Bestimmen Sie die Rotation des Dipolfeldes

$$\vec{E} = -\frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^2} \begin{pmatrix} -x^2 + y^2 + z^2 \\ -2xy \\ -2xz \end{pmatrix} \,.$$

Zeigen Sie ferner, dass sich dieses Feld als der Gradient des skalaren Potentials

$$V(x, y, z) = \frac{\mu x}{4\pi\varepsilon_0 \, (x^2 + y^2 + z^2)}$$

mit μ als dem Dipolmoment und ε_0 als der Permittivität darstellen lässt und bestimmen Sie die Quellstärke dieses Feldes. Überlegen Sie sich, was dies für die Rotation bedeutet.

Lösung: der zweite Teil der Aufgabe sollte die Studierenden daran erinnern, dass sich das Dipolafeld als Gradient eines skalaren Potentials darstellen lässt. Und da Gradientenfelder wirbelfrei sind, kann man sich diese Rechnung sparen.

Andererseits kann die Rechnung aber auch verwendet werden, um die obige Aussage zu überprüfen:

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \left[-\frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^2} \begin{pmatrix} -x^2+y^2+z^2 \\ -2xy \\ -2xz \end{pmatrix} \right] .$$

Komponentenweise erhalten wir

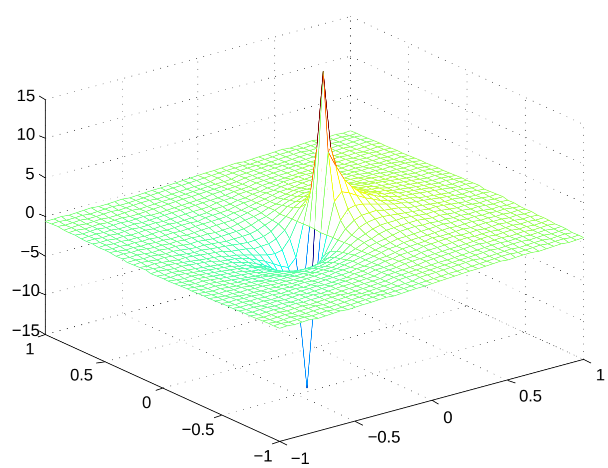
$$\begin{aligned}
[\nabla \times \vec{E}]_x &= -\tfrac{\mu}{4\pi\varepsilon_0} \left[\tfrac{\partial}{\partial y} \tfrac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \tfrac{\partial}{\partial z} \tfrac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right] = -\tfrac{\mu}{4\pi\varepsilon_0} \left[\tfrac{8xyz}{(\ldots)^3} - \tfrac{8xyz}{(\ldots)^3} \right] = 0 \,, \\
[\nabla \times \vec{E}]_y &= -\tfrac{\mu}{4\pi\varepsilon_0} \left[\tfrac{\partial}{\partial z} \tfrac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \tfrac{\partial}{\partial x} \tfrac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right] \\
&= -\tfrac{\mu}{4\pi\varepsilon_0} \left[\tfrac{(-x^2+y^2+z^2)(-2)2z}{(\ldots)^3} + \tfrac{2z}{(\ldots)^2} + \tfrac{2xz(-2)2z}{(\ldots)^3} + \tfrac{2z}{(\ldots)^2} \right] \\
&= -\tfrac{\mu}{4\pi\varepsilon_0} \left[\tfrac{4z}{(\ldots)^2} + \tfrac{-4z(-x^2+y^2+z^2)-8x^2z}{(\ldots)^3} \right] \\
&= -\tfrac{\mu}{4\pi\varepsilon_0} \left[\tfrac{4z(-x^2+y^2+z^2)}{(\ldots)^3} + \tfrac{-4x^2z-4zy^2-4z^3}{(\ldots)^3} \right] = 0 \\
[\nabla \times \vec{E}]_z &= \tfrac{\mu}{4\pi\varepsilon_0} \left[\tfrac{\partial}{\partial x} \tfrac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \tfrac{\partial}{\partial y} \tfrac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right] \\
&= \tfrac{\mu}{4\pi\varepsilon_0} \left[\tfrac{2xy(-2)2x}{(\ldots)^3} + \tfrac{2y}{(\ldots)^3} + \tfrac{(-x^2+y^2+z^2)(-2)2y}{(\ldots)^3} + \tfrac{2y}{(\ldots)^2} \right] \\
&= \tfrac{\mu}{4\pi\varepsilon_0} \left[\tfrac{4y}{(\ldots)^3} + \tfrac{-8xy^2-4y(-x^2+y^2+z^2}{(\ldots)^3} \right] \\
&= \tfrac{\mu}{4\pi\varepsilon_0} \left[\tfrac{4y(x^2+y^2+z^2)}{(\ldots)^3} - \tfrac{4xy^2+4y^3+4yz^2}{(\ldots)^3} \right] = 0
\end{aligned}$$

Die Rechnung macht deutlich, dass es Arbeit sparen sein kann, sich zu merken, dass Gradientenfelder wirbelfrei sind.

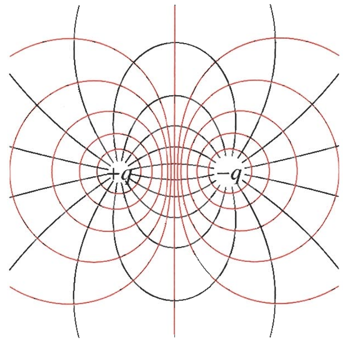
Bleibt noch die Bestimmung des Feldes aus dem Potential:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\nabla V = -\frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)} \\
&= -\frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^2} \begin{pmatrix} -x^2+y^2+z^2 \\ -2xy \\ -2xz \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Potential geplottet über der xy-Ebene:



Skizze für Äquipotential- und Feldlinien auf xy-Ebene beschränken:



und bitte noch einmal darauf hinweisen, dass die Feldlinien senkrecht auf den Äquipotentiallinien stehen. Für die Quellstärke ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \left[-\frac{\mu}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^2} \begin{pmatrix} -x^2+y^2+z^2 \\ -2xy \\ -2xz \end{pmatrix} \right] \\
&= -\frac{x(x^2-y^2-z^2)\mu}{\pi(x^2+y^2+z^2)^3\varepsilon_0} + \frac{x\mu}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^2\varepsilon_0} - \frac{2xy^2\mu}{\pi(x^2+y^2+z^2)^3\varepsilon_0} + \frac{x\mu}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^2\varepsilon_0} \\
&\quad -\frac{2xz^2\mu}{\pi(x^2+y^2+z^2)^3\varepsilon_0} + \frac{x\mu}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^2\varepsilon_0} \\
&= -\frac{2xy^2\mu}{\pi(x^2+y^2+z^2)^3\varepsilon_0} - \frac{2xz^2\mu}{\pi(x^2+y^2+z^2)^3\varepsilon_0} - \frac{x(x^2-y^2-z^2)\mu}{\pi(x^2+y^2+z^2)^3\varepsilon_0} + \frac{3x\mu}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^2\varepsilon_0} \\
&= \frac{x\mu}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^2\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

7. Bestimmen Sie den Massenstrom

$$\vec{J} = \varrho v_0 \vec{k} (= \varrho v_0 \vec{e}_z)$$

mit ϱ als Dichte und $v_0\vec{k}$ als Geschwindigkeit durch eine Halbkugel mit Radius a wobei die Halbkugel auf der xy-Ebene aufliegt.

Lösung: Der Fluss eines Feldes $\vec{A}$ durch eine (Ober)Fläche ist definiert als

$$\Phi = \int_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \, .$$

Um dieses Integral zu lösen wird das Flächenelement $\mathrm{d}\vec{S}$ über den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ und die Größe des Flächenelements $\mathrm{d}S = \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ geschrieben

$$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S = \vec{n}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

mit u und v als den bei der Darstellung der Fläche verwendeten Parametern. Für den Fluss lässt sich daher auch schreiben

$$\Phi = \int_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \, .$$

Die Gleichung der Oberfläche ist in diesem Fall $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Wir können die Oberfläche als Isolinie eines Feldes $\Psi = z - \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ interpretieren und erhalten für den Normalenvektor

$$\vec{n} = \frac{\nabla\Psi}{|\nabla\Psi|} = \frac{\begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{pmatrix}}{\frac{a}{z}} = \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{a} = \frac{\vec{r}}{z} \, ,$$

da

$$|\nabla\Psi| = \left(\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + 1\right)^2 = \frac{(x^2+y^2+z^2)}{z} = \frac{a}{z} \; .$$

Der Normalenvektor zeigt, wie auch anschaulich klar, radial nach außen. Damit wird das Produkt

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = \frac{\varrho v_0 z}{a}$$

und für den Fluss ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi &= \int\limits_S \frac{\varrho v_0 z}{a} \, \mathrm{d}\, S = \frac{\varrho v_0 z}{a} \int\limits_x \int\limits_y z \left(1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}\right)^{1/2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \, , \\ &= \frac{\varrho v_0 z}{a} \int\limits_x \int\limits_y z \frac{a}{z} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \varrho v_0 \int\limits_x \int\limits_y \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \varrho v_o \pi a^2 \; , \end{aligned}$$

der Fluss durch die Halbkugel ist genauso groß wie der Fluss durch die projizierte Fläche der Halbkugel, den Kreis.

Alternativ hätte man hier auch Kugelkoordinaten verwenden können mit den Winkeln als Parameter zur Darstellung der Kurve. Die Formulierung ist nicht wesentlich eleganter, da sich zwar die Fläche, nicht aber das Feld in Kugelkoordinaten geschickter darstellen lassen.

8. Gegeben ist das Feld $\vec{F} = (x, y, z)$. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Gauß'schen Satzes für eine zylindrische Oberfläche mit $x^2 + y^2 = 4$ und $0 \leq z \leq 4$.

Lösung: der Gauß'sche Satz (Divergenztheorem) ist

$$\int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int \nabla \cdot \vec{F} \, \mathrm{d}V \; . \tag{2}$$

Der Geometrie angemessen sind Zylinderkoordinaten. Für die rechte Seite dieser Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{RS} &= \int\limits_{\varrho=0}^{2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{4} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) \varrho \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int\limits_{\varrho=0}^{2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{4} 3\varrho \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\ &= 3 \cdot 4 \cdot 2\pi \cdot 2 = 48\pi \; . \end{aligned} \tag{3}$$

Zur Auswertung der linken Seite müssen wir das Integral in drei Teile zerlegen: die Mantelfläche des Zylinders mit $\Phi = x^2 + y^2 - 4$, die obere Deckfläche bei $z = 4$ und die untere bei $z = 0$. Auf den beiden Deckflächen ist der Normalenvektor jeweils parallel zur z-Achse, bei der oberen Deckfläche nach oben weisend, bei der unteren nach unten. Vom Produkt $\vec{F}\vec{n}$ bleibt jeweils $\pm z$ bestehen. Den Normalenvektor auf der Mantelfläche können wir durch Überlegen bestimmen. Er muss radial von der z-Achse weg weisen, d.h. er hat die Richtung $(x, y, 0)$. Da die Fläche, auf der dieser Vektor steht, einen Abstand von 2 von der z-Achse hat, muss gelten

$$\vec{n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \; . \tag{4}$$

Alternativ hätten wir den Normalenvektor auch bestimmen können als

$$\vec{n} = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} = \frac{2x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \; . \tag{5}$$

Das Produkt aus Feld und Normalenvektor wird damit

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \; . \tag{6}$$

Damit ergibt sich für die linke Seite von (2)

$$\begin{aligned} \mathrm{LS} &= \int \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \int\limits_{\mathrm{OD}} z\,\mathrm{d}S + \int\limits_{\mathrm{M}} 2\,\mathrm{d}S + \int\limits_{\mathrm{UD}} -z\,\mathrm{d}S \\ &= \int\limits_{\varrho=0}^{2}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} z\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho + \int\limits_{z=0}^{4}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 2\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z - \int\limits_{\varrho=0}^{2}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} z\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\varrho \\ &= 4\cdot 2\cdot 2\pi + 2\cdot 2\cdot 2\pi\cdot 4 - 0\cdot 2\cdot 2\pi = 16\pi + 32\pi = 48\pi\ , \end{aligned} \tag{7}$$

rechte und linke Seite stimmen also überein.

9. Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{F} = (-y, x, 1)$. Verifizieren Sie den Stokes'schen Satz für eine auf der xy-Ebene aufliegende Halbkugel mit $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

   Lösung: der Stokes'sche Satz besagt

$$\oint \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int \nabla\times\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S}\ . \tag{8}$$

   Die Halbkugel, und damit auch der Kreis, der sich in der xy-Ebene bildet, haben einen Radius von 2. Der Normalenvektor auf der Halbkugel ist damit gegeben als

$$\vec{n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ . \tag{9}$$

   Für das Linienintegral ist der Kreis in der xy-Ebene daher gegen den Uhrzeigersinn zu umlaufen. In Parameterform lässt sich der Kreis schreiben als

$$x = \cos\varphi \quad \text{und} \quad y = \sin\varphi \tag{10}$$

   mit $0 \le \varphi \le 2\pi$. Damit erhalten wir für das Feld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}\ , \tag{11}$$

   für $\vec{r}$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

   und für seine Ableitung nach dem Parameter φ

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\ . \tag{13}$$

   Die linke Seite von (8) wird damit

$$\begin{aligned} \mathrm{LS} &= \oint \vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\varphi}\mathrm{d}\varphi = \oint \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}\varphi \\ &= \oint (4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \oint 4\,\mathrm{d}\varphi = 8\pi\ . \end{aligned} \tag{14}$$

   Für die rechte Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{RS} &= \int \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\varrho=0}^{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\varrho=0}^{2} 2\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi = 8\pi\ . \end{aligned} \tag{15}$$