Kallenrode, www.sotere.uos.de

Übungsaufgaben Partielle Differentialgleichung – Wellengleichung

1. Ein an einer Seite eingespannter Stab soll als schwingende Saite mit einem offenen Ende angenähert werden. Lösen Sie die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \; . \tag{1}$$

(Wie) unterscheidet sich die Lösung von der für die schwingende Saite?

Lösung: die Differentialgleichung und ihre Lösung sind bereits von der schwingenden Saite aus der Vorlesung bekannt, der einzige Unterschied liegt in den Randbedingungen: während bei der schwingenden Saite beide Enden fest sind, ist beim schwingenden Stab nur ein Ende fest, das andere offen. Daher entspricht bei der Grundschwingung nicht $\lambda = 2l$ sondern $\lambda = 4l$. Als Randbedingung erhalten wir daher $A(0,t) = 0$ und $\partial A(l,t)/\partial x = 0$. Die letztere Randbedingung muss nicht zwingend formal hingeschrieben werden – es reicht auch aus, sich an der entsprechenden Stelle anschaulich klar zu machen, wie viele Schwingungsbäuche bzw. -knoten auf dem Stab entstehen können.
Aber jetzt die ausführliche Lösung. Analog zum in der Vorlesung vorgeführten machen wir einen Separationsansatz

$$A(x,t) = X(x)T(t) \; .$$

Einsetzen in (1) liefert

$$X''(t)T(t) = \frac{1}{c^2}X(x)T''(t) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} \; .$$

Da die linke Seite nur von x und die rechte nur von t abhängt, können beide nur dann für alle x und t gleich sein, wenn sie gleich einer Konstanten sind. Mit $-\beta^2$ als Separationskonstante erhalten wir die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen 2ter Ordnung

$$X''(x) + \beta^2 X(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad T''(t) + \beta^2 c^2 T(t) = 0 \; .$$

Beides sind Schwingungsgleichungen, d.h. wir erhalten mit $\omega = \beta c$ als Lösungen

$$X(x) = \gamma_1 \cos(\beta x) + \gamma_2 \sin(\beta x) \qquad \text{und} \qquad T(t) = \gamma_3 \cos(\omega t) + \gamma_4 \sin(\omega t) \; . \tag{2}$$

Einsetzen der Randbedingungen in die linke Gleichung liefert $\gamma_1 = 0$ (festes Ende) und damit für die Eigenmoden

$$X(x) = \gamma_2 \sin(\beta_n x) \qquad \text{mit} \qquad \beta_n = \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}$$

da es unendlich viele Moden für die Schwingung einer Saite mit Länge l gibt. Daher gibt es auch unendlich viele Schwingungsfrequenzen

$$\omega_n = \beta_n c = \frac{(2n+1)c\pi}{2l}$$

Für eine einzelne Lösung der partiellen DGL müssen wir den zeitlichen und räumlichen Anteil multiplizieren

$$A_n(x,t) = \left(\gamma_{3n}\cos\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}ct\right) + \gamma_{4n}\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}ct\right)\right)\gamma_{2n}\sin\left(\frac{\pi(1+2n)}{2l}x\right) \; .$$

Die Gesamtlösung ergibt sich durch Summation über alle Schwingungsmoden n zu

$$A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t) \; .$$

2. Eine elektromagnetische Welle im Vakuum wird durch die Wellengleichung

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{3}$$

beschrieben. Zeigen Sie, dass die harmonische Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \, \exp\left\{-\mathrm{i}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\right\} \tag{4}$$

mit $\vec{k}$ als dem Wellenvektor Lösung der Wellengleichung ist. (Hinweis: der Betrag des Wellenvektors ist das Reziproke der Wellenlänge, es gilt $\omega^2 = k^2 c^2$.)

Lösung: wenn (4) Lösung von (3) sein soll, dann muss (4) in (3) eingesetzt einen mathematisch korrekten Ausdruck liefern. Zum Einsetzen muss (4) zweimal nach der Zeit abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{E}_0 \, \exp\left\{-\mathrm{i}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\right\} (-\mathrm{i}\omega) \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= (-\mathrm{i}\omega)^2 \, \exp\left\{-\mathrm{i}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\right\} = -\omega^2 \vec{E} \, . \end{aligned} \tag{5}$$

Für die linke Seite von (3) muss der Laplace-Operator auf (4) angewendet werden. In kartesischen Koordinaten lässt sich (4) schreiben

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \, \exp\left\{-\mathrm{i}(\omega t - [x k_x + y k_y + z k_z])\right\} \, . \tag{6}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial z} \right) \vec{E}_0 \, \exp\left\{-\mathrm{i}(\omega t - [x k_x + y k_y + z k_z])\right\} \\ &= \vec{E}_0 \, \exp\left\{-\mathrm{i}(\omega t - [x k_x + y k_y + z k_z])\right\} \left(-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\right) \\ &= -k^2 \vec{E} \, . \end{aligned} \tag{7}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung (3) erhalten wir

$$-k^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \qquad \text{oder} \qquad \omega^2 = k^2 c^2 \, , \tag{8}$$

d.h. (4) ist Lösung der DGL.
Auch wenn die Aufgabe trivial erscheint, nehmen Sie sie bitte ernst – in den Klausuren haben sich teilweise sehr kreative Ableitungen gezeigt. Unglücklicherweise hat Differentiation allerdings eher was mit Regeln als mit Kreativität zu tun.

3. Lösen Sie die Schwingungsgleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \tag{9}$$

für eine rechteckige Membran mit den Seitenlängen a und b, die entlang der Seiten a (x-Achse) fest eingespannt ist.

Lösung: auch hier können wir auf die Vorlage aus der Vorlesung zurück greifen, der einzige Unterschied sind, wie in Aufgabe (2), die Randbedingungen. Zuerst Separation der räumlichen und zeitlichen Anteile mit dem Ansatz

$$A(x, y, t) = R(x, y) \, T(t) \, .$$

Einsetzen ind (9) liefert

$$\frac{1}{c^2} R(x, y) \, T''(t) = T(t) \left(\frac{\partial^2 R(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R(x, y)}{\partial y^2} \right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T''(t)}{c^2 \, T(t)} = \frac{R_{xx}(x, y) + R_{yy}(x, y)}{R(x, y)} \, .$$

Jetzt hängt die linke Seite nur von der Zeit, die rechte nur von den räumlichen Koordinaten ab. Beide Seiten können nur dann für alle x, y und t gleich sein, wenn sie gleich einer Konstanten sind. Mit der Separationskonstanten $-\beta^2$ erhalten wir daher zwei Gleichungen

$$T''(t) + \beta^2 c^2 T(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad R_{xx}(x,y) + R_{yy}(x,y) + \beta^2 R(x,y) = 0\,. \tag{10}$$

Die linke Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für eine Funktion $T(t)$. In ihr erkennen wir die Schwingungsgleichung wieder, die Lösungen können wir direkt aus Aufgabe (2) übernehmen:

$$T(t) = \gamma_1 \cos(\omega t) + \gamma_2 \sin(\omega t) \qquad \text{mit} \qquad \omega = \beta c\,.$$

Die rechte Gleichung in (10) ist eine partielle Differentialgleichung für die Funktion $R(x,y)$. Auch hier können wir einen Separationsansatz durchführen mit

$$R(x,y) = X(x)\,Y(y)\,.$$

Einsetzen in die rechte Gleichung von (10) liefert

$$X''(x)\,Y(y) + Y''(y)\,X(x) + \beta^2 X(x)\,Y(y) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \beta^2 = 0\,.$$

Auch diese Gleichung kann nur dann für alle x und y erfüllt sein, wenn die Ausdrücke X''/X und Y''/Y konstant sind. Mit $p^2 + q^2 = \beta^2$ als Separationskonstante ergeben sich die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$X'' + p^2 X = 0 \qquad \text{und} \qquad Y'' + q^2 Y = 0\,.$$

Beides sind Schwingungsgleichungen mit den Lösungen

$$X(x) = \gamma_3 \cos(px) + \gamma_4 \sin(px) \qquad \text{und} \qquad Y(y) = \gamma_5 \cos(qy) + \gamma_6 \sin(qy)\,.$$

Die Randbedingungen erfordern eine unterschiedliche Behandlung der beiden räumlichen Anteile: die Membran ist entlang der Seiten a (x-Achse und ihre Parallele) fest eingespannt. Für $y = 0$ und $y = b$ muss daher die Amplitude verschwinden, d.h. die Kosinus-Terme in der Lösung fallen weg, also ist $\gamma_5 = 0$. Außerdem können sich in y-Richtung nur Vielfache der halben Wellenlänge ausbilden, so dass wie bei der schwingenden Saite gilt

$$q_n = \frac{n\pi}{b}\,.$$

Damit ergibt sich

$$Y(y) = \gamma 6 \sin\frac{n\pi y}{b}\,.$$

Entlang der Seiten b (y-Achse und ihre Parallele) kann die Membran frei schwingen, d.h. die Amplitude auf diesen Rändern muss nicht verschwinden, so dass auch die Kosinus-Terme nicht zwingend verschwinden und es ist

$$X(x) = \gamma_3 \cos\frac{m\pi y}{a} + \gamma 4 \sin\frac{m\pi y}{a}\,,$$

da beide Enden offen sind und sich daher über die Seitenlänge wieder minimal eine halbe Wellenlänge ausbilden kann.
Für $\omega = \beta c$ gilt dann

$$\omega_{nm} = \beta_{nm} c = c\sqrt{p_m^2 + q_n^2} = c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \pi c\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\,.$$

Für eine einzelne Schwingungsmode ergibt sich dann

$$A_{mn}(x,y,t) \quad = \quad X_m(x)\,Y_y(y)\,T(t)$$

$$= \left(\gamma_3 \cos\frac{m\pi y}{a} + \gamma 4 \sin\frac{m\pi y}{a}\right) \gamma 6 \sin\frac{n\pi y}{b} \left(\gamma_1 \cos(\pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} t) + \gamma_2 \sin(\pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} t)\right)$$

Die Gesamtlösung ergibt sich durch Überlagerung der einzelnen Schwingungsmoden:

$$A(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{nm}(x,y,t) \; .$$

Die Summation über m läuft von Null, da sich entlang der x-Achse keine Schwingung ausbilden muss: dann schwingt die Membran wie eine Saite mit endlicher Breite. Ob dieser Fall auftritt, hängt von den Anfangsbedingungen ab: ist die anfängliche Auslenkung unabhängig von x, so tritt dieser Fall ein.

4. Als Beispiel für die Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung haben wir bisher die schwingende Rechteckmembran betrachtet: eine Membran (oder Platte), die an allen Außenseiten eingespannt ist. Aus der Einführung der Experimentalphysik sind Ihnen die Chladni'schen Klangfiguren bekannt: die Knotenlinien, die sich ergeben bei einer Platte, die an den Außenkanten frei schwingen kann aber in der Mitte eingespannt ist.
Um alle sich ergebenden Figuren beschreiben zu können, wurde aus mathematischen Gründen die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \kappa^2 \left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 A}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \, \partial y^2} \right) \tag{11}$$

eingeführt mit L als der Seitenlänge der quadratischen Platte. Zeigen Sie, dass der räumliche Anteil dieser DGL durch den Ausdruck

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L}\right) - \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) = R(x,y) \tag{12}$$

gegeben ist.
Ist dieser Ausdruck auch die Lösung des räumlichen Anteils der allgemeinen zwei-diemensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) ? \tag{13}$$

Wenn ja, warum löst man dann die Wellengleichung nicht direkt entsprechend der der Rechteckmembran? Wenn nein, wie unterscheidet sich die physikalische Situation bei Chladni von der der Rechteckmembran, so dass eine andere Differentialgleichung erforderlich wird? (Hinweis: zur Beantwortung der letzten Frage machen Sie sich klar, welche Muster sich ergeben und wie Sie die Randbedingungen formulieren müssten − insbesondere die am festgelegten Punkt in der Plattenmitte. Die Figuren und die Lösung finden Sie u.a. unter http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/modelling/chladni/; dort ist (12) gleich null gesetzt, da die Knotenlinien sich genau dann ergeben, wenn die Amplitude verschwindet.)

Lösung: das physikalische Problem erscheint nicht von der schwingenden Membran verschieden: es sind doch nur andere Randbedingungen (feste Plattenmitte, die Ränder können frei schwingen). Die aus mathematischen Gründen vorgeschlagene Differentialgleichung dagegen unterscheidet sich deutlich von der Wellengleichung: sie ist vierter Ordnung statt wie die 2D Wellengleichung nur zweiter Ordnung und sie ist nicht-linear, da sie die gemischten Ableitungen enthält. Daher ist es nicht möglich, den räumlichen Anteil dieser DGL entsprechend der beiden Koordinaten zu separieren.
Räumliche und zeitliche Anteile dagegen lassen sich wie bei der 2D Wellengleichung separieren. Dazu machen wir wieder den Ansatz

$$A(x,y,t) = T(t) \, R(x,y) \tag{14}$$

und setzen in die DGL (11) ein:

$$R(x,y)\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \kappa^2 T(t)\left(\frac{\partial^4 R}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 R}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 R}{\partial x^2\,\partial y^2}\right) . \tag{15}$$

Separation wie bei der Rechteckmembran mit einer Spearationskonstanten $-\beta^2$ liefert dann die beiden DGLs

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \beta^2\kappa^2 T \\ 0 &= \frac{\partial^4 R}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 R}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 R}{\partial x^2\,\partial y^2} + R\beta^2 . \end{aligned} \tag{16}$$

Die erste DGL ist die ganz normale Schwingung, sie interessiert uns nicht, da wir uns in der Aufgabe nur mit dem räumlichen Anteil beschäftigen sollen. Dazu leiten wir (12) ab. Die zweite Ableitung des Kosinus ergibt einen negativen Kosinus multipliziert mit dem Quasrat der inneren Ableitung, die vierte Ableitung des Kosinus ergibt den Kosinus multipliziert mit der inneren Ableitung hoch 4:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 R}{\partial x^4} &= \cos\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \\ \frac{\partial^4 R}{\partial y^4} &= \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 - \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \\ \frac{\partial^4 R}{\partial x^2\,\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right) \\ &= \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \end{aligned} \tag{17}$$

Einsetzen in die DGL (11) liefert für die rechte Seite

$$\begin{aligned} -\beta^2 R &= \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right) \\ &\quad - \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\left(\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) \\ &= \left(\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) R \end{aligned} \tag{18}$$

und damit

$$-\beta^2 = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 , \tag{19}$$

d.h. Gleichung (12) löst Gleichung (11) für den Fall, dass die Separationskonstante der obigen Bedingung gehorcht. Um zu überprüfen, ob dies sinnvoll ist, vergleichen wir nochmals mit der schwingenden Rechteckmembran: dot hatten wir als Lösung erhalten

$$\beta_{nm} = \sqrt{p^2+q^2} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \quad \text{mit} \quad n = 1,2,3\dots\ , m = 1,2,3\dots\ , \tag{20}$$

d.h. einen Ausdruck, der ebenfalls von den Quotienten $n\pi/L$ und $m\pi/L$ abhängen würde (bei quadratischer Geometrie). Die höheren Ordnungen und das gemischte Produkt sind in Anbetracht der komplizierteren Differentialgleichung konsequent.

Überprüfen wir dann, ob (12) auch eine sinnvolle Lösung des räumlichen Anteils der 2D-Wellengleichung sein kann. Dazu verwenden wir den räumlichen Anteil der DGL von Blatt 6

$$\frac{\partial^2 R(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R(x,y)}{\partial y^2} + \beta^2 R(x,y) = 0 . \tag{21}$$

Wir benötigen also jeweils die zweiten Ableitungen von (12)

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = -\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \quad = \quad -\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)\right) \ . \tag{22}$$

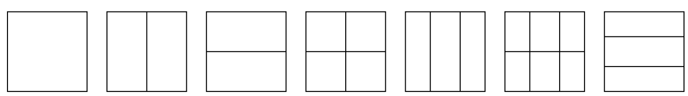
Einsetzen in (21) liefert

$$\begin{aligned} -\beta^2 R \quad &= \quad -\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L}\right)\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right) - \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right)\right) \\ &= \quad -R\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{23}$$

bzw.

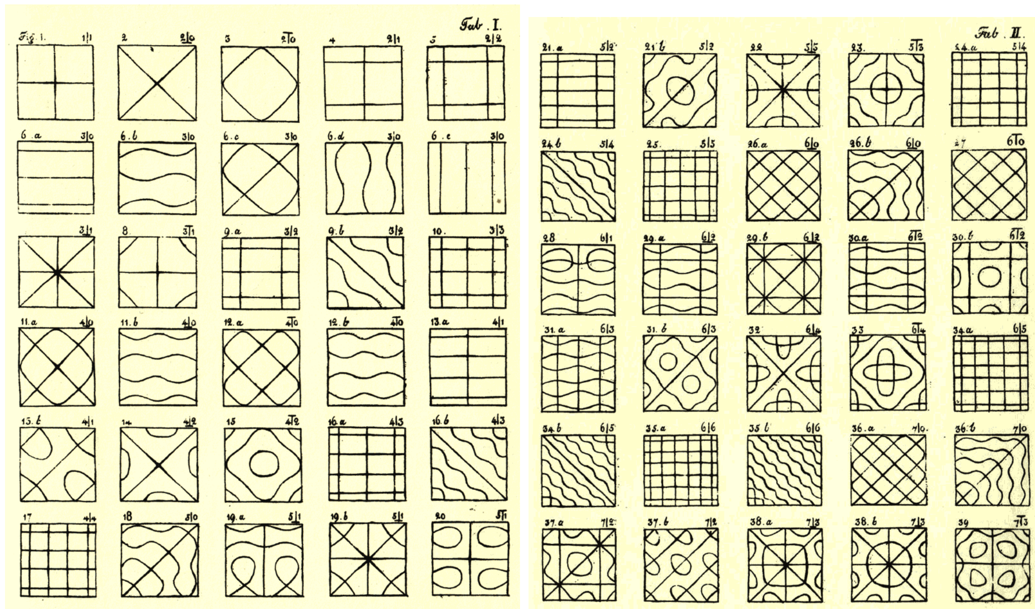
$$\beta^2 = \left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right) \ . \tag{24}$$

Das entspricht der Separationskonstante bei der Rechteckmembran – mit dem Unterschied, dass wir uns an dieser Stelle noch nicht auf die positive Wurzel festgelegt haben.
Wenn die durch (12) beschriebenen Knotenlinien Lösungen beider DGLs sind, bleibt noch die Frage, welche DGL das physikalische Problem korrekt beschreibt. Das ist natürlich die Wellengleichung, da die Physik einer schwingenden Rechteckplatte unabhängig davon sein sollte, ob diese an den Rändern eingespannt sit oder in der Mitte befestigt ist mit freien Rändern. Die partielle Differentialgleichung (11) ist historisch gesehen nur ein mathematisches Konstrukt gewesen, um eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Knotenlinien zu erhalten. Das mag erstaunen, da wir die DGL für Rechteckmembran ja problemlos lösen konnten. Das problem bei Chladni liegt in den Randbedingungen, die es schwer machen, eine geschlossene Lösung zu finden. Für die Rechteckmenbran haben wir gefordert, dass die Wellenlänge der Schwingungen in beide Richtungen jeweils ein Vielfaches der doppelten Seitenlänge sein muss. Dann ergeben sich Knotenlinien der folgenden Art (der Rand ist jeweils auch Knotenlinie):



Abgesehen vom festen Rand kann ein Teil dieser Knotenlinienmuster auch als Chladnische Klangfigur auftreten – wofern die Knotenlinien durch das Zentrum der Platte geht. Für diese Geometrien lassen sich die Randbedingungen so definieren, dass man sie aus der Lösung der Wellengleichung völlig analog zur Rechteckmembran gewinnen kann – die Schwingung muss nur so verschoben sein, dass der Mittelpunkt der Platte in Ruhe bleibt, also Kosinus statt Sinus. Das erkennt man auch, wenn man die formalen Lösungen der Rechteckmembran betrachtet.

Allerdings treten bei Chladni noch etliche weitere Muster auf, die keinerlei Analogie in den mit der Rechteckmembran erzeugten Mustern finden:



Allerdings tritt eine Vielzahl von weiteren Mustern auf. Die einfachsten sind vielleicht die, bei denen die Knotenlinie diagonal verläuft. Betrachten wir die beiden gekreuzten Diagonalen (Teilbild 2): damit diese Knotenlinien entstehen können, müssen benachbarte Dreiecke jeweils in Gegenrichtung ausgelenkt werden. Dann müssen die beiden einander gegenüber liegenden Dreiecke jedoch in gleicher Richtung ausgelenkt werden. Betrachten wir dann einen Schnitt entlang einer Parallelen zur x-Achse durch den Mittelpunkt der Platte, so wird das Problem der Definition der Anfangsbedingungen deutlich: hier reicht kein Kosinus zur Beschreibung der Auslenkung sondern es muss jeweils auf beiden Seiten der Aufhängung gleiches Vorzeichen vorhanden sein, d.h. wir müssten das Vorzeichen geeignet modifizieren. Das eigentliche Problem bei der Lösung der Wellengleichung zur Beschreibung der Chladni-Figuren besteht also darin, eine allgemeine Formulierung für die Randbedingungen zu finden. Da dies über Jahrzehnte nicht gelang, hat man zumindest mal eine Differentialgleichung zur Beschreibung der Knotenlinien eingeführt, eben (11).

Insgesamt haben Sie jetzt drei sehr unterschiedliche Anwendungen für die 2D Wellengleichung kennen gelernt:

- rechteckige Platte, an den Kanten eingespannt (Rechteckmembran): rechentechnisch trivial, Eigenschwingungen;
- runde Membran: Ansatz (Separation) ähnlich, führt jedoch auf Besselfunktionen;
- rechteckige Platte, in der Mitte eingespannt und an den Kanten frei schwingend: im Prinzip wie die Rechteckmembran, liefert ebenfalls elementare Winkelfunktionen als Lösung, auf Grund der Probleme beim Aufstellen der Randbedingungen aber keine allgemeine Lösung.