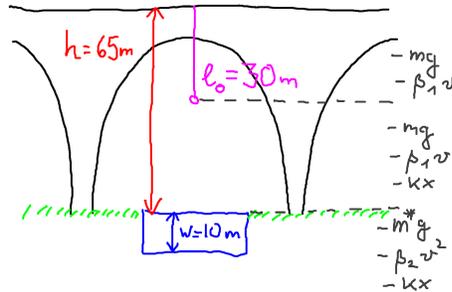


Übungsaufgabe Differentialgleichung Fallbeispiele

- Ein Adrenalin-Junkie (Massenpunkt mit der Masse m) steht auf einer Brücke mit der Höhe h_B ; unter der Brücke befindet sich ein Fluss mit einer Wassertiefe w . Der Adrenalin-Junkie ist mit einem an der Brücke befestigten elastischen Seil der Länge l_0 verbunden – das Seil hat die gleichen mechanischen Eigenschaften wie eine Feder, insbesondere ist die rücktreibende Kraft linear von der Auslenkung abhängig mit einer ‘Federkonstanten’ k .



Das Setting erinnert an Bungee-Jumping – aber Bungee-Jumping war gestern und ist für einen richtigen Adrenalin-Junkie viel zu langweilig. Daher ist das Seil so bemessen, dass der Springer vor Erreichen der Wasseroberfläche nicht vollständig abgestoppt wird sondern in das Wasser eintaucht.

Die Bewegung des Springers besteht daher aus drei Phasen:

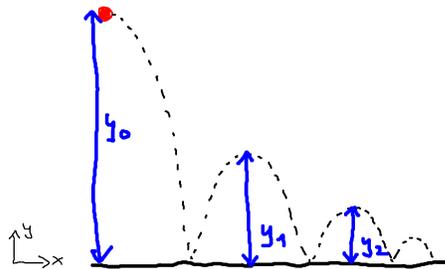
- I** Fall von der Brücke unter Einwirkung der Gravitationskraft $-mg$ und der Reibungskraft $-\beta_1 v$;
- II** der weitere Fall in der Luft bis zur Wasseroberfläche weiterhin unter Einwirkung der Gravitationskraft $-mg$, der Reibungskraft $-\beta_1 v$ sowie zusätzlich der vom Seil ausgeübten rücktreibenden Kraft $-kx$.
- III** der Fall nach Eintauchen in das Wasser unter Einwirkung einer (um den Auftrieb) reduzierten Gewichtskraft $-m^*g$, einer Reibungskraft $-\beta_2 v^2$ sowie der rücktreibenden Kraft $-kx$.

Ihre Aufgabe besteht darin, die Parameter so zu bestimmen, dass der Adrenalin-Kick maximal wird (hohe Fluggeschwindigkeit, tiefes Eintauchen in den Fluss), der Springer aber trotzdem eine von Null verschiedene Überlebenschance hat.

- (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für Phase I auf – versuchen Sie es mit einer für die Lösung möglichst ökonomischen Form. Klassifizieren Sie die Differentialgleichung. Bestimmen Sie deren allgemeine Lösung sowie die spezielle Lösung für die hier gegebenen Anfangsbedingungen.
- (b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit am Ende von Phase I. Diese, sowie der Ort am Ende von Phase I sind zugleich die Anfangsbedingungen für Phase II der Bewegung.
- (c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für Phase II auf. Klassifizieren Sie diese. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung sowie die spezielle Lösung für die Anfangsbedingungen.¹
- (d) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit beim Auftreffen auf die Wasseroberfläche (je lauter das Platsch, um so mehr Fun?). Auch hier gilt: diese Geschwindigkeit sowie der Ort am Ende von Phase II sind die Anfangsbedingungen für Phase III.

¹Falls Sie aus irgendeinem Grund keine Anfangsbedingungen haben, verwenden Sie jeweils v_{0i} und x_{0i} als Anfangsbedingungen für die i te Phase der Bewegung.

- (e) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für Phase III auf und klassifizieren Sie diese. Bestimmen Sie wieder die allgemeine Lösung sowie die spezielle Lösung für die gegebenen Anfangsbedingungen.
- (f) Nachdem die Bewegung verstanden und beschrieben ist, gilt es zu optimieren. Die Geometrie ist vorgegeben mit einer Brückenhöhe h_B von 65 m über der Wasseroberfläche und einer Wassertiefe w von 8 m. Der Reibungskoeffizient beträgt $\beta = 1 \text{ kg/s}$ bzw. nach dem Eintauchen in das Wasser $\gamma = 2 \text{ kg/m}$. Bestimmen Sie k (gegebenenfalls durch Nullstellensuche oder indem Sie einfach nur die Bedingung formulieren) so, dass der Springer gerade vor Erreichen der Sohle des Flusses abgebremst wird. Bestimmen Sie ferner ein k für einen etwas wasserscheuen Springer, der vor Erreichen der Wasseroberfläche abgebremst werden möchte.
2. Springender Ball: ein Ball fällt aus einer Höhe y_0 auf den Boden; seine Anfangsgeschwindigkeit ist $v_0 = 0$. Da der Ball elastisch ist, wird er reflektiert. Die horizontale Komponente der Bewegung ist durch $x_0 = 0$ und $v_x = \text{const}$ beschrieben. Betrachten Sie zwei Fälle:
- (a) der Ball fällt unter Einwirkung von Reibung und wird ohne Energieverlust am Boden reflektiert.



- Stellen Sie für eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft $-\beta v$ die Bewegungsgleichung auf. Bestimmen Sie deren allgemeine Lösung.
 - Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingung.
 - Bestimmen Sie aus der Bewegungsgleichung die Zeit, zu der der Ball den Boden trifft.
 - Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den weiteren Verlauf der Bewegung auf. Was sind die Anfangsbedingungen in diesem Abschnitt der Bewegung? Bestimmen Sie die allgemeine Lösung sowie die spezielle Lösung für diese Anfangsbedingungen.
 - Bestimmen Sie die Höhe y_1 , bis zu der der Ball nach der ersten Reflexion am Boden gelangt.
 - Versuchen Sie, eine allgemeine Beschreibung für die weiteren Maxima y_i anzugeben.
 - Wie verändert sich die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Maxima (bzw. zwischen zwei Reflexion am Boden) im Laufe der Bewegung?
 - Skizzieren Sie die vertikale Bewegung im Phasenraum. Erläutern Sie ihre Skizze.
- (b) der Ball fällt ohne Einwirkung von Reibung, allerdings ist die Reflexion am Boden mit einem Energieverlust verbunden; die horizontale Komponente der Bewegung vernachlässigen wir. Dazu machen wir uns ein detailliertes Modell des Balls:



im freien Fall besteht der Ball aus einer Masse m und einer entspannten Feder mit Federkonstanten k . Bei der Kompression der Feder geht Energie durch Reibung verloren; auch hier gilt wieder $-\beta v$ für die Reibungskraft. Die Bewegung lässt sich in zwei Phasen zerlegen: freier Fall (wieder mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit) aus der Anfangshöhe y_0 bis der Ball gerade den Boden berührt und anschließende Kompression/Entspannung der Feder, bis der Ball sich in der Aufwärtsbewegung wieder vom Boden löst.

- i. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf für die verschiedenen Phasen der Bewegung auf. Wie unterscheidet sich die Bewegungsgleichung während der Reflektion am Boden von der des Federpendels (oder anders formuliert: warum beginnt der Ball nicht am Boden hin und her zu schwingen)? Was sind die Anfangsbedingungen für die zweite Phase der Bewegung.
- ii. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen allgemein und für die gegebenen Anfangsbedingungen.
- iii. Skizzieren Sie auch hier die Bewegung im Phasenraum und erläutern Sie Ihre Skizze.