

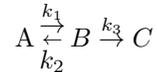
Übungsaufgaben Gekoppelte Differentialgleichungen

1. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 3x = 0$$

mit Hilfe einer Potenzreihe.

2. Die Ratengleichungen für eine chemische Reaktion



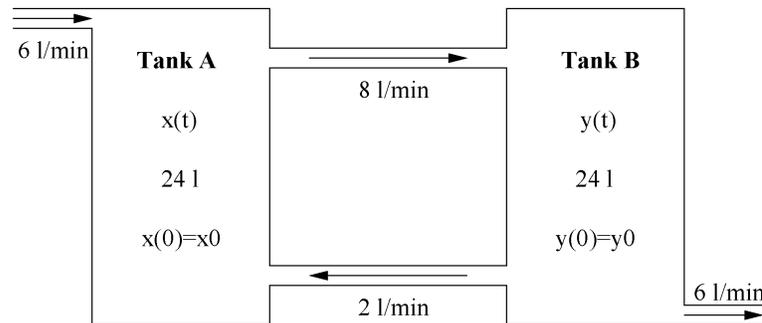
sind gegeben durch

$$\frac{dA}{dt} = -k_1 A + k_2 B, \quad \frac{dB}{dt} = k_1 A - (k_2 + k_3) B \quad \text{und} \quad \frac{dC}{dt} = k_3 B.$$

Lösen Sie dieses System gekoppelter DGLs für den Spezialfall $k_1 = k_3 = 2$ und $k_2 = 1$ mit den Anfangsbedingungen $A(0) = A_0$ und $B(0) = C(0) = 0$. Nebenbemerkung: die Summe der Gleichungen ergibt $d(A + B + C)/dt = 0$. Was bedeutet das physikalisch?

3. **System gewöhnlicher DGLs:**

Zwei Tanks, die jeweils 24 l Flüssigkeit enthalten, sind durch zwei Rohre miteinander verbunden:



Durch diese fließt Flüssigkeit von A nach B mit einer Rate von 8 l/min, von B nach A mit einer Rate von 2 l/min. Innerhalb jedes Tanks ist die Flüssigkeit gut durchmischt. In Tank A fließt zusätzlich reines Wasser mit einer Rate von 6 l/min, die Mischung wird aus Tank B entnommen, ebenfalls mit einer Rate von 6 l/min. Zur Zeit $t = 0$ enthält Tank A x_0 Salz, Tank B y_0 kg. Das zugehörige Gleichungssystem auf für die Masse des Salzes in Tanks A ($x(t)$) und B ($y(t)$) ist

$$\dot{x} = \frac{2}{24}y - \frac{8}{24}x = \frac{y}{12} - \frac{x}{3} \quad \text{und} \quad \dot{y} = \frac{8}{24}x - \frac{2}{24}y = \frac{x}{3} - \frac{y}{3}.$$

Lösen Sie das Gleichungssystem Welche Lösung erhalten Sie für $t \rightarrow \infty$?

4. Der harmonische Oszillator $\ddot{x}m + kx = 0$ wird durch eine DGL zweiter Ordnung beschrieben. Zerlegen Sie diese DGL in ein System von gekoppelten DGLs erster Ordnung und lösen Sie dieses Eigenwertproblem.
5. Gekoppelte Fadenpendel: zwei Fadenpendel der Länge l und der Masse m schwingen in einer Ebene und sind durch eine Feder mit der Federkonstante k verbunden. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie sie.