

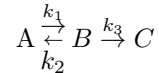
## Übungsaufgaben Gekoppelte Differentialgleichungen

1. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 3x = 0$$

mit Hilfe einer Potenzreihe.

2. Die Ratengleichungen für eine chemische Reaktion



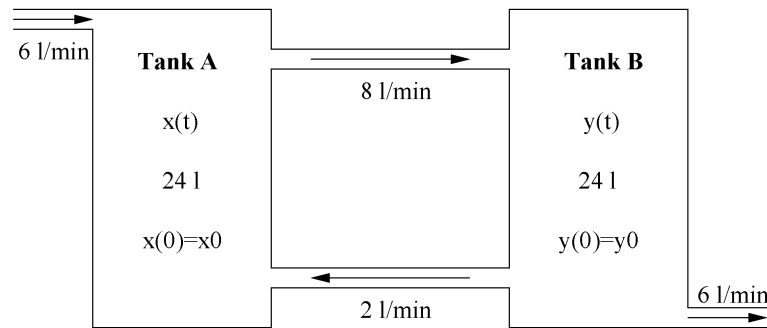
sind gegeben durch

$$\frac{dA}{dt} = -k_1 A + k_2 B, \quad \frac{dB}{dt} = k_1 A - (k_2 + k_3) B \quad \text{und} \quad \frac{dC}{dt} = k_3 B.$$

Lösen Sie dieses System gekoppelter DGLs für den Spezialfall  $k_1 = k_3 = 2$  und  $k_2 = 1$  mit den Anfangsbedingungen  $A(0) = A_0$  und  $B(0) = C(0) = 0$ . Nebenbemerkung: die Summe der Gleichungen ergibt  $d(A + B + C)/dt = 0$ . Was bedeutet das physikalisch?

3. **System gewöhnlicher DGLs:**

Zwei Tanks, die jeweils 24 l Flüssigkeit enthalten, sind durch zwei Rohre miteinander verbunden:



Durch diese fließt Flüssigkeit von A nach B mit einer Rate von 8 l/min, von B nach A mit einer Rate von 2 l/min. Innerhalb jedes Tanks ist die Flüssigkeit gut durchmischt. In Tank A fließt zusätzlich reines Wasser mit einer Rate von 6 l/min, die Mischung wird aus Tank B entnommen, ebenfalls mit einer Rate von 6 l/min. Zur Zeit  $t = 0$  enthält Tank A  $x_0$  Salz, Tank B  $y_0$  kg. Das zugehörige Gleichungssystem auf für die Masse des Salzes in Tanks A ( $x(t)$ ) und B ( $y(t)$ ) ist

$$\dot{x} = \frac{2}{24}y - \frac{8}{24}x = \frac{y}{12} - \frac{x}{3} \quad \text{und} \quad \dot{y} = \frac{8}{24}x - \frac{2}{24}y = \frac{x}{3} - \frac{y}{3}.$$

Lösen Sie das Gleichungssystem Welche Lösung erhalten Sie für  $t \rightarrow \infty$ ?

4. Der harmonische Oszillator  $\ddot{x} + kx = 0$  wird durch eine DGL zweiter Ordnung beschrieben. Zerlegen Sie diese DGL in ein System von gekoppelten DGLs erster Ordnung und lösen Sie dieses Eigenwertproblem.
5. Gekoppelte Fadenpendel: zwei Fadenpendel der Länge  $l$  und der Masse  $m$  schwingen in einer Ebene und sind durch eine Feder mit der Federkonstante  $k$  verbunden. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie sie.