Übungsaufgaben Matrizen

1. Betrachten Sie ein Koordinatensystem mit orthonormierten Basisvektoren. Bilden Sie aus diesen Basisvektoren eine Matrix $\mathtt{A}$. Diese Matrix ist eine orthogonale Matrix.

   (a) Zeigen Sie, dass mit dieser 'Bauvorschrift' für die Matrix gelten muss
   $$\mathtt{A}\mathtt{A}^T = \mathtt{E}\;,$$
   d.h. das Produkt aus Matrix und transponierter Matrix ergibt die Einheitsmatrix.

   (b) Spielt es dabei eine Rolle, ob die Basisvektoren als die Zeilen oder Spalten der Matrix verwendet werden? Begründen Sie!

   (c) Gilt diese Aussage auch für orthogonale Basisvektoren, d.h. Basisvektoren, die zwar paarweise orthogonal sind aber nicht auf die Länge 1 normiert? Begründen Sie!

   (d) Überprüfen Sie, ob die aus den Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten,
   $$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\;, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   gebildete Matrix wirklich die Bedingung $\mathtt{A}\mathtt{A}^T = \mathtt{E}$ erfüllt.

2. Gegeben sind die Matrizen
   $$\mathtt{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\;; \quad \mathtt{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathtt{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\;.$$
   Bestimmen Sie daraus die folgenden Größen: $\mathtt{D} = 2\mathtt{A} - \mathtt{B} - \mathtt{C}$, $\mathtt{E} = (\mathtt{A} + 2\mathtt{B})\mathtt{C}$ sowie $\mathtt{F} = 2\mathtt{AC} + 5\mathtt{BC}$.

3. Gegeben ist die Drehmatrix
   $$\mathtt{D} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\;.$$
   Diese Matrix beschreibt eine Drehung um $\pi/4$ um die z-Achse. Zeigen Sie, dass sich die Länge eines beliebigen Vektors $\vec{v}$ bei der Drehung nicht ändert, d.h.
   $$|\vec{v}| = |\mathtt{D}\vec{v}|\;.$$
   Zeigen Sie ebenso, dass sich der Abstand zwischen zwei Punkten durch die Rotation nicht ändert, d.h.
   $$|\vec{p} - \vec{q}| = |\mathtt{D}\vec{p} - \mathtt{D}\vec{q}|\;.$$
   Können Sie dies auch für eine allgemeine Drehmatrix zeigen?

4. Gegeben sind zwei Vektoren $a = (a_{1n})$ und $b = (b_{n1})$. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt gleich der Spur des dyadischen Produkts ist. Überprüfen Sie Ihr allgemeines Ergebnis am Beispiel der Vektoren
   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\;.$$

5. Überprüfen Sie, ob die folgenden Gleichungssysteme eindeutig lösbar sind:

$$\begin{array}{c} 4x + 5y = 0 \\ 5x + 4y = 2 \end{array}, \qquad \begin{array}{c} 4x + 5y = 0 \\ 5x - 4y = 2 \end{array}, \qquad \begin{array}{c} 3x + 2y = 0 \\ 6x + 4y = 2 \end{array}, \qquad \begin{array}{c} 2w - 2x - 3y + 2z = 3 \\ 3w - 0x - 0y + 0z = 5 \\ 4w - 5x + 2y + 3z = 8 \\ 3w - 2x - 5y - 6z = 2 \end{array}.$$

   Hängt die Entscheidung von den jeweils rechten Seiten der Gleichungssysteme ab?

6. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{array}$$

   (a) Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe der Cramer'schen Regel.
   (b) Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe des Inversen der Koeffizientenmatrix.

7. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$\mathtt{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathtt{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$