Übungsaufgaben Matrizen

1. Betrachten Sie ein Koordinatensystem mit orthonormierten Basisvektoren. Bilden Sie aus diesen Basisvektoren eine Matrix $\mathtt{A}$. Diese Matrix ist eine orthogonale Matrix.

   (a) Zeigen Sie, dass mit dieser 'Bauvorschrift' für die Matrix gelten muss
   $$\mathtt{AA}^T = \mathtt{E}\,,$$
   d.h. das Produkt aus Matrix und transponierter Matrix ergibt die Einheitsmatrix.

   (b) Spielt es dabei eine Rolle, ob die Basisvektoren als die Zeilen oder Spalten der Matrix verwendet werden? Begründen Sie!

   (c) Gilt diese Aussage auch für orthogonale Basisvektoren, d.h. Basisvektoren, die zwar paarweise orthogonal sind aber nicht auf die Länge 1 normiert? Begründen Sie!

   (d) Überprüfen Sie, ob die aus den Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten,
   $$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   gebildete Matrix wirklich die Bedingung $\mathtt{AA}^T = \mathtt{E}$ erfüllt.

   Lösung: (a) wenn wir das Produkt der Matrizen über Zeilen- und Spaltenvektoren formulieren, lässt sich das Produkt einer aus den Basisvektoren $\vec{e}_i$ als Spaltenvektoren gebildeten Matrix mit ihrer Transponierten schreiben als
   $$\mathtt{AA}^T = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1^T \\ \vec{e}_2^T \\ \vdots \\ \vec{e}_n^T \end{pmatrix} = \sum \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i^T\,.$$
   Dabei sind in der transponierten Matrix die Basisvektoren $\vec{e}_i$ ebenfalls transponiert, da sie ja keine Spaltenvektoren sondern Zeilenvektoren bilden sollen. Das Produkt $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i^T$ ist formal das Produkt aus einer $n \times 1$ und einer $1 \times n$-Matrix; damit ergibt sich eine $n \times n$-Matrix, bei der nur das Element an der Stelle i, i eine 1 ergibt und alle anderen verschwinden. Die Summe[1] über diese Matrizen gibt wie gefordert die Einheitsmatrix. Da die Basisvektoren orthonormiert sind, ist $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^T = \delta_{ij}$. Damit wird $\mathtt{AA}^T = (\delta_{ij}) = \mathtt{E}$ wie gefordert die Einheitsmatrix.
   (b) nein; Interpretieren wir die Basisvektoren $\vec{e}_i$ nicht als Spalten- sondern als Zeilenvektoren, so ist
   $$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1^T & \vec{e}_2^T & \dots & \vec{e}_n^T \end{pmatrix} = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^T) = (\delta_{ij})\,.$$
   (c) Nein, ein Gegenbeispiel reicht, z.B. ein kartesisches System, in dem einer der Basisvektoren die Länge 2 hat:
   $$\vec{b}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \vec{b}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \vec{b}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

[1] Die Summe bedarf vielleicht der Erläuterung: das Produkt aus Zeilen- und Spaltenvektor ist ein Skalarprodukt bzw. dessen formales Äquivalent.

Das Produkt aus Matrix und Transponierter wird

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

ist also von der Einheitsmatrix verschieden.
(d) einfaches Einsetzen als Übung für Matrixmultiplikation (das Produkt steht auch schon auf der letzten Folie von Vorlesung 5)

$$\begin{aligned} \mathtt{AA}^T &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathtt{E}\ .\checkmark \end{aligned}$$

2. Gegeben sind die Matrizen

$$\mathtt{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \mathtt{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathtt{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie daraus die folgenden Größen: $\mathtt{D} = 2\mathtt{A} - \mathtt{B} - \mathtt{C}$, $\mathtt{E} = (\mathtt{A} + 2\mathtt{B})\mathtt{C}$ sowie $\mathtt{F} = 2\mathtt{AC} + 5\mathtt{BC}$.

Lösung: Matrix $\mathtt{D}$ lässt sich nicht bestimmen, da $\mathtt{C}$ nicht die gleiche Form hat wie $\mathtt{A}$ und $\mathtt{B}$. Da können wir nur den ersten Teil ausführen:

$$\mathtt{D}_{\mathrm{T1}} = 2\mathtt{A} - \mathtt{B} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & -3 \\ 3 & -4 & -4 \\ -9 & -6 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die anderen Matrizen sind mathematisch korrekte Ausdrücke; wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathtt{E} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 10 & -7 & -18 \\ 28 & 18 & 7 & -3 \\ 31 & 0 & 15 & -16 \\ 19 & 16 & -4 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathtt{F} &= 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 34 & 28 & -14 & -20 \\ 12 & 20 & 2 & 10 \\ 10 & -8 & 18 & 0 \\ -6 & -16 & 0 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -10 & 0 & -20 \\ 55 & 20 & 15 & -20 \\ 65 & 10 & 15 & -40 \\ 55 & 60 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 18 & -14 & -40 \\ 67 & 40 & 17 & -10 \\ 75 & 2 & 33 & -40 \\ 49 & 44 & -10 & -15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Gegeben ist die Drehmatrix

$$\mathtt{D} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix beschreibt eine Drehung um $\pi/4$ um die z-Achse. Zeigen Sie, dass sich die Länge eines beliebigen Vektors $\vec{v}$ bei der Drehung nicht ändert, d.h.

$$|\vec{v}| = |\mathtt{D}\vec{v}| \ .$$

Zeigen Sie ebenso, dass sich der Abstand zwischen zwei Punkten durch die Rotation nicht ändert, d.h.

$$|\vec{p} - \vec{q}| = |\mathtt{D}\vec{p} - \mathtt{D}\vec{q}| \ .$$

Können Sie dies auch für eine allgemeine Drehmatrix zeigen?

Lösung: Erhaltung der Länge des Vektors mit der gegebenen Matrix lässt sich durch Hinschreiben zeigen

$$\begin{aligned}
|\mathtt{D}\,\vec{v}| &= \left| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} v_1/\sqrt{2} + v_2/\sqrt{2} \\ -v_1/\sqrt{2} + v_2/\sqrt{2} \\ v_3 \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{(v_1/\sqrt{2} + v_2/\sqrt{2})^2 + (-v_1/\sqrt{2} + v_2/\sqrt{2})^2 + v_3^2} \\
&= \sqrt{v_1^2/2 + v_1 v_2/2 + v_2^2/2 + v_1^2/2 - v_1 v_2/2 + v_2^2/2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = |\vec{v}| \ .
\end{aligned}$$

Für den Abstand zwischen den beiden Punkten erhalten wir entsprechend:

$$\begin{aligned}
|\mathtt{D}\vec{p} - \mathtt{D}\vec{q}| &= \left| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} p_1/\sqrt{2} + p_2/\sqrt{2} \\ -p_1/\sqrt{2} + p_2/\sqrt{2} \\ p_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1/\sqrt{2} + q_2/\sqrt{2} \\ -q_1/\sqrt{2} + q_2/\sqrt{2} \\ q_3 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} p_1/\sqrt{2} + p_2/\sqrt{2} - q_1/\sqrt{2} - q_2/\sqrt{2} \\ -p_1/\sqrt{2} + p_2/\sqrt{2} + q_1/\sqrt{2} - q_2/\sqrt{2} \\ p_3 - q_3 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} (p_1 - q_1)/\sqrt{(2)} + (p_2 - q_2)/\sqrt{2} \\ -(p_1 - q_1)/\sqrt{2} + (p_2 - q_2)/\sqrt{2} \\ p_3 - q_3 \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2} = |\vec{p} - \vec{q}| \, ,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Ausdrücke $p_1 - q_1$ und $p_2 - q_2$ wie v_1 und v_2 bei der Betrachtung des Betrages behandelt haben.

Für die allgemeine Betrachtung müssen wir von einer allgemeinen Drehmatrix

$$\mathtt{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

ausgehen. Die Drehmatrix ist orthogonal, d.h. es ist $\mathtt{D}^{-1} = \mathtt{D}^{\mathtt{T}}$ oder

$$\mathtt{D}\,\mathtt{D}^{\mathtt{T}} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Die Länge des transformierten Vektors ist

$$|\mathtt{D}\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} d_{11}v_1 + d_{12}v_2 + d_{13}v_3 \\ d_{21}v_1 + d_{22}v_2 + d_{23}v_3 \\ d_{31}v_1 + d_{32}v_2 + d_{33}v_3 \end{pmatrix} \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\sqrt{(d_{11}v_1+d_{12}v_2+d_{13}v_3)^2+(d_{21}v_1+d_{22}v_2+d_{23}v_3)^2+(d_{31}v_1+d_{32}v_2+d_{33}v_3)^2}\right| \\
&= \left|\sqrt{\begin{array}{c} d_{11}^2v_1^2+d_{12}^2v_2^2+d_{13}^2v_3^2+2d_{11}d_{12}v_1v_2+2d_{11}d_{13}v_1v_3+2d_{12}d_{13}v_2v_3 \\ +d_{21}^2v_1^2+d_{22}^2v_2^2+d_{23}^2v_3^2+2d_{21}d_{22}v_1v_2+2d_{21}d_{23}v_1v_3+2d_{22}d_{23}v_2v_3 \\ +d_{31}^2v_1^2+d_{32}^2v_2^2+d_{33}^2v_3^2+2d_{31}d_{32}v_1v_2+2d_{31}d_{33}v_1v_3+2d_{32}d_{33}v_2v_3 \end{array}}\right| \\
&= \left|\sqrt{\begin{array}{c} (d_{11}^2+d_{21}^2+d_{31}^2)v_1^2+(d_{12}^2+d_{22}^2+d_{32}^2)v_2^2+(d_{13}^2+d_{23}^2+d_{33}^2)v_3^2 \\ +2v_1v_2(d_{11}d_{12}+d_{21}d_{22}+d_{31}d_{32})+2v_1v_3(d_{11}d_{13}+d_{21}d_{23}+d_{31}d_{33}) \\ +2v_2v_3(d_{12}d_{13}+d_{22}d_{23}+d_{32}d_{33}) \end{array}}\right| \\
&= \left|\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\right| = |\vec{v}| \ .
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt wurde die Orthogonalität der Drehmatrix verwendet: die Produkte $\vec{d_i} \cdot d_i$ (z.B. erste Spalte zweite Matrix mal erste Zeile erste Matrix) ergeben bei der orthogonalen Matrix 1. Daher 'überlebt' die obere Zeile unter der Wurzel, wobei die Klammern jeweils 1 werden. Die Produkte $\vec{d_i} \cdot d_j$ dagegen verschwinden, so dass die anderen Terme unter der Wurzel ebenfalls verschwinden.

4. Gegeben sind zwei Vektoren $a = (a_{1n})$ und $b = (b_{n1})$. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt gleich der Spur des dyadischen Produkts ist. Überprüfen Sie Ihr allgemeines Ergebnis am Beispiel der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \ .$$

Lösung: allgemein ist das Produkt aus Zeilen- und Spaltenvektor ein Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_{1n}) \cdot (b_{n1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ .$$

Für die Spur des dyadischen Produkts müssen, wenn wir die Reihenfolge der Multiplikation beibehalten wollen, die beiden Vektoren transponiert werden:

$$\text{Spur}(\vec{a}^T \cdot \vec{b}^T) = \text{Spur}\left((a_{n1}) \cdot (b_{1n})\right) = \text{Spur}(a_i b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ .$$

Wenn wir uns das transponieren sparen und stattdessen die Vektoren vertauschen, so ergibt sich eine andere Matrix, ihre Spur ist aber wieder das Skalarprodukt:

$$\text{Spur}(\vec{b} \cdot \vec{a}) = \text{Spur}\left((b_{n1}) \cdot (a_{1n})\right) = \text{Spur}(b_i a_j) = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ .$$

Zahlenbeispiel: Skalarprodukt wird

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 + 15 + 12 = 31 \ ,$$

Spur des dyadischen Produkts wird

$$\text{Spur}(\vec{b} \cdot \vec{a}) = \text{Spur}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right) = \text{Spur}\begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 5 & 15 & 10 \\ 6 & 18 & 12 \end{pmatrix} = 4 + 15 + 12 = 31 = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

oder wenn man statt des Vertauschens der beiden Matrizen die Transponierten verwendet

$$\text{Spur}(\vec{a}^T \cdot \vec{b}^T) = \text{Spur}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\right) = \text{Spur}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 12 & 15 & 18 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} = 4+15+12 = 31 = \vec{a} \cdot \vec{b} \ .$$

Die zweite Variante gibt zwar eine andere Matrix (Matrix-Multiplikation ist nun mal nicht kommutativ), aber die Spur bleibt erhalten.

5. Überprüfen Sie, ob die folgenden Gleichungssysteme eindeutig lösbar sind:

$$\begin{matrix} 4x + 5y = 0 \\ 5x + 4y = 2 \end{matrix}\,, \quad \begin{matrix} 4x + 5y = 0 \\ 5x - 4y = 2 \end{matrix}\,, \quad \begin{matrix} 3x + 2y = 0 \\ 6x + 4y = 2 \end{matrix}\,, \quad \begin{matrix} 2w - 2x - 3y + 2z = 3 \\ 3w - 0x - 0y + 0z = 5 \\ 4w - 5x + 2y + 3z = 8 \\ 3w - 2x - 5y - 6z = 2 \end{matrix}\,.$$

Hängt die Entscheidung von den jeweils rechten Seiten der Gleichungssysteme ab?
Lösung: ein Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix regulär ist, d.h. ihre Determinante nicht verschwindet. Damit ist bestimmt, ob die Basisvektoren linear unabhängig sind. Die rechte Seite geht nicht in die Koeffizientenmatrix ein – sie ist für die aktuelle Lage der Lösung als Schnittpunkt der durch die Gleichungen beschriebenen Graden (im 2D), Ebenen (im 3D) oder sonstiger geometrischer Objekte (im $\mathbb{R}^n$) wichtig. Die Frage nach der Existenz eines eindeutigen Schnitttpunkts ist jedoch bereits durch die lineare unabhängigkeit beantwortet.
Die Koeffizientenmatrix des ersten Gleichungssystems hat die Determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 25 = 9 \neq 0$$

und ist damit lösbar. Beim zweiten Gleichungssystem ist

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -16 - 25 = -41 \neq 0\,,$$

ein genauer Blick zeigt, dass hier die die Matrix bildenden Vektoren orthogonal sind – allerdings nicht orthonormiert. Beim dritten Gleichungssystem verschwindet die Determinante der Koeffizientenmatrix,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0\,,\,,$$

die der eine Vektor ein Vielfaches des anderen ist, d.h. die beiden Vektoren sind nicht linear unabhängig. Beim letzten Gleichungssystem muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -5 & -6 \end{vmatrix}$$

entwickelt werden. Da in der zweiten Zeile drei Nullen stehen, bietet sich Entwicklung nach der zweiten Zeile an. Das erste Element der zweiten Zeile ist $a_{ij} = a_{12}$, d.h. der Vorfaktor wird $(-1)^{i+j} = (-1)^{1+2} = (-1)$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -5 & -6 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & -6 \end{vmatrix} = -3(24 + 18 + 50 - (-8) - 30 - (-90)) = -132\,,$$

wobei bei der 3×3-Unterdeterminante Sarrus verwendet wurde.

6. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

   (a) Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe der Cramer'schen Regel.
   (b) Bestimmen Sie die Lösung mit Hilfe des Inversen der Koeffizientenmatrix.

Lösung: Gleichungssystem in Matrixschreibweise:

$$\mathtt{A}\vec{x} = \vec{c} \qquad \text{mit} \qquad \mathtt{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) für die Cramer'sche Regel zuerst Determinante der Koeffizientenmatrix $\mathtt{A}$:

$$|\mathtt{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4\,.$$

Dann jeweils Determinanten von $\mathtt{A}_i$, wobei in $\mathtt{A}$ die $i$te Spalte durch $\vec{c}$ ersetzt ist

$$|\mathtt{A}_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14\,, \quad |\mathtt{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\,, \qquad |\mathtt{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -4\,.$$

Für die x_i gilt

$$x_i = \frac{|\mathtt{A}_i|}{|\mathtt{A}|} \qquad \text{also} \qquad x_1 = \frac{-14}{-4} = \frac{7}{2}\,, \qquad x_2 = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad x_3 = \frac{-4}{-4} = 1\,.$$

(b) Lösung des Gleichungssystems durch Multiplikation mit der Inversen der Koeffizientenmatrix:

$$\mathtt{A}\vec{x} = \vec{c} \qquad \stackrel{\mathtt{A}^{-1}}{\rightarrow} \mathtt{A}^{-1}\mathtt{A}\vec{x} = \vec{x} = \mathtt{A}^{-1}\vec{c}\,.$$

Inverse Matrix z.B. über Adjunktenmatrix oder über Gauß-Jordan; dass das Gleichungssystem lösbar ist, ist aus Teil (a) bekannt; sonst bevor der Rechenaufwand ausartet sicherheitshalber $\det tensA$ bestimmen.
(i) Adjunktenmatrix:

$$\mathtt{U} = \mathrm{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Transponierte der Adjunktenmatrix (ist in diesem Spezialfall einer symmetrischen Matrix mit der Adjunktenmatrix identisch) dividiert durch die Determinante der Koeffizientenmatrix ergibt die Inverse

$$\mathtt{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathtt{A}|}\mathtt{U}^T = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation mit Vektor $\vec{c}$ liefert

$$\vec{x} = \mathtt{A}^{-1}\vec{c} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4+3 \\ 4-5 \\ -3+5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{c} x_1 = 7/2 \\ x_2 = -1/2 \\ x_3 = 1 \end{array}. \quad (1)$$

(ii) Gauß-Jordan basiert auf dem addieren und subtrahieren von Vielfachen der Zeilen der Matrix, mit dem Ziel, aus dem Konstrukt $(\mathtt{A}||\mathtt{E})$ auf die Form $(\mathtt{E}||\mathtt{A}^{-1})$ zu kommen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \stackrel{\text{II'=II-I;III'=III-I}}{=} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cc}
\underset{=}{\text{III'=III-II}} & \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
\underset{=}{\text{II'=II+III}} & \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
\underset{=}{\text{II'=-II/2;III'=III/2}} & \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \\
\underset{=}{\text{I'=I-II}} & \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \\
\underset{=}{\text{I'=I-III}} & \left(\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)
\end{array}$$

und weiter wie in Glg. (1).

7. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$\mathtt{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathtt{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung: die Eigenwerte bestimmen sich aus $|\mathtt{A} - \lambda\mathtt{E}| = 0$. Für die erste Matrix ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 \stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^2(-\lambda-1) - 1 - 1 + (1+\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\
&= -(1-\lambda)^2(\lambda+1) - 3(\lambda-1) \\
&= -(1-\lambda)[(1-\lambda)(1+\lambda)+3] = (\lambda-1)[1-\lambda^2+3] \\
&= (\lambda-1)(4-\lambda^2) = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)\ .
\end{aligned}$$

Damit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. [Test: $\sum \lambda_i = 1 = \mathrm{Spur}((A))$.] Die Eigenvektoren bestimmen sich daraus gemäß $(\mathtt{A} - \lambda\mathtt{E})\vec{x} = 0$, also für $\lambda_1 = -2$:

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{array}\ .$$

Die eine Gleichung ist das Doppelte der anderen Gleichung, d.h. es gibt keine eindeutige Lösung. Mit x_1 beliebig ergibt sich $x_2 = -2x_1$ und aus der obersten Gleichung $x_3 = -3x_1 - x_2 = -x_1$. Mit $x_1 = 1$ ergibt sich

$$\vec{x}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{oder normiert} \qquad \vec{e}_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

Für den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = 1$ ist

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array}\ .$$

Wieder ist x_1 beliebig, sowie $x_2 = x_1$ und $x_3 = -x_2 = -x1$, also mit $x_1 = 1$

$$\vec{x}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{oder normiert} \qquad \vec{e}_{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\ .$$

Dritter Eigenwert $\lambda = 2$:

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} -2x_2 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{array} .$$

Mit $x_1 = 1$ ergibt sich

$$\vec{x}_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{oder normiert} \qquad \vec{e}_{\lambda_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte der Matrix $\mathtt{S}$ ergeben sich aus

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^3$$

und damit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, d.h. die Matrix ist dreifach entartet. Damit kann es bis zu drei linear unabhängige Eigenvektoren zu diesem einen Eigenwert geben. Gehen wir nach Schema vor

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{array}$$

Das bedeutet nicht, dass die x_i verschwinden, sondern dass sie überhaupt nicht bestimmt sind. Die drei Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems

$$\vec{e}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \vec{e}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

würden dies Gleichungssystem erfüllen, ebenso wie jede andere Kombination von drei (linear unabhängigen) Vektoren. Anschaulich ist das klar, da $\mathtt{S}$ eine Punktspiegelung am Ursprung beschreibt und damit jeder Vektor auf sich selbst abgebildet wird – nur eben in entgegen gesetzter Richtung; daher ist der Eigenwert -1.
Bitte in den Übungen erläutern: eine Spiegelung an der yz-Ebene, beschrieben durch

$$\mathtt{S}_{yz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dagegen liefert die Eigenwerte

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{array} .$$

Hier sind zwei Eigenwerte identisch, die Matrix ist zweifach entartet. Der Eigenvektor zum ersten Eigenwert ist eindeutig:

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 0x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die x-Achse ist also Eigenvektor zum Eigenwert -1: das ist anschaulich ok, da ja gerade diese Richtung gespiegelt wird. Für λ_2 und λ_3 wird die Gleichung für die Eigenvektoren

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} x_1 = 0 \\ 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{array}$$

x_1 ist eindeutig als Null festgelegt, die anderen beiden Komponenten sind beliebig, d.h. beliebige Vektoren in der yz-Ebene sind Eigenvektoren bei der Spiegelung an eben dieser Ebene. Das ist anschaulich verständlich, ebenso wie die Tatsache, dass der Eigenwert $+1$ ist: die Vektoren werden nicht verändert. Als Eigenvektoren lassen sich z.B. angeben

$$\vec{e}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$