Kallenrode, www.sotere.uos.de

Übungsaufgaben Vektoren

1. Gegeben sind die Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\,\cos\varphi \\ \sin\vartheta\,\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} , \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\,\cos\varphi \\ \cos\vartheta\,\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie für beide Sätze von Einheitsvektoren, dass diese ein Orthonormalsystem bilden.

Zielsetzung: Orthonormalsystem mit Kronecker-Delta formulieren; Skalarprodukte ausführen.

Lösungsvorschlag: Orthonormalsystem kompakt mit Hilfe des Kronecker-Deltas ausdrücken:

$$\vec{e}_i, \vec{e}_j \quad \text{orthonormal} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{e}_i \cdot \vec{j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } 1 = j \end{cases}$$

Da das Skalarprodukt kommutativ ist, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i$, muss nur jeweils eins der Produkte ausgewertet werden.

Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_\varrho \cdot \vec{e}_\varrho &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0 = 1 \ \checkmark \\
\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi &= (-\sin\varphi)^2 + \cos^2\varphi + 0 = 1 \ \checkmark \\
\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z &= 0 + 0 + 1 = 1 \ \checkmark \\
\vec{e}_\varrho \cdot \vec{e}_\varphi &= \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varrho = \cos\varphi\,(-\sin\varphi) + \sin\varphi\,\cos\varphi + 0 = 0 \ \checkmark \\
\vec{e}_\varrho \cdot \vec{e}_z &= \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\varrho = 0 + 0 + 0 = 0 \ \checkmark \\
\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z &= \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\varphi = 0 + 0 + 0 = 0 \ \checkmark
\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r &= \sin^2\vartheta\,\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\,\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta = \sin^2\vartheta\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \cos^2\vartheta \\
&= \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1 \ \checkmark \\
\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi &= (-\sin\varphi)^2 + \cos^2\varphi + 0 = 1 \ \checkmark \\
\vec{e}_\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta &= \cos^2\vartheta\,\cos^2\varphi + \cos^2\vartheta\,\sin^2\varphi + (-\sin\vartheta)^2 = \cos^2\vartheta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \sin^2\vartheta \\
&= \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1 \ \checkmark \\
\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi &= \sin\vartheta\,\cos\varphi\,(-\sin\varphi) + \sin\vartheta\,\sin\varphi\,\cos\varphi + 0 = 0 \ \checkmark \\
\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\vartheta &= \sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\cos^2\varphi + \sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\sin^2\varphi - \cos\vartheta\,\sin\vartheta \\
&= \sin\vartheta\,\cos\vartheta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - \sin\vartheta\,\cos\vartheta = \sin\vartheta\,\cos\vartheta - \sin\vartheta\,\cos\vartheta = 0 \ \checkmark \\
\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\vartheta &= (-\sin\varphi)\,\cos\vartheta\,\cos\varphi + \cos\varphi\,\cos\vartheta\,\sin\varphi + 0 = 0 \ \checkmark
\end{aligned}$$

2. Auf Grund des Lärms in der Vorlesung haben Sie von den Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten nur $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ (wie in Aufg. 1 gegeben) mitbekommen. Sie wissen, dass Kugelkoordinaten ein Orthonormalsystem bilden. Also bestimmen Sie aus dieser Kenntnis $\vec{e}_\vartheta$

Zielsetzung: Kreuzprodukt ausführen; über Willkür in der Definition eines Rechtssystems nachdenken; über Irrelevanz dieser Willkür für die Bestimmung eines Normaleneinheitsvektors und damit die eindeutige Definition einer Ebene nachdenken; Lernen, dass sich letzterer auch mit Hilfe des Skalarprodukts finden lässt

Lösung: Im Orthonormalsystem müssen die Vektoren paarweise senkrecht stehen und auf die Länge Eins normiert seinen. Einen auf $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ senkrecht stehenden Vektor liefert das Kreuzprodukt:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} \sin\vartheta\,\cos\varphi \\ \sin\vartheta\,\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\vartheta\,\cos\varphi \\ -\cos\vartheta\,\sin\varphi \\ \sin\vartheta\,\cos^2\varphi + \sin\vartheta\,\sin^2\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\cos\vartheta\,\cos\varphi \\ -\cos\vartheta\,\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Da wir bereits wissen, dass Kugelkoordinaten ein Orthonormalsystem bilden, wissen wir auch, dass der so bestimmte Vektor ein Einheitsvektor sein muss: sein Betrag ist gegeben als

$$|\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi| = |\vec{e}_r|\,|\vec{e}_\varphi|\,\sin\angle(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi) .$$

Darin sind die Beträge $|\vec{e}_r| = |\vec{e}_\varphi| = 1$ (Normierung) und der Winkel ist $\angle(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi) = \pi/2$ (orthogonal). Also ist $|\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi| = 1$.

Vergleich mit Aufg. 1 zeigt, dass wir aus dem Kreuzprodukt nicht $\vec{\vartheta}$ sondern $-\vec{\vartheta}$ erhalten haben. Das bedeutet, dass die Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ und $-\vec{e}_\vartheta$ (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem bilden. Allerdings bilden die Vektoren $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\vartheta$ ebenfalls ein Rechtssystem, da wir aus dem Kreuzprodukt $\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r$ als dritten Vektor $\vec{e}_\vartheta$ erhalten hätten.[1] Ein Orthonormalsystem wird erst dann ein Rechtssystem, wenn wie den Basisvektoren eine bestimmte Reihenfolge zu weisen.

Hinweis zum Weiterdenken (bitte während der Übungen mit den Studierenden diskutieren): im 3D haben wir das Kreuzprodukt für den senkrecht stehenden Vektor – in anderen Dimensionen funktioniert dies nicht. Heißt das, dass man in höheren Dimensionen nicht in der Lage ist, einen auf anderen Vektoren senkrecht stehenden Vektor zu finden? Die Beschränkung des Kreuzprodukts auf drei Dimensionen bedeutet nur, dass wir keine explizite Rechenvorschrift haben, in höheren Dimensionen den noch fehlenden Vektor eines Rechtssystems zu definieren. Die Forderung, dass im Orthonormalsystem jeder Einheitsvektor die Länge Eins haben muss und dass die Einheitsvektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen, liefert die notwendigen Bedingungen, um die noch fehlenden Einheitsvektoren zu bestimmen. Von den n orthonormalen Einheitsvektoren, die den $\mathbb{R}^n$ aufspannen, seien $m < n$ bekannt, die fehlenden $n - m$ sind zu berechnen. Jeder dieser Vektoren hat n Komponenten, d.h. für jeden Einheitsvektor sind n-Komponenten zu bestimmen. Beginnen wir mit dem ersten fehlenden Einheitsvektor: mit dem m bekannten Einheitsvektoren sind die Skalarprodukte zu bilden

$$\vec{e}_{m+1} \cdot \vec{e}_i = 0 \qquad \forall\, i \leq m .$$

Damit erhalten wir m Gleichungen für die $n > m$ Komponenten des Vektors. Dieses lineare Gleichungssystem ist unterbestimmt: $m - n$ Komponenten können frei gewählt werden, die anderenlassen sich dann mit Hilfe des Gleichungssystems eindeutig bestimmen. Damit haben wir den $m + 1$-ten Einheitsvektor bestimmt und können das Verfahren fortsetzen, bis alle n Einheitsvektoren gegeben sind.

Nehmen wir das dreidimensionale kartesische System als Beispiel. Zwei Einheitsvektoren, $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ sind bekannt, der dritte ist gesucht. Die Forderung nach paarweiser Orthogonalität liefert als Gleichungssystem für die drei Komponenten von $\vec{e}_3$:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_x \cdot \vec{e}_3 &= 1e_{3,1} + 0 \cdot e_{3,2} + 0 \cdot e_{3,3} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{3,1} = 0 \,; \\
\vec{e}_y \cdot \vec{e}_3 &= 0 \cdot e_{3,1} + 1e_{3,2} + 0 \cdot e_{3,3} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{3,2} = 0 \,.
\end{aligned}$$

[1] In kartesischen Koordinaten bilden $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem – vertauschen wir die Richtungen von in der xy-Ebene (d.h. die Einheitsvektoren werden, in dieser Reihenfolge $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$), so weist $\vec{e}_z$ in einem Rechtssystem entgegen der uns gewohnten Richtung.

Über die dritte Komponente, $e_{3,3}$ liefert das Gleichungssystem keine Information, wir können Sie frei wählen. Da für ein Orthonormalsystem jedoch auch gelten muss $\vec{e}_3^2 = 1$, ist $e_{3,3} = \pm 1$, d.h. bis auf die Richtung erhalten wir $\vec{e}_z$. Um die Basis des $\mathbb{R}^3$ aufzubauen, d.h. um jeden Punkt des Raumes als Linearkombination der drei Einheitsvektoren erreichen zu können, ist es egal, ob wir $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ oder $\vec{e}_3 = (0,0,-1)$ wählen – lediglich, wenn wir ein System betrachten wollen, in dem die Basisvektoren in der Reihenfolge $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ ein Rechtssystem bilden, müssen wir die erste Variante wählen. Das Orthonormalsystem dagegen ist nur durch die Orthogonalität und Normierung bestimmt – das Rechtssystem ist eine spezielle Form eines rechtwinkligen (aber nicht zwingend normierten) Basissystems.

Gehen wir in den vierdimensionalen Raum derart, dass nur zwei Einheitsvektoren bekannt sind, nämlich die bereits in drei Dimensionen bewährten Vektoren $\vec{e}_x = (1,0,0,0)$ und $\vec{e}_y = (0,1,0,0)$. Von den beiden fehlenden Einheitsvektoren bestimmen wir den ersten mit Hilfe des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 &= 1e_{3,1} + 0e_{3,2} + 0e_{3,3} + 0e_{3,4} \quad \Rightarrow \quad e_{3,1} = 0\,, \\
\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 &= 0e_{3,1} + 1e_{3,2} + 0e_{3,3} + 0e_{3,4} \quad \Rightarrow \quad e_{3,2} = 0\,.
\end{aligned}$$

Die Komponenten $e_{3,3}$ und $e_{3,4}$ lassen sich nicht mit Hilfe des Gleichungssystems bestimmen, allerdings wissen wir aus der Normierung, dass $\vec{e}_3^2 = 1$ und damit $e_{3,3}^2 + e_{3,4}^2 = 1$. Machen wir es uns einfach, und wählen $e_{3,3} = 1$ und damit $e_{3,4} = 0$, d.h. als dritter Einheitsvektor ergibt sich ein alter Bekannter: $\vec{e}_3 = (0,0,1,0)$. Der noch fehlende vierte Einheitsvektor wird durch die mit den drei jetzt bekannten Einheitsvektoren gebildeten Skalarprodukte bestimmt:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_4 &= 1e_{4,1} + 0e_{4,2} + 0e_{4,3} + 0e_{4,4} \quad \Rightarrow \quad e_{4,1} = 0\,, \\
\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_4 &= 0e_{4,1} + 1e_{4,2} + 0e_{4,3} + 0e_{4,4} \quad \Rightarrow \quad e_{4,2} = 0\,, \\
\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_4 &= 0e_{4,1} + 0e_{4,2} + 1e_{4,3} + 0e_{4,4} \quad \Rightarrow \quad e_{4,3} = 0\,.
\end{aligned}$$

Die vierte Komponente ist auf Grund der Normierung $\vec{e}_4^2 = 1$ gegeben zu $e_{4,4} = 1$, so dass sich als Einheitsvektor $\vec{e}_4 = (0,0,0,1)$ ergibt. Beachten Sie, dass die Wahl dieser Basen willkürlich ist: wir hätten nicht nur beide oder einen der beiden Einheitsvektoren in entgegen gesetzter Richtung wählen können sondern z.B. auch beim ersten Gleichungssystem $\vec{e}_3 = (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ annehmen können (natürlich wieder mit einer oder beiden Komponenten mit negativem Vorzeichen). Dann hätte sich für $\vec{e}_4$ allerdings ein anderes Gleichungssystem ergeben:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_4 &= 1e_{4,1} + 0e_{4,2} + 0e_{4,3} + 0e_{4,4} \quad \Rightarrow \quad e_{4,1} = 0\,, \\
\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_4 &= 0e_{4,1} + 1e_{4,2} + 0e_{4,3} + 0e_{4,4} \quad \Rightarrow \quad e_{4,2} = 0\,, \\
\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_4 &= 0e_{4,1} + 0e_{4,2} + e_{4,3}/\sqrt{2} + e_{4,4}/\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad e_{4,3} = -e_{4,4}\,.
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Normierung ergibt sich (bis auf das Vorzeichen) $\vec{e}_4 = (0,0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$. Alle auf diese Weise bestimmten Orthonormalsysteme sind gleich gut oder schlecht – wenn Sie aus irgendeinem Grunde der Variante $\vec{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1,0)$ und $\vec{e}_4 = (0,0,0,1)$ den Vorzug geben, so gibt es dafür keinerlei mathematisch Gründe, höchstens die Ähnlichkeit mit den gewohnten kartesischen Koordinaten.

3. Ein Vektor $\vec{r}_1$ wird in Kugelkoordinaten durch $\varphi_1 = \pi/4$, $\vartheta_1 = \pi/4$ und $r_1 = \sqrt{3}$ beschrieben. Geben Sie ihn in kartesischen Koordinaten an – Finger weg von Rechnern, Formelsammlung o.ä.. Ein zweiter Vektor $\vec{r}_2$ wird durch $\varphi_2 = 7\pi/4$, $\vartheta_2 = 3\pi/4$ und $r_2 = \sqrt{12}$ beschrieben. Überprüfen Sie, ob die beiden Vektoren orthogonal sind. Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf den beiden steht.

   Zielsetzung: Orientierung im Bogenmaß und in Kugelkoordinaten; Ausführung Skalarprodukt (und Beschränkung $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum a_i b_i$ auf kartesische Koordinaten).

   Lösung: die Winkel sind so gewählt, dass die Lage des Vektors leicht vorstellbar ist: da $\varphi_1 = \pi/4$ weist die Projektion von $\vec{r}_1$ in die xy-Ebene entlang der Diagonalen des ersten

Quadranten. Dann müssen die x und die y-Komponente positiv (erster Quadrant) und identisch (Winkelhalbierende) sein: $x_1 = y_1$. Da $\vartheta_1 = \pi/4$ halbiert $\vec{r}$ den Winkel zwischen der z-Achse und seiner Projektion in die xy-Ebene, d.h. es ist $z = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{2}x_1$. Wegen $|\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{x_1^2 + x_1^2 + 2x_1^2} = \sqrt{4x_1^2} = 2x_1$ ergibt sich $x_1 = y_1 = \sqrt{3}/2$ und $z_1 = \sqrt{3/2}$.

$\vec{r}_2$ weist im vierten Quadranten der xy-Ebene entlang der Diagonalen, d.h. es ist die x Komponente positiv, die y-Komponente negativ und beider Beträge sind gleich. Da $\vartheta_2 = 3\pi/4$ weist $\vec{r}_2$ nach unten, d.h. z_2 ist negativ; der Winkel zwischen z-Achse und Vektor ist wieder gleich dem zwischen dem Vektor und seiner Projektion auf die xy-Ebene. Damit ist wieder $z_2 = x_2\sqrt{2}$, also $|\vec{r}_2| = 2x_2 = \sqrt{12}$ und damit $x_2 = -y_2 = \sqrt{3}$ und $z_2 = -\sqrt{6}$.

Das Skalarprodukt kann nur in kartesischen Koordinaten gebildet werden, da $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ in Kugelkoordinaten unterschiedliche Einheitsvektoren haben und damit die Darstellung mit dem Kronecker-Delta nicht funktioniert. Das Skalarprodukt ist

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1\right) = -3 \,.$$

Ganz formal ergeben sich die Vektoren als Linearkombination der Einheitsvektoren; in Kugelkoordinaten gilt für einen allgemeinen Vektor $\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_\vartheta\vec{e}_\vartheta$ mit den a_i als den Komponenten entlang der Einheitsvektoren. Ein Ortsvektor hat nur eine Komponente a_r entlang des vom Ursprung radial in seine Richtung weisenden $\vec{e}_r$, d.h. für einen Ortsvektor ist $\vec{r} = |\vec{r}|\,\vec{e}_r$. Damit ist wegen $\sin\pi/4 = \cos\pi/4 = 1/\sqrt{2}$

$$\vec{r}_1 = \sqrt{3} \begin{pmatrix} \sin\pi/4\,\cos\pi/4 \\ \sin\pi/4\,\sin\pi/4 \\ \cos\pi/4 \end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_2 = \sqrt{12} \begin{pmatrix} \sin 3\pi/4\,\cos 7\pi/4 \\ \sin 3\pi/4\,\sin 7\pi/4 \\ \cos 3\pi/4 \end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \,.$$

4. Überprüfen sie die Gültigkeit der bac-cab-Regel

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \,.$$

Zielsetzung: lernen, dass man sich solche Regeln zumindest selbst beweisen kann; Kreuzprodukt ausführen

Lösung: komponentenweises ausmultiplizieren. Beide Seiten getrennt betrachten:

$$\begin{aligned}
\text{LS} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_y c_z - b_z c_y \\ b_z c_x - b_x c_z \\ b_x c_y - b_y c_x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z) \\ a_z(b_y c_z - b_z c_y) - a_x(b_x c_y - b_y c_x) \\ a_x(b_z c_x - b_x c_z) - a_y(b_y c_z - b_z c_y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z \\ a_z b_y c_z - a_z b_z c_y - a_x b_x c_y + a_x b_y c_x \\ a_x b_z c_x - a_x bx c_z - a_y b_y c_z + a_y b_z c_y \end{pmatrix} \\
\text{RS} &= \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \\
&= \begin{pmatrix} b_x a_x c_x + b_x a_y c_y + b_x a_z c_z - c_x a_x b_x - c_x a_y b_y - c_x a_z b_z \\ b_y a_x c_x + b_y a_y c_y + b_y a_z c_z - c_y a_x b_x - c_y a_y b_y - c_y a_z b_z \\ b_z a_x c_x + b_z a_y c_y + b_z a_z c_z - c_z a_x b_x - c_z a_y b_y - c_z a_z b_z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a_y b_x c_y - a_y b_x c_x + a_z b_x c_z - a_z b_z c_x \\ a_x b_y c_x - a_x b_x c_y + a_z b_y c_z - a_z b_z c_y \\ a_x b_z c_x - a_x b_x c_z + a_y b_z c_y - a_z b_z c_z \end{pmatrix} = \mathrm{LS}$$

5. In einer etwas verschrobenen Welt bewegt sich ein Bergsteiger entlang eines Weges $\vec{s} = (200, 6300, 2100)$ m gegen eine Gravitationskraft von $\vec{F} = (100, -200, 1000)$ N.

   (a) Welche Arbeit verrichtet er dabei?

   (b) Wie groß ist der Winkel zwischen Kraft und Weg?

   (c) Bestimmen Sie die Projektionen der Kraft auf den Weg und des Weges auf die Kraft.

   (d) Wie viele Tafeln Schokolade (500 kJ pro Tafel) darf er sich am Ende zum Ausgleich gönnen?

   Lösung:

   (a) Gesucht ist Arbeit $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$. Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$ sind gegeben, daher kann direkt eingesetzt werden:

   $$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 100 \\ -200 \\ 1000 \end{pmatrix} \mathrm{N} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 6300 \\ 2100 \end{pmatrix} \mathrm{m} = 860\ 000\ \mathrm{Nm} = 860\ \mathrm{kJ}\,.$$

   (b) gesucht ist der Winkel zwischen zwei Vektoren, er kann mit Hilfe des Skalar- oder des Vektorprodukts bestimmt werden. Da das Skalarprodukt in (a) ohnehin bereits ausgeführt wurde, verwenden wir dieses:

   $$\alpha = \arccos \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{Fs} = \arccos \frac{86}{\sqrt{105 \times 4414}} = \arccos 0.13 = 1.44$$

   oder umgerechnet in dezimale Grad 82.7°, d.h. die Steigung des Weges ist nur gering.

   (c) Projektion eines Vektors auf einen anderen mit Hilfe des Skalarprodukts, allgemeine Form

   $$\vec{b}_{\vec{a}} = |\vec{b}_{\vec{a}}|\, \vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}\,.$$

   Für die Projektion der Kraft auf den Weg:

   $$\vec{F}_{\vec{s}} = 0.0195 \vec{s} \approx \begin{pmatrix} 3.90 \\ 122.75 \\ 40.92 \end{pmatrix} \mathrm{N}\,.$$

   Für die Projektion des Weges auf die Kraft:

   $$\vec{s}_{\vec{F}} = 0.82 \vec{F} \approx \begin{pmatrix} 81.90 \\ -163.81 \\ 819.05 \end{pmatrix} \mathrm{m}\,.$$

   (d) das sind gerade 860 kJ/50 kJ/Tafel = 1.72 Tafeln. Merke: Bergsteigen taugt nicht zum Abnehmen.

6. Die Vektoren

   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   spannen ein Parallelepiped auf. Bestimmen Sie

   (a) den von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel,

   (b) den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms,

(c) den Mittelpunkt der Diagonalen dieses Parallelograms,

(d) einen auf dem Parallelogramm senkrecht stehenden Einheitsvektor, und

(e) das Volumen des von allen drei Vektoren auf gespannten Parallelepipeds.

Lösung: (a) Winkel lässt sich über Skalar- oder Kreuzprodukt ausrechnen:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right) = \arcsin\left(\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)$$

oder mit Zahlen (muss nicht weiter eingesetzt werden; die Aufgaben sollten ohne Taschenrechner zu bearbeiten sein)

$$\alpha = \arccos\frac{-13}{\sqrt{6}\,\sqrt{29}} = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}\,\sqrt{29}}\ .$$

Die zweite Variante ist ökonomischer, da das Kreuzprodukt zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ohnehin benötigt wird.
(b) Grundfläche als Betrag des Kreuzprodukts:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5}\ .$$

(c) Diagonale $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} = (2, -1, 2)$; Mittelpunkt bei $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{d} = (1, -0.5, 1)$.
(d) Normaleneinheitsvektor aus Aufgabenteil (b):

$$\vec{e_{\vec{n}}} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\ .$$

(e) Volumen teilweise aus (b)

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} = 14 - 5 = 11$$

oder mit Hilfe Determinante:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & -7 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 11\ .$$

7. Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren eine Basis für den $\mathbb{R}^3$ bilden: (1,0,-2), (1,0,-1) und (0,2,-1). Wenn ja, handelt es sich um ein Orthonormalsystem?

   Lösung: das Spatprodukt bilden (oder entsprechend die Determinante der aus den Vektoren gebildeten Matrix). Verschwindet dieses, so sind die Vektoren komplanar und bilden keine Basis für den $\mathbb{R}^3$.

$$S_b = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0\ .$$

   Auch diese Vektoren bilden eine Basis für den $\mathbb{R}^3$ aber kein Orthonormalsystem: sie sind nicht normiert ($|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{c} = \sqrt{5}$) und nicht orthogonal ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \neq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \neq 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \neq 0$).

8. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (3, -2, 0, 4)$, $\vec{b} = (5, 0, 0, 1)$, $\vec{c} = (-6, 1, 0, 1)$ und $\vec{d} = (2, 0, 0, 3)$.
(a) Überprüfen Sie, ob die Vektoren linear unabhängig sind.
(b) Überprüfen Sie ferner, ob Vektoren paarweise orthogonal sind.
(c) Bestimmen Sie einen Vektor, der auf $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht steht.

Musterlösung: (a) Sie können auf den ersten Blick erkennen, dass die Vektoren nicht linear unabhängig sind: da die dritte Komponente jeweils Null ist, spannen die vier Vektoren nur einen dreidimensionalen Raum auf. Also muss sich einer der Vektoren durch die drei anderen darstellen lassen und es gibt von Null verschiedene α, β, γ und δ mit

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = 0 \;.$$

Formal einfacher ist die Rückbesinnung, dass Vektoren linear unabhängig sind, wenn die aus ihnen gebildete Matrix regulär ist, d.h. eine von Null verschiedene Determinante hat:

$$\left|\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -6 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \;.$$

Das verschwinden der Determinante sehen Sie sofort daran, dass die eine Zeile Null ist (das ist genau die fehlende vierte Dimension). Falls Ihnen diese Regel nicht einfällt, können Sie auch nach dieser Zeile entwickeln und sehen sofort, dass die Determinante Null ist.
(b) zwei Vektoren sind orthogonal, wenn das Skalarprodukt verschwindet. Alle Skalarprodukte

$$\vec{a}\vec{b} = 19\,, \quad \vec{a}\vec{c} = -16\,, \quad \vec{a}\vec{d} = 18\,, \quad \vec{b}\vec{c} = -29\,, \quad \vec{b}\vec{d} = 13\,, \quad \vec{c}\vec{d} = -9$$

sind von Null verschieden, d.h. es gibt kein Paar von Vektoren, das orthogonal ist.
(c) anschaulich dürfte die einfachste Variante für den auf $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht stehenden Vektor ein Vektor im 4D sein, dessen dritte Komponente von Null verschieden ist, also z.B. $\vec{n} = (0, 0, 1, 0)$. Da das Kreuzprodukt im 4D nicht definiert ist, können wir mit seiner Hilfe keinen auf zwei Ausgangsvektoren senkrechten Vektor bestimmen. Stattdessen verwenden wir das Skalarprodukt zur Untersuchung auf Orthogonalität und fordern

$$\vec{a}\vec{n} = 0\,, \qquad \vec{b}\vec{n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{c}\vec{n} = 0$$

oder als Gleichungssystem in Matrixschreibweise zusammen gefasst:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} = 0 \;.$$

Das Gleichungssystem ist unterbestimmt, da wir nur drei Gleichungen für vier Unbekannte haben. Und da der Faktor vor n_3 in allen Gleichungen Null ist, ist n_3 beliebig wählbar. Verbleibt also das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcl} 3n_1 & -2n_2 & +4n_4 & = & 0 \\ 5n_1 & & +n_4 & = & 0 \\ -6n_1 & +n_2 & +n_4 & = & 0 \end{array} \quad \overset{n_4=-5n_1}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{rcl} -17n_1 & = & 2n_2 \\ 11n_1 & = & n_2 \end{array} \;.$$

Das Gleichungssystem ist erfüllt für $n_1 = n_2 = n_4 = 0$ und n_3 beliebig, d.h. das anfangs geratene $\vec{n} = (0, 0, 1, 0)$ steht senkrecht auf den drei Ausgangsvektoren.

9. Gegeben sind zwei von Null verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus dem $\mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Zeigen Sie, dass sich ein Vektor $\vec{y}$ finden lässt mit $\vec{b} = a \times \vec{y}$ und $\vec{a} \cdot \vec{y} = 0$. Zeigen Sie damit, dass sich jeder Vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig darstellen lässt in der Form

$$\vec{r} = \lambda\vec{a} + \vec{a} \times \vec{y} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \;.$$

Zielsetzung: etwas abstrakter über Basen und Produkte zwischen Vektoren nachdenken; indirekt auch Mehrfachprodukte

Lösung: das verschwindende Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bedeutet $\vec{a} \perp \vec{b}$. Behauptung 1:

$$\exists y : \vec{b} = \vec{a} \times \vec{y} \quad \wedge \quad \vec{a} \cdot \vec{y} = 0 \, .$$

Aus der zweiten Forderung folgt $\vec{y} \perp \vec{a}$, aus der ersten folgt $\vec{y} \perp \vec{b}$. Dann lässt sich $\vec{y}$ über das Kreuzprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen – wobei das Kreuzprodukt die Richtung vorgibt und die Normierung so erfolgen muss, dass $\vec{b} = \vec{a} \times \vec{y}$. Beginnen wir mit der Richtung und wählen $\vec{e}_{\vec{y}} = (\vec{a} \times \vec{b})/|\vec{a} \times \vec{b}|$:

$$\vec{e}_{\vec{y}} = \frac{1}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \vec{a} \times \vec{b} \stackrel{\vec{a} \perp \vec{b}}{=} \frac{1}{|\vec{a}| \, |\vec{b}|} \, \vec{a} \times \vec{b} \, .$$

Aus der ersten Forderung folgt wegen $\vec{y} \perp \vec{a}$ auch, dass $|\vec{b}| = |\vec{a}| \, |\vec{y}|$ und damit $\vec{y} = |\vec{b}|/|\vec{a}|$, also

$$\vec{y} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \, \vec{e}_{\vec{y}} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \, \frac{1}{|\vec{a}| \, |\vec{b}|} \, \vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \times \vec{b} \, .$$

Zur Kontrolle: (a) $\vec{y}$ erfüllt die zweite Forderung, $\vec{a} \cdot \vec{y} = 0$, da $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ verschwindet wegen $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$. (b) $\vec{y}$ erfüllt die erste Bedingung: da alle drei Vektoren senkrecht aufeinander stehen, müssen nur die Beträge berücksichtigt werden: $|\vec{b}| = |\vec{a}| \, |\vec{y}| = |\vec{a}| \, |\vec{a}| \, |\vec{b}|/|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|$.

Behauptung 2:

$$\forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3 : \vec{r} = \lambda \vec{a} + \vec{a} \times \vec{y} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Auf den ersten Blick wirkt die Variante etwas defizitär, da nicht die typische Linearkombination aus drei Basen, $\vec{r} = \sum r_i \vec{e}_i$ gegeben ist, sondern nur ein freier Parameter λ sowie zwei auf einander senkrecht stehende Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{y} = \vec{b}$. Die Information über $\vec{r}$ muss in irgendeiner Form in λ (und eventuell $\vec{y}$) kodiert sein. Wir können (1) nicht im klassischen Sinne nach λ auflösen, aber skalare Multiplikation mit $\vec{a}$ liefert

$$\vec{a} \cdot \vec{r} = \lambda \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \qquad \stackrel{\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})}{\rightarrow} \qquad \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\vec{a}^2} \, .$$

Vektorielle Multiplikation von (1) mit $\vec{a}$ liefert wegen $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}^2 \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{r} = \lambda \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{y}) \qquad \stackrel{\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})}{\rightarrow} \qquad \vec{y} = \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{\vec{a}^2} \, .$$

Da hier keine speziellen Annahmen bezüglich $\vec{r}$ getroffen werden, gilt diese Darstellungsform wie gefordert für alle $\vec{r}$.

10. Überprüfen Sie, ob die folgenden mathematischen Objekte der Definition eines Vektorraums genüge tun: (a) die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen; (b) die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen; (c) die Menge $\mathbb{E}$ der Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$; (d) die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

    Lösung: (a) nein, da es kein inverses Element gibt (das wäre eine negative Zahl); (b) nein; hier existiert zwar das inverse Element, aber die Abgeschlossenheit ist verletzt, da die Multiplikation einer ganzen Zahl mit einem reellen λ eine reelle Zahl ergibt, in der Regel aber keine ganze Zahl. (c) nein, die Abgeschlossenheit ist verletzt, da die Summe zweier Einheitsvektoren in der Regel keinen Einheitsvektor ergibt.); (d) ja, Abgeschlossenheit ist erfüllt, ebenso wie die anderen Axiome – das einzige Problem ist die Umkehrung bei der Multiplikation mit einem Skalar: hier muss $\lambda \neq 0$ gefordert werden.