Spickzettel Vektorraum

Definition: Ein *Vektorraum* V besteht aus einer Menge von Objekten $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots\}$, die als Vektoren bezeichnet werden. Zwischen den Vektoren sind die Operationen Addition und Multiplikation mit einem Skalar λ definiert. Dabei gelten die folgenden Beziehungen:

1. Abgeschlossenheit: der Raum ist abgeschlossen im Hinblick auf die Addition und die Multiplikation mit einem Skalar, d.h. die Ergebnisse dieser Operationen sind wieder Elemente von V:
$$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V: \;\; \vec{u} + \vec{v} \in V \qquad \text{und} \qquad \forall\, \vec{v} \in V \wedge \forall\, \lambda \in \mathbb{R}: \;\; \lambda\vec{v} \in V\ .$$
2. für die Addition gilt das Kommutativgesetz (die Addition ist kommutativ):
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{a} \qquad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V\ .$$
3. für die Addition gilt das Assoziativgesetz (die Addition ist assoziativ)
$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \qquad \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V\ .$$
4. es gibt einen Nullvektor $\vec{0}$ (neutrales Element der Addition) in V mit
$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \qquad \forall\, \vec{u} \in V\ .$$
5. zu jedem Vektor $\vec{u}$ in V gibt es einen inversen Vektor $-\vec{u}$ in V, derart dass gilt
$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} \qquad \forall\, \vec{u} \in V\ .$$
   Neutrales und inverses Element sind verschieden.
6. für die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar gilt das Distributivgesetz:
$$(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u} \qquad \text{und} \qquad \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V\ .$$
7. für die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar gilt das Assoziativgesetz:
$$\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u} = \lambda\mu\vec{u} \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge \forall\, \vec{u} \in V\ .$$

Definition: Die *Basis* eines Vektorraums V ist eine Menge von linear unabhängigen Vektoren $E = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N\}$ mit deren Hilfe alle Vektoren des Vektorraumes eindeutig ausgedrückt werden können:
$$\forall \vec{v} \in V \;\; : \; \exists \lambda_i \in \mathbb{R} \;\text{ mit }\; \vec{r} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \vec{e}_i\ .$$
Die skalaren Größen λ_i sind die *Koordinaten* von $\vec{v}$ im Bezug auf die Basis E.

Definition: Die *Dimension* eines Vektorraums ist bestimmt durch die Zahl von Basisvektoren, die erforderlich ist, um die Position jedes Ortes im Raum (und damit jeden Vektor) eindeutig zu beschreiben.

Definition: Es gibt nur einen *Vektorraum* der *Dimension* n, bezeichnet als $\mathbb{R}^n$. Mathematisch sind alle Vektorräume mit Dimension n identisch mit $\mathbb{R}^n$, auch wenn sie durch unendlich viele verschiedene Basen dargestellt werden können.