Spickzettel Vektorprodukte

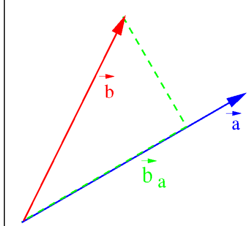
Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\sum a_i \vec{e}_i\right) \cdot \left(\sum b_i \vec{e}_i\right) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\alpha\ .$$

Kartesisch:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i\ .$$

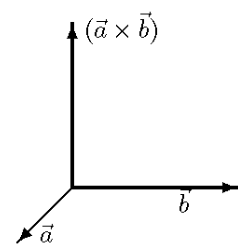
Rechenregeln:
– Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
– Bilinearität: $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \alpha\vec{a} \cdot \vec{b}$
– Distributivgesetz: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
Anwendungen:
– Orthogonalität: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$
– Normierung: $a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$
– Projektion: $|\vec{b}_{\vec{a}}| = |\vec{b}| \cos\alpha = (\vec{a} \cdot \vec{b})/a$ und $\vec{b}_{\vec{a}} = |\vec{b}_{\vec{a}}|\, \vec{e}_{\vec{a}} = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}/a^2$
– Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\cos\alpha = (\vec{a} \cdot \vec{b})/(ab)$.
– Richtungswinkel: $\cos\alpha_i = (\vec{a} \cdot \vec{e}_i)/a$
– Projektion eines Vektors auf eine Ebene: $\vec{a}_{\mathrm{P}} = \vec{a} - (\vec{e}_n \cdot \vec{a})\vec{e}_n$
– Arbeit: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ bzw. $W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$



Vektorprodukt: kartesisch:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Rechtssystem mit $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$ und $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\alpha$.
Rechenregeln:
– Anti-Kommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
– Bilinearität: $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b}$
– Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
Anwendung:
– Betrag des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms: $|\vec{a} \times \vec{b}|$
– Normalenvektor auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$
– Normaleneinheitsvektor: $\vec{e}_{\vec{n}} = (\vec{a} \times \vec{b})/|\vec{a} \times \vec{b}|$



Spatprodukt:

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Rechenregeln:
– Vertausch zweier Vektoren bewirkt Vorzeichenwechsel: $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = -[\vec{a}\vec{c}\vec{b}]$
– Zyklisches Vertauschen: $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = [\vec{b}\vec{c}\vec{a}] = [\vec{c}\vec{a}\vec{b}]$
Anwendungen:
– Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds: $V = |\,[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\,|$
– komplanare Vektoren: $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0$