Spickzettel Matrizen (Eigenwerte & Transformationen)

Transformationen

- Spiegelung an x- bzw. y-Achse:

$$\mathtt{S}_{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathtt{S}_{\mathrm{y}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Punktspiegelung:

$$\mathtt{S}_{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Drehmatrix (im Uhrzeigersinn und gegen den Uhrzeigersinn, jeweils um den Ursprung):

$$\mathtt{D}_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathtt{D}_{\varphi}^{-} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} .$$

- Drehungen im 3D um die entsprechende Achse:

$$\mathtt{D}_{\mathrm{x}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} , \quad \mathtt{D}_{\mathrm{y}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathtt{D}_{\mathrm{z}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

- Transformation Vektor: $\vec{x}\,' = \mathtt{T}\vec{x}$ oder $x_i' = \sum_j t_{ij} x_j$.

- Transformation Tensor: $\mathtt{A}' = \mathtt{T}\mathtt{A}\mathtt{T}^{\mathtt{T}}$ oder $a_{il}' = t_{ij} t_{lk} a_{jk}$.

Eigenwerte und Eigenwertprobleme

- Definitionsgleichung für Eigenwerte und -vektoren $\mathtt{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ mit$\vec{x} \neq 0$ liefert als Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte $|\mathtt{A} - \lambda\mathtt{E}| \overset{!}{=} 0$.

- eine symmetrische n-reihige Matrix hat reelle Eigenwerte, ihre n linear unabhängigen Eigenvektoren sind orthogonal.

- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

- die Determinante von $\mathtt{A}$ ist gleich dem Produkt aller Eigenwerte: $\det\mathtt{A} = \prod \lambda_i$.

- Anwendung 1: Hauptachsentransformation (nicht behandelt)

- Anwendung 2: Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen (ergibt sich aus dem Exponentialansatz, daher bei DGLs 2$^{\text{ter}}$ Ordnung aufpassen!)