Spickzettel Differentiation (partiell)

Grundbegriffe

- Eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ heißt partiell differenzierbar nach x_k in $[a, b]$, wenn für jedes $x_k \in (a, b)$ rechts- und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$$

  existieren und identisch sind.

- Satz von Schwarz: Bei einer gemischten partiellen Ableitung k^{ter} Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsschritte vertauscht werden, wenn die partiellen Ableitungen k^{ter} Ordnung stetige Funktionen sind.

- Tangentenvektoren an den Funktionsgraphen $f(x, y)$:

$$\vec{u} = \vec{e}_x + f_x\,\vec{e}_z \qquad \text{und} \qquad \vec{v} = \vec{e}_y + f_y\,\vec{e}_z\ .$$

  liefern den Normalen(einheits)vektor der Tangentialebene

$$\vec{e}_{\vec{n}} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = -\frac{f_x(a,b)\vec{e}_x + f_y(a,b)\vec{e}_y - \vec{e}_z}{\sqrt{1 + f_x^2(a,b) + f_y^2(a,b)}}\ .$$

- Das partielle Differential

$$\partial_x f(x, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y\ .$$

  beschreibt die Änderung des Funktionswerts beim Fortschreiten in Richtung der Variablen, nach der abgeleitet wird.

- Das totale Differential

$$\mathrm{d}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y$$

  beschreibt die Änderung der Funktion bei Fortschreiten entlang eines Linienelements $\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$.

Handwerkszeug

Da wir die partielle Ableitung auf die gewöhnliche Ableitung zurück geführt haben, kann das dort beschriebene Handwerkszeug direkt übernommen werden.