Spickzettel Komplexe Zahlen als Körper

$\mathbb{C}$ bildet einen Körper, da die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. es existieren zwei Verknüpfungen, die Addition und die Multiplikation, bezüglich derer $\mathbb{C}$ eine Gruppe bildet.
2. $\mathbb{C}$ ist eine Gruppe bezüglich der Addition, da
   (a) die Addition eine interne Verknüpfung ist: $z_1 + z_2 = z \in \mathbb{C}$.
   (b) das Assoziativgesetz gilt: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
   (c) ein neutrales Element existiert: $z + 0 = z$.
   (d) ein negatives Element existiert: $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists -z : \ \ z + (-z) = 0$.
3. $\mathbb{C}$ ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation, da
   (a) die Multiplikation eine interne Verknüpfung ist: $z_1 z_2 = z \in \mathbb{C}$.
   (b) das Assoziativgesetz gilt: $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$.
   (c) ein neutrales Element existiert: $1z = z$.
   (d) ein inverses Element existiert: $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\ \exists z^{-1} : \ \ z\, z^{-1} = 1$.
4. die Verknüpfungen sind durch ein Distributivgesetz verbunden: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.
5. es gilt die nicht-triviale Aussage $0 \neq 1$, d.h. die neutralen Elemente der beiden Verknüpfungen unterscheiden sich.

Da $\mathbb{C}$ sowohl bezüglich der Addition als auch bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe bildet, gilt für beide Verknüpfungen auch ein Kommutativgesetz:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad \text{und} \qquad z_1 z_2 = z_2 z_1 \ .$$