Spickzettel Differentialgleichungen erster Ordnung

Alle hier betrachteten DGLs sind linear!

Allgemeines

- Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung lässt sich in der folgenden Form darstellen:

$$\dot{x} = a(t)\,x + g(t)\;.$$

  Darin ist $\dot{x} = a(t)\,x$ die homogene DGL, $g(t)$ die Inhomogenität.

- Superpositionsprinzip: Die Lösung einer inhomogenen DGL setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL und einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL.

Klassifikation und Lösungsverfahren

- Lineare homogene DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\dot{x} = ax\;.$$

  Lösungsverfahren:

  - Separation der Variablen,
  - Exponentialansatz,
  - Potenzreihenansatz.

- Die lineare homogene DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstantem Summanden

$$\dot{x} = ax + b$$

  ist eigentlich eine inhomogene DGL (der konstante Summand ist die Inhomogenität), lässt sich aber ohne Trennung in homogene DGL und Inhomogenität direkt durch Separation der Variablen lösen.

- Lineare homogene DGL erster Ordnung mit variablen Koeffizienten

$$\dot{x} = a(t)x$$

  lässt sich ebenso wie im Fall konstanter Koeffizienten mit allen drei Verfahren lösen. Als allgemeines Ergebnis ergibt sich

$$x_{\mathrm{H}} = c\,\exp\left\{\int a(t)\,\mathrm{d}t\right\}\;.$$

- Für die inhomogene DGL muss nur zusätzlich eine partikuläre Lösung gefunden werden (Superpositionsprinzip):

  - Aufsuchen einer partikulären Lösung: Ansatz ähnlich der Inhomogenität, einsetzen in DGL und so Koeffizienten bestimmen. Gesamtlösung dann $x = x_{\mathrm{H}} + x_{\mathrm{p}}$.
  - Variation der Konstanten: die Integrationskonstante wird nach Lösung der homogenen DGL nicht aus den Anfangsbedingungen bestimmt sondern als Funktion $c(t)$ angenommen. Allgemeine Lösung:

$$x = \left[\int \left(g(t)\,\exp\left\{-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right\}\right)\mathrm{d}t + C\right]\,\exp\left\{\int a(t)\,\mathrm{d}t\right\}\;.$$