Spickzettel Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Allgemeines

- Eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt sich in der folgenden Form darstellen:

  $$A(t)\ddot{x} + B(t)\dot{x} + C(t)x = g(t) \;.$$

  Darin ist $A(t)\ddot{x} + B(t)\dot{x} + C(t)x = 0$ die homogene DGL, $g(t)$ die Inhomogenität.

- Superpositionsprinzip: Die Lösung einer inhomogenen DGL setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL und einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL.

Klassifikation und Lösungsverfahren

- Lineare homogene DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

  $$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad \overset{\text{gewöhnlicher Punkt } A(t) \neq 0}{\Rightarrow} \quad \ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \;.$$

  Zwei Lösungsverfahren stehen zur Auswahl:

  - Exponentialansatz $x \sim \mathrm{e}^{\lambda t}$ liefert die charakteristische Gleichung für die Eigenwerte λ_i.
  - Potenzreihenansatz (funktioniert für gewöhnliche Punkte immer)

- Die lineare homogene DGL zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten

  $$A(t)\ddot{x} + B(t)\dot{x} + C(t)x = 0 \;.$$

  lässt sich durch einen Potenzreihenansatz lösen. Das Ergebnis lässt sich in der Regel nicht wieder in einfache Funktionen überführen sondern kann zur Definition neuer Funktionen (Bessel-Funktion, Legendre-Polynome) verwendet werden.

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL wird durch einen Ansatz gefunden, der der Inhomogenität ähnlich ist. Beispiele:

- $g(t) = P_n(t)$, d.h. die Störfunktion ist ein Polynom n^{ten} Grades. Die Lösungsansätze sind Polynome $Q_n(t)$ mit

  $$x_\mathrm{p} = \begin{cases} Q_n(t) & a_1 \neq 0 \\ t\,Q_n(t) & a_2 \neq 0,\, a_1 = 0 \\ t^2\,Q_n(t) & a_1 = a_2 = 0 \end{cases} \;.$$

- $g(t) = \mathrm{e}^{ct}$, d.h. die Störfunktion ist eine Exponentialfunktion. Die Lösungsansätze sind ebenfalls Exponentialfunktionen, die Art des Ansatzes hängt davon ab, ob c Lösung der charakteristischen Gleichung (chGlg) ist:

  $$x_\mathrm{p} = \begin{cases} A\,\mathrm{e}^{ct} & c \text{ keine Lsg der chGlg} \\ At\,\mathrm{e}^{ct} & c \text{ einfache Lsg der chGlg} \\ At^2\,\mathrm{e}^{ct} & c \text{ doppelte Lsg der chGlg} \end{cases} \;.$$

- $g(t) = \sin(\beta t)$ oder $g(t) = \cos(\beta t)$, d.h. die Störfunktion ist eine elementare Winkelfunktion oder eine Linearkombination daraus. Der Lösungsansatz hängt dann davon ab, ob $\mathrm{i}\beta$ Lösung der charakteristischen Gleichung ist oder nicht:

  $$x_\mathrm{p} = \begin{cases} A\,\sin(\beta t) + B\,\cos(\beta t) & \mathrm{i}\beta \text{ keine Lsg der chGlg} \\ t[A\,\sin(\beta t) + B\,\cos(\beta t)] & \mathrm{i}\beta \text{ Lsg der chGlg} \end{cases} \;.$$