Spickzettel Differentialgleichungen (Lösungsverfahren lang)

Don't Panic! Dieser Zettel enthält mehr Verfahren als in der Vorlesung behandelt. Vielleicht hilft er später mal weiter.

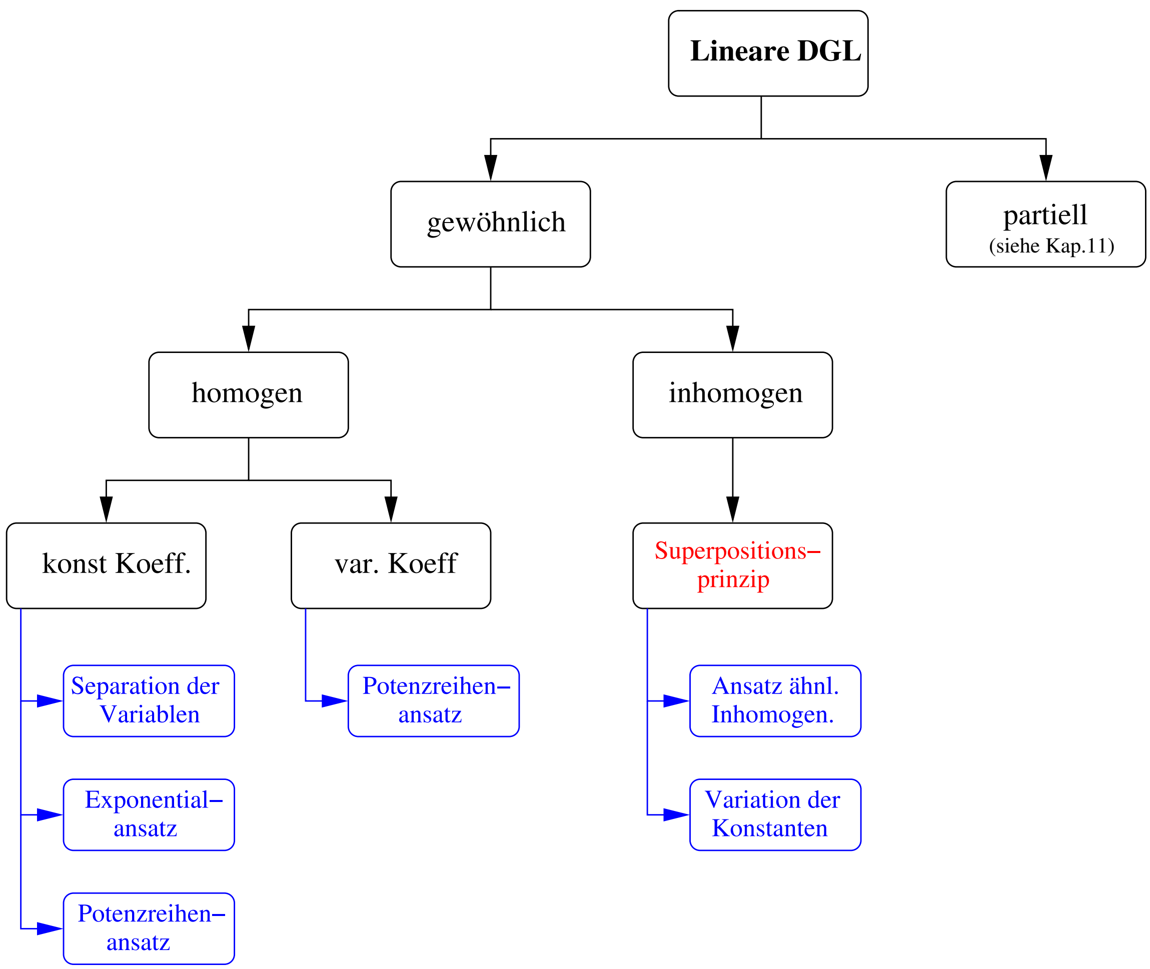
Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGLs) sind Bestimmungsgleichungen für Funktionen $y = f(x)$ einer Variablen x in der Form

$$f'(x) = c(x)\,f(x) + g(x)$$

als DGL 1^{ster} Ordnung oder

$$f''(x) = d(x)\,f'(x) + c(x)\,f(x) + g(x)$$

für eine DGL 2^{ter} Ordnung.



Gewöhnliche DGLs können mit verschiedenen Strategien gelöst werden. Diese hängen von der Ordnung der DGL, den Koeffizienten und dem Auftreten einer Inhomogenität ab. Die Lösungsstrategien lassen sich wie folgt zusammen fassen:

1. *Separierbare DGLs* haben die Form

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad \text{oder} \qquad y'' = \frac{f(x)}{g(y')}\ .$$

$g(x)$	Ansatz für y_{P}	Koeffizienten in y_{P}
a_0	$K = \mathrm{const}$	$K = \frac{a_0}{c}$
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$	$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots A_n x^n$	insert into ODE
$a_0\,\mathrm{e}^{rx}$	$A_0\,\mathrm{e}^{rx}$	$A_0 = \frac{a_0}{ar^2+br+c}$
$a_0 \sin(nx) + b_0 \cos(nx)$	$A_0 \sin(nx) + B_0 \cos(nx)$	$A_0 = \frac{(c-n^2a)a_0+nbb_0}{(c-n^2a)^2+n^2b^2}$ $B_0 = \frac{(c-n^2a)b_0-nba_0}{(c-n^2a)^2+n^2b^2}$

Tabelle 1: Partikuläre Lösungen für eine DGL 2^{ter} Ordnung der Form $ay'' + by' + cy = g(x)$

Beachten sie, dass die DGL 2^{ter} Ordnung eigentlich eine DGL 1^{ster} Ordnung für y' ist.[1] Die Lösung wird durch Separation der Variablen und anschließende Integration bestimmt:

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C \qquad \text{or} \qquad \int g(y')\,\mathrm{d}y' = \int f(x)\,Dx + C\;.$$

2. *Lineare homogene DGLs* 2^{ter} *Ordnung mit konstanten Koeffizienten* haben die Form

$$ay'' + by' + cy = 0\;.$$

Eigenwerte λ_i können mit Hilfe eines Exponentialansatzes bestimmt werden, die Lösung ist

$$y = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \qquad \text{für} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

bzw.

$$y = (c_1 + c_2 x)\,\mathrm{e}^{\lambda x} \qquad \text{für} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda\;.$$

3. Eine *lineare inhomogene DGL* 2^{ter} *Ordnung mit konstanten Koeffizienten* weist eine zusätzliche Inhomogenität $g(x)$ auf:

$$ay'' + by' + cy = g(x)\;.$$

Die Lösung ergibt sich durch Superposition der Lösung $y_{\mathrm{H}} = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ der homogenen DGL und einer partikulären Lösung y_{p} der inhomogenen. Einige Ansätze für partikuläre Lösungen sind in Tabelle 1 gegeben.

4. *Lineare homogene DGLs* 2^{ter} *Ordnung mit variablen Koeffizienten* haben die Form

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = 0\;.$$

Das Standardlösungsverfahren ist ein Potenzreihenanstz; die Lösung wird dann

$$y = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+k_1} + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+k_2}\;.$$

5. *Inhomogene Anfangswertprobleme mit variablen Koeffizienten* können mit Hilfe einer Laplace-Transformation gelöst werden.

Außer diesen Hauptschemata gibt es noch einige Nebenschemata zur Lösung von DGLs:

6. *Lineare inhomoge DGLs* 1^{ster} *Ordnung mit variablen Koeffizienten* haben die Form

$$y' + f(x)\,y = g(x)\;.$$

Durch Variation der Konstanten ergibt sich die Lösung

$$y = \exp\left\{\int -f(x)\,\mathrm{d}x \left[\int g(x)\,\exp\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}x + C\right]\right\}\;.$$

[1] Das typische Beispiel ist die gradlinige Bewegung mit Reibung. Die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -\beta v = -\beta\dot{x}$ kann mit $v = \dot{x}$ als DGL 1^{ster} Ordnung geschrieben werden: $m\dot{v} = -\beta v$.

7. Eine *allgemeine DGL 1ster Ordnung* hat die Form

$$\frac{y' + f(x,y)}{g(x,y)} = 0 \ .$$

Es gibt zwei prinzipielle Lösungsverfahren

(a) Substitution $y = vx$ kann auf eine separierbare DGL in v and x führen mit der Lösung

$$\ln x = C - \int \frac{g(1,v)\,\mathrm{d}v}{f(1,v) + vg(1,v)} \ .$$

(b) Im Fall einer exakten DGL, d.h. falls

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \ ,$$

ist die Lösung direkt gegeben als

$$\int f(x,c)\,\mathrm{d}x + \int g(c,y) \frac{\partial}{\partial y} \int f(x,c)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = C \ .$$

8. Eine *nichtlineare DGL 2ter Ordnung ohne erste Ableitung und ohne Terme in x* hat die For

$$y'' = f(y) \ .$$

Diese DGL kann durch Multiplikation mit

$$2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

gelöst werden. Nach Multiplikation ergibt sich mit

$$y' = \left[2 \int f(y)\,\mathrm{d}y + C\right]^{\frac{1}{2}} \ .$$

eine separierbare DGL (siehe (1)).

9. Eine *nichtlineare DGL 2ter Ordnung mit fehlender abhängiger Variable* hat die Form

$$f(y'', y', x) = 0 \ .$$

Die Gleichung wird durch Reduktion auf eine DGL 1ster Ordnung mit Hilfe einer *p-substitution*

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \ .$$

reduziert. Diese DGL kann mit irgendeinem Verfahren gelöst werden und liefert p. Eine zweite Integration liefert dann y.

10. Eine *nichtlineare DGL 2ter Ordnung mit fehlender unabhängiger Variable* hat die Form

$$f(y'', y', y) = 0 \ .$$

Wie in (9) wird die Ordnung der DGL durch p-Substitution reduziert:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \ .$$

Weiteres Verfahren wie in (9).