Spickzettel Felder

Grundbegriffe

- Ein *Skalarfeld* ordnet den Punkten $\vec{r}$ eines Raumbereichs eindeutig einen Skalar $A = A(\vec{r})$ zu.
- Die Anwendung des Nabla-Operators auf ein Skalarfeld liefert den Gradienten, einen Vektor der Betrag und Richtung der stärksten Steigung in jedem Punkt des Feldes gibt. Da der Gradient eine jedem Raumpunkt zugeordnete vektorielle Größe ist, ist der Gradient ein Vektorfeld.
- Ein *Vektorfeld* ordnet den Punkten $\vec{r}$ eines Raumbereichs eindeutig einen Vektor zu: $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \sum A_i(\vec{r})\,\vec{e}_i$.
- Die Anwendung des Nabla-Operators auf ein Vektorfeld liefert die Divergenz (Quellstärke) des Feldes oder die Rotation (Wirbelhaftigkeit) des Feldes. Beides sind lokale, d.h. in jedem Raumpunkt definierte Größen, also wieder Felder. Die Divergenz ist ein Skalarfeld (der Nabla-Operator wird Skalar auf das Vektorfeld angewendet), die Rotation ein Vektorfeld (der Nabla-Operator wird vektoriell auf das Vektorfeld multipliziert).

Spezielle Felder

- homogenes Feld $A(x, y, z) = \text{const}$: der Gradient verschwindet. Symmetriegerechte Koordinaten: kartesische Koordinaten.
- axialsymmetrisches Feld $A = A(\varrho)$: der Gradient ist radial nach innen oder außen gerichtet. Symmetriegerechte Koordinaten: Polarkoordinaten (2D) oder Zylinderkoordinaten (3D)
  Beispiel: $A = x^2 + y^2 = \varrho^2$ liefert $\nabla A = 2x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y = 2\vec{r}$. Der Gradient ist radial nach außen gerichtet, steht senkrecht auf den Äquipotentiallinien (konzentrische Kreise) und nimmt nach außen zu.
  Allgemeiner Fall: $A \sim \varrho^n$ liefert den Gradienten
  $$\nabla\varrho^n = \frac{\partial\varrho^n}{\partial\varrho}\vec{e}_\varrho = n\varrho^{n-1}\,\vec{e}_\varrho\ .$$
- radialsymmetrisches Feld (Zentralfeld) $A = A(r)$: der Gradient ist radial nach innen oder außen gerichtet. Symmetriegerechte Koordinaten: Kugelkoordinaten.
  Allgemeiner Fall: $A \sim r^n$ liefert den Gradienten
  $$\nabla r^n = \frac{\partial r^n}{\partial r}\vec{e}_r = nr^{n-1}\,\vec{e}_r\ .$$
- Wirbelfeld $\vec{A} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ lässt sich nur als Vektorfeld sinnvoll definieren, daher kann kein Gradient bestimmt werden.