Spickzettel Divergenz

Grundbegriffe

- Die *Divergenz* eines Vektorfeldes $\vec{A}(x,y,z) = (A_x, A_y, A_z)$ ist das skalare Feld

$$\mathrm{div}\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\ .$$

- wie der Gradient ist die Divergenz eine *lokale Größe*. Sie ordnet jedem Punkt $\vec{r}$ eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ eine Quellstärke div $\vec{A} = \nabla \vec{A}$ zu.

- Zur anschaulichen Interpretation benötigen wir die Definition des Flusses Φ eines Vektorfeldes $\vec{A}$ durch eine Fläche (mit $\mathrm{d}\vec{S}$ als Flächenelement):

$$\Phi = \int \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\ .$$

- die Divergenz eines Wirbelfeldes verschwindet: div (rot $\vec{A}$) $= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$.

- in einem konstanten Feld verschwindet die Divergenz ebenfalls (trivial).

Koordinatensysteme

- Kugelkoordinaten:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta A_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\ .$$

- Zylinderkoordinaten:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\ .$$

Rechenregeln

- konstantes Feld $\vec{A} = \vec{c}$

$$\mathrm{div}\vec{c} = \nabla \cdot \vec{c} = 0\ .$$

- Summenregel

$$\mathrm{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B} = \mathrm{div}\vec{A} + \mathrm{div}\vec{B}$$

- Faktorregel

$$\mathrm{div}(\alpha\vec{A}) = \nabla \cdot (\alpha\vec{A}) = \alpha\,\nabla \cdot \vec{A} = \alpha\,\mathrm{div}\vec{A}\ .$$

- Produktregel bei der Multiplikation eines Skalar- und eines Vektorfeldes:

$$\mathrm{div}(A\,\vec{B}) = \nabla \cdot (A\,\vec{B}) = A\,\nabla \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \nabla A = A\,\mathrm{div}\vec{B} + \vec{B} \cdot \mathrm{grad}A\ .$$