Spickzettel Nabla-Operator zusammengefasst

Allgemeines

- der Nabla-Operator ∇ ist ein aus den Ableitungen nach den Koordinaten gebildeter Vektor, in krummlinigen Koordinaten entsprechen die Vorfaktoren den bereits aus der Jacobi-Determinanten bekannten.
- in kartesischen Koordinaten ist der Nabla-Operator gegeben als

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} .$$

- der Nabla-Operator wird auf Felder angewandt, das Ergebnis ist wieder ein Feld:
  - der *Gradient* ordnet jedem Punkt $\vec{r}$ eines Skalarfeldes $U(\vec{r})$ Betrag und Richtung der maximalen Steigung zu: $\nabla U = \text{grad } U$. Das Ergebnis ist daher ein Vektorfeld.
  - die *Divergenz* ordnet jedem Punkt $\vec{r}$ eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ die (lokale) Quellstärke zu: $\nabla \cdot \vec{A} = \text{div } \vec{A}$. Das Ergebnis ist ein Skalarfeld.
  - die *Rotation* ordnet jedem Punkt $\vec{r}$ eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ die (lokale) Wirbelstärke zu: $\nabla \times \vec{A} = \text{rot } \vec{A}$. Das Ergebnis ist ein Vektorfeld.

Koordinatensysteme

siehe auf den Zetteln für Gradient, Divergenz und Rotation. Achtung: der Nabla-Operator in krummlinigen Koordinaten hat für jede dieser Operationen eine andere Form!

Zusammenhänge

- Gradientenfelder sind wirbelfrei:

$$\text{rot}\,(\text{grad} A) = \nabla \times (\nabla A) = 0 .$$

- Wirbelfelder sind quellenfrei:

$$\text{div}\,(\text{rot}\vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 .$$

- wirbelfreie Vektorfelder lassen sich als der Gradient eines Skalarfeldes darstellen:

$$\text{rot}\,\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{A} = \text{grad}\,B = \nabla B .$$

- quellenfreie Vektorfelder lassen sich als die Rotation eines anderen Vektorfeldes darstellen:

$$\text{div}\,\vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} = \nabla \times \vec{A} .$$

Rechenregeln ('Mehrfachprodukte')

- $$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot}\vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot}\vec{B} .$$
- $$\text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) .$$
- $$\text{rot}\,\text{rot}\vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A} .$$