Spickzettel Weg- und (Ober-)Flächenintegral

Wegintegral

- Integration entlang eines Weges, Beispiel Arbeit $W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.
- Umwandlung in ein gewöhnliches Integral durch Parametrisierung des Weges $\vec{s}(t)$ und damit

$$\mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \dot{\vec{s}}\,\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int \vec{F} \cdot \dot{\vec{s}}\,\mathrm{d}t\ .$$

- Achtung: Weg und Feld im gleichen Koordinatensystem.
- Bogenlänge entlang des zurück gelegten Weges:

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}|\,\mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

- Tangenteneinheitsvektor $\vec{t}$ und Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$:

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \qquad \text{und} \qquad \vec{n} = \frac{\dot{\vec{t}}}{|\dot{\vec{t}}|}\ .$$

- Konservative Felder:
  - Das Linienintegral ist vom eingeschlagenen Weg unabhängig.
  - Das Linienintegral entlang einer geschlossenen Kurve verschwindet: $\oint \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = 0$.
  - Das Vektorfeld ist als Gradient eines Potentials U darstellbar: $\vec{F} = \nabla U$.
  - Das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ ist das totale Differential eines Potentials U: $\mathrm{d}U = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.
  - Das Vektorfeld ist wirbelfrei: $\nabla \times \vec{F} = 0$.
- Das Kurvenintegral ist additiv: kann die Kurve $\mathcal{C}$ in zwei Abschnitte $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ zerlegt werden, so gilt

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\ .$$

(Ober-)Flächenintegral

- Beispiel Fluss eines Feldes $\vec{F}$ durch eine (Ober-)Fläche $\mathrm{d}\vec{S}$

$$\Phi = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \text{bzw.} \qquad \Phi = \oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\ .$$

- Umwandlung in ein gewöhnliches Integral durch Parametrisierung der Fläche mit den Tangentenvektoren $\vec{t}_u$ und $\vec{t}_v$ an die Parameterlinien:

$$\mathrm{d}A = |\vec{t}_u \times \vec{t}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \qquad \text{mit} \qquad \vec{t}_u = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\,, \quad \vec{t}_v = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v\ .$$

  und damit

$$\int\limits_{\mathcal{A}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{\mathcal{A}} \vec{F} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \int\limits_{u_1}^{u_2}\int\limits_{v_1}^{v_2} \vec{F} \cdot (\vec{t}_u \times \vec{t}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\ .$$

Spickzettel Integralsätze

Integralsätze

- Der *Integralsatz von Gauß (Divergenztheorem)* besagt, dass der Fluss eines Vektorfeldes $\vec{F}$ durch eine Oberfläche $O(V)$ eines Volumens V gleich dem Volumenintegral der Divergenz über das Volumen ist:
$$\oint\limits_{\mathcal{O}(\mathcal{V})} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{F}\, \mathrm{d}V \; .$$

- Der *Integralsatz von Stokes* besagt, dass die Zirkulation eines Vektorfeldes $\vec{F}$ entlang der Umrandung $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ einer Fläche $\mathcal{S}$ gleich dem Flächenintegral der Rotation des Feldes über die Fläche ist:
$$\oint\limits_{\mathcal{C}(\mathcal{S})} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \; .$$

Anwendung Maxwell'sche Gleichungen

- Gauß'sches Gesetz des elektrischen Feldes in Integralform
$$\oint\limits_{\mathcal{O}(\mathcal{V})} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{\mathcal{V}} \frac{\varrho}{\varepsilon_0}\, \mathrm{d}V$$
besagt: der Fluss des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Fläche im drei-dimensionalen Raum (linke Seite) ist gleich der von dieser Fläche eingeschlossenen Ladung (rechte Seite). Umwandlung in differentielle Form mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes:
$$\mathrm{div}\vec{E} = \nabla\vec{E} = \frac{\varrho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \; .$$

- Ampere'sches Gesetz:
$$\oint\limits_{\mathcal{C}(S)} \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 \int\limits_{S} \vec{j}\, \mathrm{d}\vec{S} + \mu_0\varepsilon_0 \int\limits_{S} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\, \mathrm{d}\vec{S} \; .$$
Es besagt, dass ein Strom der Stromdichte $\vec{j}$ oder die Änderung eines elektrischen Flusses Phi_{E} ein Magnetfeld erzeugt. Dieses Feld umschließt den Strom bzw. den sich ändernden elektrischen Fluss. Die differentielle Form ergibt sich durch Anwendung des Stokes'schen Integralsatzes:
$$\mathrm{rot}\;\vec{B} = \nabla\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{j} \; .$$

- Faraday'sches Gesetz:
$$\oint \vec{E}\, \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\partial\Phi_{\mathrm{B}}}{\partial t} \; .$$
Es besagt, dass ein sich ändernder magnetischer Fluss ein elektrisches Feld um das Magnetfeld herum erzeugt. In differentieller Form lässt sich dieses elektrische Wirbelfeld schreiben als
$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \; .$$