Spickzettel Partielle DGLs (Laplace und Poisson Gleichung)

Laplace Gleichung

- *Laplace Gleichung*: $\nabla^2 U = 0$ homogene DGL, Grundgleichung Potentialtheorie (Gravitationspotential, elektrostatisches Potential, auch Temperaturverteilungen)
- Lösungsverfahren: Separationsansatz (in den einzelnen räumlichen Koordinaten)
- 2D Platte (rechteckig), Separationsansatz $T(x,y) = X(x)\,Y(y)$, Separationskonstante $-\beta^2$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{c} X'' + \beta^2 X = 0 \\ Y'' - \beta^2 Y = 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{r} X_n(x) = \gamma_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \gamma_2 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\ Y_n(y) = \gamma_3 \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + \gamma_4 \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \end{array}$$

  Ein Teil der γ_i verschwindet hoffentlich bei Berücksichtigung der Randbedingungen, die Gesamtlösung ergibt sich wie bei der schwingenden Platte durch Überlagerung der Einzellösungen.

Poisson Gleichung

- die *Poisson Gleichung* entspricht formal der Laplace Gleichung mit zusätzlich einer Inhomogenität, die die Quellen beschreibt: $\Delta U = f$.
- häufigste Geometrie punktsymmetrisch (Gravitationspotential der Erde mit letzterer als Punktmasse, elektrostatisches Potential einer Punktladung). Formal: Laplace-Operator in Kugelkoordinaten darstellen, es überlebt nur der radiale Anteil.
- für beliebige radiale Abhängigkeiten des Potentials $U = U(r)$ ist die Poisson Gleichung darstellbar als $\Delta U = r^{n-1}$. Diese lässt sich in Kugelkoordinaten durch Integration direkt lösen (an Fallunterscheidung denken, um Division durch Null zu vermeiden!):

$$\Delta U = r^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) = r^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lr} n = -1: & U = \ln r - c_1/r + c_2 \\ n = -2: & U = -\frac{\ln r + 1}{r} - c_1/r + c_2 \\ n \text{ sonst}: & U = \frac{r^{n+1}}{(n+1)(n+2)} - c_1/r + c_2 \end{array}$$

- Spezialfall Potential einer Punktladung im Ursprung:

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \ .$$

  Gleichzeitig auch Green'sche Funktion (Impulsantwort). Allgemeinere Ladungsverteilungen durch Überlagerung der Green'schen Funktionen der einzelnen Punktladungen an ihren jeweiligen Orten $\vec{r}_i$ (Poisson-Integral im Falle einer kontinuierlichen Ladungsverteilung).