UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

Prof. Dr. May-Britt Kallenrode Fachbereich Physik

# Vorkurs Physik

## Mathematische Grundlagen (Schulstoff)

Osnabrück, 10. Juni 2007

# Vorbemerkung

§ **1** Dieser Vorkurs wendet sich an potentielle Studierende der Physik. Er hat das Ziel, Ihre rechentechnischen/mathematischen Fertigkeiten aufzupolieren, damit Sie sich in den Vorlesungen stärker auf die physikalischen Inhalte konzentrieren können und nicht durch die Nebenrechnungen abgelenkt werden.

§ **2** Wie von fast jedem Lehrbuch versprochen, wendet sich auch dieser Vorkurs an Anfänger (oder besser mathematisch weniger Geübte) ebenso wie an Fortgeschrittene (oder besser mathematisch Gewandte). Er soll helfen

- weiter zurück liegende mathematische Inhalte (insbesondere bei längerer Pause zwischen Schule und Beginn des Studiums) von der darüber liegenden Staubschicht zu befreien und wieder in das Gedächtnis zu rufen.
- den flinkeren Umgang mit bereits bekannten mathematischen Fertigkeiten zu trainieren.
- sich an das Rechnen mit Symbolen statt mit konkreten Zahlen zu gewöhnen.
- einige bekannte mathematische Verfahren in einem größeren Zusammenhang zu sehen.
- einen ersten Einblick in Anwendungen der bereits aus der Schulmathematik bekannten Grundlagen in der Physik zu erhalten.

# Verfahrensregeln

§ **3** Der Vorkurs gliedert sich in 6 Lernfelder:

1. Elementares wie binomische Formeln, Potenzen, quadratische Gleichungen und lineare Gleichungssysteme
2. Vektoren
3. Funktionen
4. Differentiation
5. Integration
6. (komplexe) Zahlen

Jedes Lernfeld beginnt mit einem kurzen Selbsttest. Bestehen Sie diesen ohne Probleme, so können Sie das Lernfeld zügig durchgehen und sich dem jeweiligen Abschlusstest zuwenden. Sollten Sie beim Selbsttest auf Probleme stoßen – keine Panik, die Aufgaben werden im entsprechenden Lernfeld detailliert besprochen.

§ **4** Der Abschlusstest am Ende eines jeden Lernfeldes muss korrekt gelöst werden – sonst bleibt Ihnen (in der elektronischen Version) der Zugang zum folgenden Lernfeld erst einmal verwehrt. Die meisten Testaufgaben können direkt online gelöst werden, so dass die Freischaltung des nächsten Lernfeldes umgehend erfolgt. Einige der Testaufgaben lassen sich nicht online korrigieren. Senden Sie diese als pdf-Datei per e-mail an `vorkurs.physik@uos.de`. Welche Textverarbeitung Sie auch benutzen: quälen Sie sich nicht zu lange mit den Formeln, Sie können diese auch handschriftlich abgeben – dann allerdings in lesbarer Schrift und gegebenenfalls gescannt. Falls ein elektronisches Einreichen der Unterlagen nicht möglich ist, senden Sie diese bitte an Vorkurs Physik, c/o Prof. Kallenrode, Fachbereich Physik, Universität Osnabrück, Barbarastr. 7, D-49076 Osnabrück.

§ **5** Bei Fragen/Wünschen/Anregungen stehen Ihnen die Tutoren des Vorkurses gerne zur Seite. Diese sind ebenfalls per e-mail unter `vorkurs.physik@uos.de` zu erreichen.

§ **6** Der Vorkurs ist ohne Taschenrechner zu bearbeiten! Nur in ganz wenigen Ausnahmen (z.B. Funktionswerte von Winkelfunktionen) kann ein einfacher Taschenrechner helfen. Sonst rechnen Sie von Hand – spätestens wenn Sie nicht mehr mit konkreten Zahlen sondern symbolisch rechnen, ist der Taschenrechner ohnehin kein geeignetes Hilfsmittel mehr.

## Symbole und Abkürzungen

### Mengenlehre

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Menge der natürlichen Zahlen |
| $\mathbb{Z}$ | Menge der ganzen Zahlen |
| $\mathbb{Q}$ | Menge der rationalen Zahlen |
| $\mathbb{R}$ | Menge der reellen Zahlen |
| $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ | Menge der reellen Zahlen ohne Null (oder was sonst in der Klammer steht) |
| $\mathbb{C}$ | Menge der komplexen Zahlen |
| $\emptyset$ | leere Menge |
| $\in$ | Element von, z.B. $1 \in \mathbb{N}$ |
| $\ni$ | nicht Element von, z.B. $\pi \ni \mathbb{N}$ |
| $\subset$ | Teilmenge von, z.B. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ |
| $\cap$ | Schnittmenge, z.B. $\{1,2,3\} \cap \{2,4,6\} = \{2\}$ |
| $\cup$ | Vereinigungsmenge, z.B. $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$ |

### Sonstige mathematische Symbole

| | |
|---|---|
| $\forall$ | für alle |
| $\exists$ | existiert (ein) |
| $\neg$ | Verneinung |
| $\vee$ | logisches und |
| $\wedge$ | logisches oder |
| $>, \geq, \gg$ | größer, größer gleich, sehr viel größer |
| $<, \leq, \ll$ | kleiner, kleiner gleich, sehr viel kleiner |
| $=, \neq, \approx$ | gleich, nicht gleich, ungefähr gleich |
| $\stackrel{!}{=}$ | Gleichheit gefordert, z.B. bei Nullstellenbestimmung $f(x) \stackrel{!}{=} 0$ |
| $\sim$ | proportional |
| $\infty$ | unendlich |
| $\sum$ | Summenzeichen, z.B. $\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1 + 4 + 9$ |
| $\prod$ | Produkt, z.B. $\prod_{k=1}^{3} k = 1 \cdot 2 \cdot 3$ |
| $\angle(a,b)$ | von den Seiten $a$ und $b$ eingeschlossener Winkel |
| $\Re(z)$ | Realteil einer komplexen Zahl $z = a + bi$, $\Re(z) = a$ |
| $\Im(z)$ | Imaginärteil einer komplexen Zahl $z = a + bi$, $\Im(z) = b$ |

### Griechisches Alphabet

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | Alpha | $\beta$ | Beta | $\gamma, \Gamma$ | Gamma |
| $\delta, \Delta$ | Delta | $\varepsilon$ | Epsilon | $\zeta$ | Zeta |
| $\eta$ | Eta | $\vartheta, \Theta$ | Theta | $\iota$ | Iota |
| $\kappa$ | Kappa | $\lambda, \Lambda$ | Lambda | $\mu$ | Mu, Mü |
| $\nu$ | Nü | $\xi, \Xi$ | Xi | $o$ | Omnikron |
| $\pi, \Pi$ | Pi | $\varrho$ | Rho | $\sigma, \Sigma$ | Sigma |
| $\tau$ | Tau | $\upsilon, \Upsilon$ | Ypsilon | $\varphi, \Phi$ | Phi |
| $\chi$ | Chi | $\psi, \Psi$ | Psi | $\omega, \Omega$ | Omega |

In der Tabelle sind jeweils die Klein- und Großbuchstaben gegeben. Wo Großbuchstaben fehlen, sind diese den lateinischen Buchstaben so ähnlich, dass sie ohnehin nur mit diesen verwechselt würden.

Beispiele für physikalische Größen, die mit griechischen Buchstaben bezeichnet werden:

| | |
|---|---|
| $\kappa$ | Absorptionskoeffizient |
| $\lambda$ | Wellenlänge, mittlere freie Weglänge |
| $\varrho$ | Dichte |
| $\phi$ | Winkel |
| $\omega$ | Winkelgeschwindigkeit |

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Lernfeld: Zum Aufwärmen

## 1.1 Übersicht und Selbsttest

§ **7** In diesem Lernfeld werden zum Aufwärmen einfache Rechenverfahren wiederholt: die binomischen Formeln, das Lösen einer quadratischen Gleichung, lineare Gleichungssysteme sowie das Rechnen mit Potenzen. Nach Durcharbeiten dieses Lernfeldes sollte der sichere Umgang mit diesen Verfahren für Sie kein Problem mehr sein.

§ **8** Der folgende Test dient zur Selbsteinschätzung ihrer Fähigkeiten und Vorkenntnisse in diesem Lernfeld:

**Aufgabe 1** Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke unter Verwendung der binomischen Formeln.

$$\begin{aligned}
(2a+3b)^2 &= \square\, a^2 + \square\, ab + \square\, b^2\,,\\
(4a-9b)^2 &= \square\, a^2 + \square\, ab + \square\, b^2\,,\\
(5a+3b)(3b-5a) &= \square\, a^2 + \square\, ab + \square\, b^2\,,\\
(2a+5b)^3 &= \square\, a^3 + \square\, a^2b + \square\, ab^2 + \square\, b^3\;.
\end{aligned}$$

Die Lösung geben Sie ein, indem Sie in die Kästchen jeweils die entsprechenden Vorfaktoren (gegebenenfalls mit Vorzeichen!) eintragen.

**Aufgabe 2** Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen (mit einer Methode Ihrer Wahl):

$$\begin{aligned}
x^2 - 25 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = \square \quad \text{und} \quad x_2 = \square\\
x^2 - 5x - 24 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = \square \quad \text{und} \quad x_2 = \square\\
4x^2 - 24x + 140 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = \square \quad \text{und} \quad x_2 = \square\;.
\end{aligned}$$

Tragen Sie die Lösungen $x_1$ und $x_2$ in die dafür vorgesehenen Kästchen ein; die kleinere Zahl zuerst.

**Aufgabe 3** Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 29\\
-x_1 + 8x_2 - x_3 &= -24\\
4x_1 + x_2 - 5x_3 &= -15 \qquad\qquad x_1 = \square\,, \quad x_2 = \square \quad x_3 = \square\;.
\end{aligned}$$

Tragen Sie die Lösungen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

**Aufgabe 4** Fassen Sie die folgenden Potenzen zusammen.

$$\frac{a^{x+1}\cdot b^{x+3}\cdot a^{3x-1}\cdot b^{x+3}}{a^{x-2}\cdot b^{3-x}\cdot a^{x}\cdot b^{x+1}} \quad\Rightarrow\quad \square\cdot a^{\square}\cdot b^{\square}$$

$$\frac{(6a-12b)^2\cdot(3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2} \quad\Rightarrow\quad \square\cdot a^{\square}\cdot b^{\square}\;.$$

Tragen Sie die sich ergebenden Exponenten und etwaige Vorfaktoren in die Kästchen auf der rechten Seite ein.

§ **9** Haben Sie alle Aufgaben korrekt gelöst, so brauchen Sie die Texte und Trainings-Aufgaben der folgenden Abschnitte nur zu überfliegen und können sich der Bearbeitung des jeweiligen Abschlusstests zuwenden. Nur wenn dieser erfolgreich bestanden wurde, gelangen Sie in das nächste Themenfeld bzw. nach dem letzten Abschlusstest in das Lernfeld 2 Vektoren.

§ **10** Fiel Ihnen die Lösung einer oder mehrerer Aufgaben dagegen schwer, so arbeiten Sie die zugehörigen Abschnitte entsprechend gründlicher durch. Jeder der Abschnitte beginnt mit einer Einleitung und durchgerechneten Beispielen und lässt Sie dann an weiteren Aufgaben trainieren. Auch für die obigen Aufgaben finden Sie dort ausführliche Lösungen.

## 1.2 Binomische Formeln

§ **11** Erläuterung: in diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Ausdrücken, die eine Potenz einer Summe (oder Differenz) von zwei Zahlen $a$ und $b$ bilden.

§ **12** Die binomischen Formeln aus der Schulmathematik sind

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\,,\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \qquad \text{und}\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2\;.\end{aligned}$$

Die beiden oberen binomischen Gleichungen lassen sich in kompakter Schreibweise in einer Gleichung zusammen fassen:

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2\;.$$

§ **13** Als erstes überprüfen wir die binomischen Formeln für Beispiele. Mit $a = 3$ und $b = 5$ ergibt sich

$$(3+5)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 5 + 5^2 = 9 + 30 + 25 = 64\,,$$

was mit

$$(3+5)^2 = 8^2 = 64$$

identisch ist. Für die zweite binomische Formel erhalten wir entsprechend

$$(3-5)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot(-5) + (-5)^2 = 9 - 30 + 25 = 4\,,$$

was wiederum mit

$$(3-5)^2 = (-2)^2 = 4$$

identisch ist.

**Zwischenrechnung 1** Falls Sie sich mit den binomischen Gleichungen unbehaglich fühlen, überprüfen Sie diese Gleichung und die anderen durch Einsetzen anderer Zahlenpaare für $a$ und $b$ – vergessen Sie dabei auch die negativen Zahlen oder einfache Brüche nicht.

§ **14** Bei der Anwendung der binomischen Formeln auf Ausdrücke wie in Aufgabe 1 ist etwas mehr Sorgfalt geboten. Diese Ausdrücke haben die Form $(n\cdot a + m\cdot b)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ oder gar $m, n \in \mathbb{R}$. Quadrieren eines derartigen Ausdrucks liefert

$$\begin{aligned}(n\cdot a + m\cdot b)^2 &= ([n\cdot a] + [m\cdot b])^2\\ &= [n\cdot a]^2 + 2\cdot[n\cdot a]\cdot[m\cdot b] + [m\cdot b]^2\\ &= n^2\,a^2 + 2mn\,ab + m^2b^2\;. \qquad (1)\end{aligned}$$

§ **15** Eine Anmerkung zur Notation: in der letzten Zeile wurden die Multiplikationszeichen weggelassen. Dies ist üblich, so lange durch das Weglassen kein Missverständnis entstehen kann: beim Produkt 2 mal 3 muss das Multiplikationszeichen beibehalten werden, $2\cdot 3$, da sonst mit 23 ein Ausdruck entsteht, der als die Zahl 'dreiundzwanzig' interpretiert wird. Bei einem Produkt aus einer Zahl und einer mit einem Buchstaben bezeichneten Variablen, z.B. $3\cdot a = 3a$, kann ein derartiges Missverständniss nicht auftreten. Bei einem Produkt zwischen zwei durch Buchstaben gegebenen Variablen $a$ und $b$ sind Missverständnisse solange ausgeschlossen, wie es keine mit $ab$ bezeichnete Variable gibt.

### 1.2.1 Beispiele

§ **16** Mit (1) erhalten wir schrittweise die Lösungen zu Aufgabe 1. Die erste Aufgabe wird durch ein Binom der Form $(a+b)^2$ gelöst:

$$\begin{aligned}(2a+3b) &= (2a)^2 + 2\cdot(2a)\cdot(3b) + (3b)^2\\ &= 4\,a^2 + 12\,ab + 9b^2\;.\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{l ccccccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
n=1 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
n=2 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
n=3 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
n=4 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
n=5 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
n=6 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
n=7 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
n=8 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

Abbildung 1: Pascal Dreieck

Bei der zweiten Aufgabe erhalten wir bei Interpretation als ein Binom der Form $(a-b)^2$

$$
\begin{aligned}
(4a-9b) &= (4a)^2 - 2\cdot(4a)\cdot(9b) + (9b)^2 \\
&= 16\,a^2 - 72\,ab + 81\,,
\end{aligned}
$$

oder bei Beschränkung auf Binome der Form $(a+b)^2$:

$$
\begin{aligned}
(4a-9b)^2 &= (4a+(-9b))^2 \\
&= (4a)^2 + 2\cdot(4a)\cdot(-9b) + (-9b)^2 \\
&= 16\,a^2 - 72\,ab + 81\,b^2\ .
\end{aligned}
$$

§ **17** Bei der dritten Aufgabe erhält man durch Umstellen der Ausdrücke eine Form, die dem dritten Binom entspricht:

$$
\begin{aligned}
(5a+3b)(3b-5a) &= (3b+5a)(3b-5a) \\
&= (3b)^2 - (5a)^2 \\
&= 9b^2 - 25a^2\ .
\end{aligned}
$$

§ **18** Die letzte Aufgabe lässt sich auf verschiedene Weisen lösen. Entweder kennt man das Pascal'sche Dreieck (siehe unten) und wendet dieses an,

$$
\begin{aligned}
(2a+5b)^3 &= (2a)^3 + 3\cdot(2a)^2\cdot(5b) + 3\cdot(2a)\cdot(5b)^2 + (5b)^3 \\
&= 8\,a^3 + 60\,a^2b + 150\,ab^2 + 125\,b^3\,,
\end{aligned}
$$

oder man zerlegt die Potenz in ein Produkt aus dem Ausdruck in der Klammer und dessen Quadrat, wobei letzteres wieder ein Binom ist:

$$
\begin{aligned}
(2a+5b)^3 &= (2a+5b)\,(2a+5b)^2 \\
&= (2a+5b)\,((2a)^2 + 2\cdot(2a)\cdot(5b) + (5b)^2) \\
&= (2a+5b)\,(4\,a^2 + 20\,ab + 25b^2) \\
&= 8\,a^3 + 40\,a^2b + 50\,ab^2 + 20\,a^2b + 100\,ab^2 + 125\,b^3 \\
&= 8\,a^3 + 60\,a^2b + 150\,ab^2 + 125\,b^3\ .
\end{aligned}
$$

### 1.2.2 Vertiefung: Pascal'sches Dreieck

§ **19** Die binomischen Formeln sind Spezialfälle der binomischen Reihe. Für höhere Potenzen des Ausdrucks $(a+b)$, d.h. für $(a+b)^n$, kann das Pascal'sche Dreieck verwendet werden, siehe Abb. 1. Die einzelnen Zeilen geben die Koeffizienten $c_i$ vor den verschiedenen Potenzen von $a$ und $b$. Jede Zeile des Dreiecks ergibt sich aus der voran gegangenen dadurch, dass man an den Außenrändern jeweils eine Eins ergänzt und die inneren Koeffizienten als die Summe der rechts und links in der Zeile darüber stehenden Koeffizienten bildet.

§ **20** Die Koeffizienten $c_i$ sind wie folgt angeordnet:

$$
(a+b)^n = c_1a^n + c_2b^1a^{n-1} + c_3b^2a^{n-2} + \ldots c_{n+1}b^n\ .
$$

Die erste Zeile entspricht

$$
(a+b)^0 = 1\ .
$$

Das ist korrekt, da alle reellen Zahlen hoch Null, d.h. alls Ausdrücke $x^0$, Eins ergeben. In der zweiten Zeile steht einfach $(a + b)^1$, also $a + b$. Die dritte Zeile ($n = 2$) entspricht der klassischen binomischen Formel. Bis hier waren die Ergebnisse trivial. Für die vierte Zeile, $n = 3$, erhalten wir aus dem Pascal Dreieck

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 \; .$$

Nachrechnen liefert

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)^2 \cdot (a + b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 \; . \end{aligned}$$

Für $n = 3$ hat das Pascal Dreieck offenbar funktioniert. Den erwarteten Ausdruck für $n = 4$,

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

überprüfen wir noch einmal direkt:

$$\begin{aligned} (a + b)^4 &= (a + b)^2(a + b)^2 \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \; . \end{aligned}$$

Bis $n = 4$ haben wir jetzt die Anwendbarkeit des Pascal Dreiecks gezeigt, für höhere Potenzen glauben wir an dieser Stelle, dass es korrekt ist.

### 1.2.3 Rechentraining

§ **21** Die Aufgaben in diesem Abschnitt dienen der Übung. Wie viele Sie davon bearbeiten, steht Ihnen frei. Im Gegensatz zum Selbst- und Abschlusstest geben Sie die Lösungen hier nicht zur Online-Überprüfung ein sondern vergleichen Sie mit den vorgegebenen Lösungen. Durch Anklicken der Schaltfläche `Hilfe` erhalten Sie einen Hinweis zur Lösung der entsprechenden Aufgabe – diese Hilfe sollten Sie aber erst verwenden, wenn Sie alleine nicht weiter kommen. Über die Schaltfläche `Musterlösung` erhalten Sie bei einigen der Aufgaben eine Musterlösung mit vollständigem Lösungsweg, sonst erhalten Sie über die Schaltfläche `Lösung` eine nicht weiter kommentierte Lösung.

**Aufgabe 5** Berechnen Sie

$$5(8 - 2x)^2 = \Box x^4 + \Box x^3 + \Box x^2 + \Box x^1 + \Box \; .$$

Überlegen Sie, bevor Sie die Kästchen ausfüllen!

Hilfe zur Aufgabe in § 448 Musterlösung in § 464

**Aufgabe 6** Berechnen Sie

$$5xy(2x + 5y)(-2x + 5y) = \Box x^4 + \Box x^3y + \Box x^2y^2 + \Box xy^3 + \Box y^4 + \Box \; .$$

Hilfe zur Aufgabe in § 449 Musterlösung in § 465

**Aufgabe 7** Berechnen Sie

$$(a + b)^2(a - b)^2 = \Box a^4 + \Box a^3b + \Box a^2b^2 + \Box ab^3 + \Box a^4 + \Box$$

Achtung: es gibt eine einfache und eine aufwendige Möglichkeit – vorher Nachdenken!

Hilfe zur Aufgabe in § 450 Musterlösung in § 466

**Aufgabe 8** Berechnen Sie

$$5(a + b)^5 = \Box a^5 + \Box a^4b + \Box a^3b^2 + \Box a^2b^3 + \Box ab^4 + b^5$$

einmal unter Verwendung des Pascal'schen Dreiecks und einmal möglichst ökonomisch nur unter Verwendung der Binome.

Hilfe zur Aufgabe in § 451 Musterlösung in § 467

**Aufgabe 9** Berechnen Sie

$$((2+x)^2 + (2-x)^2)^2 = \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x^1 + \square \,.$$

Hilfe zur Aufgabe in § 452 Musterlösung in § 468

### 1.2.4 Abschlusstest

§ **22** Die Aufgaben in diesem Abschnitt sind gleichsam die Prüfungsaufgaben. Sie müssen mindestens vier der Fragen korrekt beantwortet haben, um auf in das nächste Themenfeld zu gelangen. Die ersten drei Aufgaben sind sehr einfach, bei den folgenden Aufgaben müssen Sie etwas mehr Sorgfalt walten lassen.

**Aufgabe 10** Berechnen Sie

$$3(4x+3)^2 = \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x^1 + \square$$

**Aufgabe 11** Berechnen Sie

$$2(5x-2)^2 = \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x^1 + \square$$

**Aufgabe 12** Berechnen Sie

$$4(2x^2-x)(2x^2+x) = \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x^1 + \square$$

**Aufgabe 13** Berechnen Sie

$$(2x^2-3x)^3 = \square x^6 + \square x^5 + \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x^1 + \square$$

**Aufgabe 14** Berechnen Sie

$$(2x-3)^6 = \square x^6 + \square x^5 + \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x^1 + \square$$

**Aufgabe 15** Berechnen Sie

$$(2a-4b)^2 = \square a^{\square} b^{\square} + \square a^{\square} b^{\square} + \square a^{\square} b^{\square}$$

## 1.3 Quadratische Gleichungen

§ **23** Eine quadratische Gleichung ist eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \,.$$

Durch Division durch $a$ lässt sich eine derartige Gleichung stets auf eine Normalform bringen:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \text{mit} \qquad p = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad q = \frac{c}{a} \,.$$

§ **24** Zur Lösung der quadratischen Gleichung stehen zwei Verfahren, oder genauer zwei unterschiedliche Formulierungen eines Verfahrens, zur Verfügung. Das einfache Lösungsschema ist die pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \,.$$

Diese Formel zeigt uns schnell, ob die quadratische Gleichung eine Lösung im Reellen hat. Ist der Radikand, hier auch bezeichnet als Diskriminante $D$, kleiner Null, so gibt es nur eine komplexe Lösung:

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{quad. Glg. hat keine reelle Lösung} \,.$$

Auf diesen Fall werden wir in Lernfeld 6 ‘Komplexe Zahlen’ zurück kommen.

§ **25** Betrachten wir ein Beispiel für die pq-Formel. Gegeben ist die Gleichung

$$2x^2 + 4x - \frac{5}{2} = 0 \; .$$

Division durch 2 bringt sie auf die Normalform

$$x^2 + 2x - \frac{5}{4} = 0 \; .$$

Anwenden der pq-Formel liefert

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{1 + \frac{5}{4}} \\ &= -1 \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\ &= -1 \pm \frac{3}{2} \end{aligned}$$

und damit

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\frac{5}{2} \; .$$

Einsetzen zur Probe liefert für $x_1$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

und für $x_2$:

$$2\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4\frac{5}{2} - \frac{5}{2} = \frac{25}{2} - \frac{20}{2} - \frac{5}{2} = 0 \; .$$

§ **26** Das zweite Lösungsverfahren ist die quadratische Ergänzung. Die einzelnen Schritte dieses Verfahrens liefern die pq-Formel. Bei der quadratischen Ergänzung gibt es keine Formel sondern nur ein Verfahrensschema: das hat den Vorteil, dass man sich keine Formel merken muss, aber auch den Nachteil, dass man keine einfache Formel zum Festhalten hat. Man löst die Gleichung in Anlehnung an die binomische Formel. Die quadratische Gleichung ist in Normalform gegeben:

$$x^2 + px + q = 0 \; .$$

Diese Gleichung soll auf eine Form

$$(x + v)^2 = w$$

gebracht werden, so dass man auf beiden Seiten die Wurzel ziehen und anschließend nach $x$ auflösen kann. Nach binomischer Formel gilt $(x + v)^2 = x + 2vx + v^2$. Setzen wir in unserer quadratischen Gleichung also

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + q = 0 \, ,$$

so erinnern zumindest die beiden ersten Terme an die binomische Formel. Uns fehlt dann nur noch ein $(p/2)^2$. Das können wir auf beiden Seiten der Gleichung addieren und erhalten

$$x^2 + 2\,\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(\frac{p}{2}\right)^2 \; .$$

Die ersten drei Terme links bilden einen Ausdruck entsprechend der binomischen Formel, das störende $q$ entfernen wir, in dem wir es auf beiden Seiten subtrahieren:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \; .$$

Wir ziehen auf beiden Seiten die Wurzel (wobei rechts explizit auf die positive und negative Wurzel hingewiesen wird):

$$x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ .$$

Auflösen nach $x_{1,2}$ liefert die bekannte pq-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ .$$

Das Verfahren der quadratischen Ergänzung hat uns damit die Erklärung für die pq-Formel geliefert.

§ **27** Wir nehmen wieder die quadratische Gleichung aus § 25, gleich in Normalform:

$$x^2 + 2x - \frac{5}{4} = 0\ .$$

Der Faktor vor dem $x$-Term ist eine 2, d.h. wir streben ein Binom der Form $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ an. Um dort hin zu gelangen, addieren wir die noch fehlende 1:

$$x^2 + 2x + 1 - \frac{5}{4} = 1\ ,$$

schreiben die ersten drei Terme links als Binom und addieren 5/4 um den verbleibenden Term auf die andere Seite zu bringen:

$$(x+1)^2 = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}\ .$$

Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen,

$$x_{1,2} + 1 = \pm\frac{3}{2}\ ,$$

und auflösen liefert die schon bekannten Lösungen

$$x_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}\ .$$

**Verständnisfrage 1** Warum hat eine quadratische Gleichung zwei Lösungen und nicht nur wie eine lineare Gleichung eine? Hilfe in § 446

**Verständnisfrage 2** Entsprechend der pq-Formel für eine in Normalform gegebene quadratische Gleichung gibt es auch für die allgemeine Form der quadratischen Gleichung eine Lösungsformel:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ .$$

Leiten Sie diesen Zusammenhang her. Hilfe in § 447

### 1.3.1 Rechentraining

§ **28** Die Aufgaben in diesem Abschnitt dienen der Übung. Wie viele Sie davon bearbeiten, steht Ihnen frei. Im Gegensatz zum Selbst- und Abschlusstest geben Sie die Lösungen hier nicht zur Online-Überprüfung ein sondern vergleichen Sie mit den vorgegebenen Lösungen. Durch Anklicken der Schaltfläche `Hilfe` erhalten Sie einen Hinweis zur Lösung der entsprechenden Aufgabe – Sie sollten auf jeden Fall versuchen, ohne Inanspruchnahme des Hinweises zu einer Lösung zu kommen. Über die Schaltfläche `Musterlösung` erhalten Sie bei einigen der Aufgaben eine Musterlösung mit vollständigem Lösungsweg.

**Aufgabe 16** Lösen Sie die folgenden quadratische Gleichung mit einer Methode ihrer Wahl:

$$25x^2 + 80x + 64 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \square \quad x_2 = \square \quad x_3 = \square \quad x_4 = \square\ .$$

Hilfe zur Aufgabe in § 453 Musterlösung in § 469

**Aufgabe 17** Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung mit einer Methode ihrer Wahl:

$$x^2 = 2x + 15 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \square \quad x_2 = \square \quad x_3 = \square \quad x_4 = \square\ .$$

Hilfe zur Aufgabe in § 454 Musterlösung in § 470

**Aufgabe 18** Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung mit einer Methode ihrer Wahl:

$$x^4 - 8x^2 + 15 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \square \quad x_2 = \square \quad x_3 = \square \quad x_4 = \square\ .$$

Hilfe zur Aufgabe in § 455 Musterlösung in § 471

**Aufgabe 19** Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung:

$$x^2 - 17x = 200 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \square \quad x_2 = \square \quad x_3 = \square \quad x_4 = \square\ .$$

Musterlösung in § 472

**Aufgabe 20** Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung:

$$5x^3 + 30x^2 + 46x = 6x \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \square \quad x_2 = \square \quad x_3 = \square \quad x_4 = \square\ .$$

Hilfe zur Aufgabe in § 456 Musterlösung in § 473

### 1.3.2 Abschlusstest

§ **29** Die Aufgaben in diesem Abschnitt sind gleichsam die Prüfungsaufgaben. Sie müssen mindestens drei der Fragen korrekt beantwortet haben, um in das nächste Themenfeld zu gelangen.

**Aufgabe 21** Lösen Sie

$$x^2 - 10x + 16 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \square \quad x_2 = \square \quad x_3 = \square \quad x_4 = \square$$

Geben Sie die Lösungen ihre Größe nach aufsteigend von links nach rechts in die Felder ein. Überflüssige Felder lassen Sie leer.

**Aufgabe 22** Lösen Sie

$$4x^2 - 16x + 7 = 5 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \square \quad x_2 = \square \quad x_3 = \square \quad x_4 = \square$$

Geben Sie die Lösungen ihre Größe nach aufsteigend von links nach rechts in die Felder ein. Überflüssige Felder lassen Sie leer.

**Aufgabe 23** Lösen Sie

$$9x^2 + 45x + 200 = 25 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \square \quad x_2 = \square \quad x_3 = \square \quad x_4 = \square$$

Geben Sie die Lösungen ihre Größe nach aufsteigend von links nach rechts in die Felder ein. Überflüssige Felder lassen Sie leer.

**Aufgabe 24** Lösen Sie

$$x^4 - 34x^2 + 225 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \square \quad x_2 = \square \quad x_3 = \square \quad x_4 = \square$$

Geben Sie die Lösungen ihre Größe nach aufsteigend von links nach rechts in die Felder ein. Überflüssige Felder lassen Sie leer.

**Aufgabe 25** Lösen Sie

$$5x^4 - 30x^2 + 1000 = x^4 + 34x^2 - 24 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \square \quad x_2 = \square \quad x_3 = \square \quad x_4 = \square$$

Geben Sie die Lösungen ihre Größe nach aufsteigend von links nach rechts in die Felder ein. Überflüssige Felder lassen Sie leer.

## 1.4 Rechnen mit Potenzen

§ **30** Potenzen sind Ausdrücke der Form $x^a$ oder $a^n$. Sie kommen in der Physik z.B. beim Abschätzen von Größenordnungen und im Zusammenhang mit Maßeinheiten vor:

$$10^{-3}\ \mathrm{km} = 1\ \mathrm{m} = 10^2\ \mathrm{cm} = 10^3\ \mathrm{mm} = 10^6\ \mu\mathrm{m} = 10^9\ \mathrm{nm} = 10^{12}\ \mathrm{pm}\ .$$

Da physikalische Größen aus einer Maßzahl und einer Einheit bestehen, bedeutet ein Rechnen mit physikalischen Größen häufig auch ein Rechnen mit Potenzen. Selbst die einfache Bestimmung der Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen von 1 km und 1 mm gibt nur dann eine sinnvolle Maßeinheit, wenn wir das Rechnen mit Potenzen beherrschen:

$$1\ \mathrm{km} \cdot 1\ \mathrm{mm} = 10^3\ \mathrm{m} \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{m} = 10^{3-3}\ \mathrm{m}^2 = 10^0\ \mathrm{m}^2 = 1\ \mathrm{m}^2\ .$$

§ **31** Bevor wir dieses Thema vertiefen, seien zwei Begriffe eingeführt: in der Potenz $a^b$ wird $a$ als die Basis und $b$ als der Exponent bezeichnet. Potenzen können nur dann addiert oder subtrahiert werden, wenn sowohl Basis als auch Exponent gleich sind: $a^b + 5a^b = 6a^b$ kann bestimmt werden, der Ausdruck $a^b + b^a$ kann jedoch, wofern nicht $a = b$, nicht weiter vereinfacht werden.

§ **32** Bei Multiplikation und Division können Potenzen gleicher Basis zusammen gefasst werden:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \qquad \text{und} \qquad \frac{a^b}{a^c} = a^b \cdot a^{-c} = a^{b-c}\ .$$

Machen wir uns das an einem Beispiel plausibel mit $b = 5$ und $c = 3$:

$$a^5 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8 = a^{5+3}$$

und

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2 = a^{5-3}\ .$$

§ **33** Die Regel für das Potenzieren von Potenzen,

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

können wir uns entsprechend veranschaulichen:

$$(a^5)^3 = a^5 \cdot a^5 \cdot a^5 = a^{5+5+5} = a^{3 \cdot 5} = a^{15}\ .$$

Dabei haben wir die Multiplikationsregel für Potenzen verwendet.

§ **34** Bei der Division von zwei Potenzen haben wir zum Umschreiben des Nenners bereits verwendet, dass

$$\frac{1}{a^b} = a^{-b}$$

gilt. Das lässt sich an Hand des Beispiels auch direkt nachvollziehen.

§ **35** An Hand der Regeln für die Potenzen von Potenzen lässt sich auch die folgende Regel nachvollziehen:

$$a^{\frac{1}{b}} = \sqrt[b]{a}\ ,$$

d.h. es wird die $b$te Wurzel gebildet. Hierbei handelt es sich um die Umkehrung der Potenzfunktion, d.h. die $b$te Wurzel aus $a^b$ ergibt genau wieder $a$. Dies lässt sich mit Hilfe der Rechenregel für die Potenzen von Potenzen verstehen:

$$\sqrt[b]{a^b} = (a^b)^{\frac{1}{b}} = a^{b \cdot \frac{1}{b}} = a^1 = a\ .$$

§ **36** Ein gleicher Exponent bei unterschiedlichen Basen kann auf die beiden Basen verteilt werden:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n\ .$$

Alle Rechenregeln für Potenzen sind nochmals in Tab. 1 zusammen gefasst.

| | |
|---|---|
| $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$ | Produkte von Potenzen gleicher Basis |
| $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ | Quotienten von Potenzen gleicher Basis |
| $(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n$ | Potenzen von Potenzen |
| $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ | Wurzeln |
| $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ | Potenz eines Produkts |

Tabelle 1: Rechenregeln für Potenzen

### 1.4.1 Beispiele

§ **37** Diese Beispiele sind gleichzeitig die Lösungen zu Aufgabe 4. Als Aufwärmübung vereinfachen wir den Ausdruck

$$\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}} .$$

Darin treten Terme mit der Basis $a$ auf und solche mit Basis $b$, so dass wir am Ende einen Ausdruck der Form $a^m b^n$ erwarten. Daher sortieren wir im ersten Schritt nach $a$s und $b$s:

$$\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}} = \frac{a^{x+1} \cdot a^{3x-1}}{a^{x-2} \cdot a^x} \cdot \frac{b^{x+3} \cdot b^{x+3}}{b^{3-x} \cdot b^{x+1}} .$$

Beider Quotienten enthalten nur jeweils eine Basis, d.h. wir können Sie separat abarbeiten. Dabei haben wir zwei Möglichkeiten: zuerst Zähler und Nenner jeweils getrennt zusammenfassen (das werden wir mit dem ersten Quotienten machen) oder gleich alle Terme bearbeiten (das machen wir beim zweiten). Die Regeln, die wir benötigen, betreffen Produkte und Quotienten: in ersteren werden die Exponenten addiert, in letzterem werden die Exponenten der Terme im Nenner von denen im Zähler subtrahiert:

$$\frac{a^{x+1} \cdot a^{3x-1}}{a^{x-2} \cdot a^x} \cdot \frac{b^{x+3} \cdot b^{x+3}}{b^{3-x} \cdot b^{x+1}} = \frac{a^{(x+1)+(3x-1)}}{a^{(x-2)+x}} \cdot b^{(x+3)+(x+3)-((3-x)+(x+1))} .$$

Im nächsten Schritt haben wir bereits alle Terme zur Basis $b$ verarbeitet, bei den Ausdrücken mit der Basis $a$ dagegen stehen noch Zähler und Nenner da und müssen zusammen gefasst werden:

$$\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}} = \frac{a^{4x}}{a^{2x-2}} \cdot b^{2x+2} = a^{4x-(2x-2)} \cdot b^{2x+2} .$$

Dabei handelt es sich um ein Produkt von zwei Potenzen mit gleichem Exponenten. Daher können die Basen zusammen gefasst werden und wir erhalten

$$\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}} = a^{2x+2} \cdot b^{2x+2} = (ab)^{2x+2} .$$

§ **38** Etwas verwirrender sieht dagegen der folgende Ausdruck aus:

$$\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$$

Aber keine Panik, auch hierbei handelt es sich nur um einen Papiertiger. Wieder haben wir zwei Basen $a$ und $b$. Außerdem enthält der Ausdruck jeweils Quadrate von Summen bzw. Differenzen, d.h. die Anwendung der binomischen Formeln erscheint verlockend. Allerdings machen binomische Formeln den Ausdruck länger und in diesem speziellen Fall haben alle Klammern den Exponenten 2. Dann können wir auch erst die Basen zusammen fassen und erst ganz am Ende quadrieren:

$$\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2} = \left(\frac{(6a-12b) \cdot (3a+6b)}{(6a^2-24b^2)}\right)^2$$

Den Quotienten können wir etwas übersichtlicher gestalten, in dem wir durch 6 kürzen und im zweiten Term im Zähler die 3 ausklammern:

$$\left(\frac{(6a-12b) \cdot (3a+6b)}{6a^2-24b^2}\right)^2 = \left(\frac{(a-2b) \cdot 3 \cdot (a+2b)}{a^2-4b^2}\right)^2 = 3^2 = 9 .$$

Im Nenner steht eine Differenz aus zwei Quadraten, nämlich $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2$. Ein derartiger Ausdruck lässt sich mit Hilfe der dritten binomischen Formel darstellen als $a^2 - (2b)^2 = (a-2b)(a+2b)$. Das sind genau die Terme, die auch im Zähler stehen, so dass von dem ganzen Bruch nur die 3 überlebt. Diese muss noch quadriert werden, so dass sich das oben gegebene Ergebnis ergibt. Diese Umkehrung der dritten binomischen Formel ist ein Trick, der in der Physik häufig angewandt wird – man sollte sich daher die dritte binomische Formel fast noch besser einprägen als die beiden anderen.

§ **39** Jetzt haben Sie es fast geschafft. Etwas auf den ersten Blick so verwirrend erscheinendes wie der Ausdruck

$$\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 \div \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$$

wartet auf Ihre kaltblütigen Fähigkeiten im Umgang mit zahnlosen Formelmonstern. Umfangreich ist an dem Ausdruck eigentlich nur, dass er vier verschiedenen Basen $a$, $b$, $x$ und $y$ enthält. Besondere Beachtung verdient nur der letzte Quotient, da durch ihn geteilt wird: man dividiert durch einen Quotienten in dem man mit seinem Kehrwert multipliziert. Aber gilt das auch, wenn der Quotient quadriert wird? Ja, da wir das Quadrat ja auf Zähler und Nenner verteilen können, dann den Kehrwert bilden und anschließend wieder Zähler und Nenner unter einem gemeinsamen Quadrat zusammen fassen können:

$$1 \div \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2 = 1 \div \frac{(25x^3b^3)^2}{(12y^4a)^2} = \frac{(12y^4a)^2}{(25x^3b^3)^2} = \left(\frac{12y^4a}{25x^3b^3}\right)^2 .$$

Damit wird unser Ausgangsausdruck zu

$$\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 \div \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2 = \left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 \cdot \left(\frac{12y^4a}{25x^3b^3}\right)^2 .$$

Die weitere Strategie bleibt Ihnen überlassen. Ich habe mich dafür entschieden, die Potenzen der Brüche jeweils auf Zähler und Nenner zu verteilen:

$$\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 \div \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2 = \frac{(2xb^3)^3}{(3ya^3)^3} \cdot \frac{(15x^2a^3)^2}{(8y^3b)^2} \cdot \frac{(12y^4a)^2}{(25x^3b^3)^2} .$$

In Zähler und Nenner stehen jetzt jeweils Produkte unter diesen Potenzen. Die Potenzen müssen auf alle Faktoren dieser Produkte verteilt werden, auch auf die Zahlen!

$$\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 \div \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2 = \frac{2^3x^3b^9}{3^3y^3a^9} \cdot \frac{15^2x^4a^6}{8^2y^6b^2} \cdot \frac{12^2y^8a^2}{25^2x^6b^6} .$$

Jetzt können wir alles auf einen Bruchstrich packen

$$\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 \div \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2 = \frac{2^3x^3b^9 15^2x^4a^6 12^2y^8a^2}{3^3y^3a^9 8^2y^6b^2 25^2x^6b^6}$$

und die Potenzen sortieren

$$\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 \div \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2 = \frac{(2^3 \cdot 15^2 \cdot 12^2)a^8b^9x^7y^8}{(3^3 \cdot 8^2 \cdot 25^2)a^9b^8y^9x^6}$$

Fangen wir an, die Zahlen zu sortieren:

$$\frac{2^3 \cdot 15^2 \cdot 12^2}{3^3 \cdot 8^2 \cdot 25^2} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2}{3^3 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2} = \frac{2 \cdot 3}{5^2} = \frac{6}{25} .$$

Die anderen Ausdrücke lassen sich zusammen fassen als

$$\frac{a^8b^9x^7y^8}{a^9b^8y^9x^6} = \frac{bx}{ay} .$$

Damit erhalten wir als Endergebnis

$$\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 \div \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2 = \frac{6}{25}\,\frac{bx}{ay} .$$

| | |
|---|---|
| $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ | Logarithmus eines Produkts |
| $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ | Logarithmus eines Quotienten |
| $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$ | Logarithmus einer Potenz |
| $\ln(a^{-1}) = -\ln(a)$ | Logarithmus eines Kehrwerts |

Tabelle 2: Rechenregeln für Logarithmen

§ **40** Die Umkehrfunktion der Potenzfunktion ist der Logarithmus zur entsprechenden Basis. Die Rechenregeln für diese Umkehrfunktion lassen sich aus denen der Potenzfunktion herleiten. Betrachten wir als Basis die Euler Zahl e, die zugehörige Umkehrfunktion ist der natürliche Logarithmus ln. Die Regel für die Multiplikation von Potenzen lässt sich für diese Basis schreiben als

$$\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y} \; .$$

Nehmen wir den natürlichen Logarithmus von diesem Ausdruck:

$$\ln(\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y) = \ln(\mathrm{e}^{x+y}) \; .$$

Auf der rechten Seite wird die Umkehrfunktion auf die Funktion angewandt, d.h. es bleiben nur $x + y$ übrig:

$$\ln(\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y) = x + y \; . \tag{2}$$

Auf der linken Seite lässt sich dieser Ausdruck dann erreichen, wenn wir eine Regel der Form

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

annehmen, wie in der obersten Zeile von Tab. 2 gegeben. Wenden wir die Regel probeweise auf die linke Seite an, so erhalten wir

$$\ln(\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y) = \ln(\mathrm{e}^x) + \ln(\mathrm{e}^y) \; .$$

Damit haben wir den Ausdruck der linken Seite auf eine Summe reduziert, in der jeweils die Umkehrfunktion einer Funktion steht. Diese heben sich auf, so dass wir erhalten

$$\ln(\mathrm{e}^x) + \ln(\mathrm{e}^y) = x + y \, ,$$

so dass (2) erfüllt ist.

§ **41** Die anderen in Tabelle 2 gegebenen Rechenregeln können Sie sich entsprechend herleiten.

### 1.4.2 Rechentraining

§ **42** Die Aufgaben in diesem Abschnitt dienen der Übung. Wie viele Sie davon bearbeiten, steht Ihnen frei. Im Gegensatz zum Selbst- und Abschlusstest geben Sie die Lösungen hier nicht zur Online-Überprüfung ein. Durch Anklicken der Schaltfläche `Hilfe` erhalten Sie einen Hinweis zur Lösung der entsprechenden Aufgabe – versuchen Sie es ohne die Hilfe, die ist nur etwas für ganz Verzweifelte. Über die Schaltfläche `Lösung` erhalten Sie eine nicht weiter kommentierte Lösung.

**Aufgabe 26** Vereinfachen und berechnen Sie den folgenden Ausdruck

$$\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^3} \div \frac{a-b}{(a+b)^2} = \Box a^{\Box} + \Box a^{\Box} b + \Box a b^{\Box} + b^{\Box} + \Box \; .$$

Hilfe zur Aufgabe in § 457 Lösung in § 474

**Aufgabe 27** Vereinfachen und berechnen Sie den folgenden Ausdruck

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \Box \; .$$

Lösung in § 475

**Aufgabe 28** Vereinfachen und berechnen Sie den folgenden Ausdruck

$$\sqrt{\sqrt{a}} \cdot \left( \left( \frac{a+b}{b} \right)^2 - \frac{2a+b}{b} \right) = \Box a^{\Box} \ .$$

Lösung in § 476

**Aufgabe 29** Vereinfachen und berechnen Sie den folgenden Ausdruck

$$\frac{\ln(\mathrm{e}^{x^2} \cdot \mathrm{e}^{(2\sqrt{x})^2})}{\mathrm{e}^{-5x} \cdot \ln \mathrm{e}^{4(x+\sqrt{x})}} \ .$$

Lösung in § 477

### 1.4.3 Abschlusstest

§ **43** Die Aufgaben in diesem Abschnitt sind gleichsam die Prüfungsaufgaben. Sie müssen mindestens zwei der Fragen korrekt beantwortet haben, um in das nächste Themenfeld zu gelangen.

**Aufgabe 30** Vereinfachen und berechnen Sie.

$$\frac{x^2 \cdot 2x + 7x^2 + 6\ln(\sqrt{\mathrm{e}^x})}{\ln(\mathrm{e}^{2x^2} \cdot \mathrm{e}^x)} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x = \Box$$

**Aufgabe 31** Vereinfachen Sie.

$$\frac{2(a^2-3)(a^2+3)+18}{(cb+2)^2-2cb-4} \frac{b^5}{a^2cb} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Box a^{\Box} b^{\Box} c^{\Box}}{\Box a^{\Box} b^{\Box} c^{\Box}}$$

**Aufgabe 32** Vereinfachen Sie.

$$\frac{(5a^2c+5b^2c)((ac)^2-2bc^3-c^5-(bc+c^2)^2)}{(ac)^2a^2c-b(bc)^3} \qquad \Rightarrow \qquad \Box a^{\Box} b^{\Box} c^{\Box}$$

## 1.5 Lineare Gleichungssysteme

### 1.5.1 Allgemeine Lösungverfahren

§ **44** Lineare Gleichungssysteme sind Systeme von $m$ Gleichungen, die zur Bestimmung von $n$ in den Gleichungen vorkommenden Unbekannten $x_i$ dienen, wobei die Zusammenhänge zwischen den $x_i$ in den Gleichungen linear sein sollen, d.h. die Gleichungen sollen keine Produkte $x_i x_j$ oder höhere Potenzen $x_i^k$ enthalten.

§ **45** In der Schule werden im Wesentlichen drei Verfahren zu Lösung vorgestellt.

1. Zwei Gleichungen werden jeweils so umgestellt, dass sich auf einer Seite des Gleichtszeichens nur eine Variable befindet, beispielsweise $x$. Damit sind die jeweiligen Terme auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens ebenfalls gleich und enthalten eine Variable weniger.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ x - 4y &= 5 \end{aligned} \qquad (3)$$

wird also umgestellt zu

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2y \\ x &= 5 + 4y \ . \end{aligned}$$

Nun muss die Gleichung

$$3 - 2y = 5 + 4y$$

gelöst werden.

2. Eine der beiden Gleichungen wird wie oben umgestellt und in die andere eingesetzt. Für das eben genannte Beispiel bedeutet das bei Einsetzen der umgestellten zweiten Gleichung

$$x = 5 + 4y \qquad \text{in die erste Gleichung} \qquad x + 2y = 5\,,$$

die Gleichung

$$3 - 2y - 4y = 5$$

ist zu lösen.
3. Die letzte Möglichkeit ist, eine der beiden Gleichungen mit einem geeigneten Faktor multipliziert von einer der anderen abzuziehen, so dass mindestens eine Variable verschwindet. Im Beispiel kann die zweite von der ersten direkt abgezogen werden und wir erhalten

$$\begin{aligned} x + 2y - (x - 4y) &= 3 - 5 \\ \text{bzw. direkt } 6y &= 2\,. \end{aligned}$$

§ **46** Zunächst erscheinen Verfahren 1 oder 2 einfacher. Bei komplexeren System - es beginnt oft schon bei 3 Variablen - zeigt sich allerdings schnell, dass diesen Verfahren eine Systematik fehlt: Nach jedem Schritt müssen Gleichungen oft vollständig umgestellt werden. Will man ein umfangreicheres Gleichungssystem lösen, sollte man von diesen Verfahren Abstand nehmen.

§ **47** Wir wollen daher das dritte Verfahren systematisieren. Zunächst bringen wir das Gleichungssystem in eine Normalform, in der auf der linken Seite geordnet die Variablen mit ihren Koeffizienten stehen, auf der rechten Seite die Konstanten. Die Gleichungen (3) haben bereits diese Form. Da die Variablen geordnet sind, brauchen wir sie im weiteren Rechenverlauf nicht mitzuschreiben. Wir schreiben stattdessen die Koeffizienten der Variablen in Form einer Matrix und die konstanten Größen in Form eines Vektors in der folgenden Notation:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

Man nennt diese Darstellung erweiterte Matrixform.

§ **48** Im Spezialfall, in dem alle Konstanten den Wert Null haben, nennen wir das System ein homogenes lineares Gleichungssystem. Ist das nicht der Fall, liegt entsprechend ein inhomogenes lineares Gleichungssystem vor. Wir können uns an dieser Stelle schon einmal merken, dass homogene lineare Gleichungssysteme immer mindestens eine Lösung haben, nämlich die triviale, in der alle Variablen den Wert Null annehmen. Kommen wir aber zunächst zurück zum Lösungverfahren.

§ **49** Es ist recht einfach, das oben genannte dritte Verfahren auf diese Form anzuwenden. Es besagt einfach, dass wir Zeilen der Matrix zusammen mit ihren dazu gehörigen Vektorelementen addieren und subtrahieren dürfen. Außerdem erlauben uns die elementaren Umformungsregeln für Gleichungen, einzelne Zeilen mit beliebigen Faktoren zu multiplizieren (wobei wir den Faktor 0 aus offensichtlichen Gründen vermeiden sollten). Da die Reihenfolge der Gleichungen egal ist, können wir Zeilen der Matrix beliebig vertauschen, solange wir die Vektorelemente rechts ebenso vertauschen.

§ **50** Ziel dieser Umformungen ist nun, das System in eine Form zu bringen, in der wir das Ergebnis einfach ablesen können. Das ist der Fall, wenn in jeder Zeile genau eine Variable den Koeffizienten 1 hat, alle anderen (außerhalb der Diagonalen oder zumindest unterhalb der Diagonalen) dagegen den Koeffizienten 0, denn dann steht im dazu gehörigen Vektorelement der Wert der Variablen. Für unser Beispiel sieht das so aus:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 11/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right)$$

Wir sind dabei systematisch vorgegangen und haben zunächst die erste Spalte bereinigt, in dem wir die erste Zeile von der zweiten abgezogen haben. Anschließend haben wir die zweite Spalte bereinigt, indem wir 1/3 der zweiten Zeile von der ersten abgezogen haben. Es ist offensichtlich, dass sich dieses Verfahren ohne prinzipielle Änderung auf beliebig große Systeme anwenden lässt, wobei der Aufwand jedoch quadratisch mit der Zahl $n$ der Gleichungen steigt, d.h. gemäß $n^2$.

### 1.5.2 Beispiel

§ **51** Zur Vertiefung wiederholen wir das Verfahren für Aufgabe 3. Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 & = & 29 \\ -x_1 + 8x_2 - x_3 & = & -24 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 & = & -15 \end{array}$$

wird zuerst in der Normalform dargestellt:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 3 & 29 \\ -1 & 8 & -1 & -24 \\ 4 & 1 & -5 & -15 \end{array}\right) .$$

Die Umwandlung dieser Normalform in eine Diagonalform mit nur jeweils einer Eins pro Zeile und Spalte führt nicht auf einfache Weise zum Ziel. Stattdessen verwandeln wir die Normalform in eine Dreiecksform

$$\left(\begin{array}{rrr|r} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

in der die Elemente im unteren linken Dreieck Null sind. Dann liefert die letzte Zeile die Lösung für $z$; Einsetzen dieses Wertes in die vorletzte Zeile liefert $y$, einsetzten der beiden Lösungen in die oberste Zeile liefert $x$. Eine derartige Matrix wird als Dreieckmatrix bezeichnet.

§ **52** Für die Umwandlung der Normalform in die Dreieckform gibt es verschiedene Möglichkeiten; eine ist hier vorgestellt. Die erste Spalte enthält bereits eine Eins in der zweiten Zeile. Diese nehmen wir als Ziel und bereinigen die erste Spalte, indem wir zuerst das Doppelte der ersten Zeile von der letzten Zeile abziehen, dann das Doppelte der zweiten Zeile zur ersten addieren und zuletzt die zweite Zeile mit -1 multiplizieren

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 3 & 29 \\ -1 & 8 & -1 & -24 \\ 0 & 9 & -11 & -73 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 12 & 1 & -19 \\ -1 & 8 & -1 & -24 \\ 0 & 9 & -11 & -73 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 12 & 1 & -19 \\ 1 & -8 & 1 & 24 \\ 0 & 9 & -11 & -73 \end{array}\right) .$$

Vertauschen von erster und zweiter Zeile sowie Subtraktion von 3/4 der zweiten Zeile von der Dritten sowie Division der letzten Zeile durch 47/4 liefert

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -8 & 1 & 24 \\ 0 & 12 & 1 & -19 \\ 0 & 9 & -11 & -73 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -8 & 1 & 24 \\ 0 & 12 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & -47/4 & 235/4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -8 & 1 & 24 \\ 0 & 12 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

und damit als erste Lösung $z = 5$. Einsetzen in die zweite Zeile liefert $12y + 5 = -19$ und damit $y = -2$. Einsetzen beider Lösungen in die erste Zeile liefert $x + 16 + 5 = 24$ und damit $x = 3$.

### 1.5.3 Überbestimmte Gleichungssysteme

§ **53** Im Idealfall ist die Zahl der Gleichungen gleich der Zahl der Unbekannten. In einigen Situationen haben wir jedoch $n$ Gleichungen mit $m$ Unbekannten. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$m > n$: die Zahl der Unbekannten ist größer als die Zahl der Gleichungen. Das System ist unterbestimmt.

$m < n$: die Zahl der Gleichungen ist größer als die Zahl der Unbekannten.. Dieses System ist überbestimmt; sinnvolle Lösungen ergeben sich nur dann, wenn die $m-n+1$ Gleichungen alle die gleiche Lösung für die durch sie bestimmte Unbekannte liefern.

§ **54** Das Lösungsverfahren in einem überbestimmten Gleichungssystem ist einfach: Wir versuchen, mit beliebigen $m$ Zeilen mit Hilfe des oben beschriebenen Verfahrens eine Diagonal- bzw. Dreieckmatrix zu bilden. Gelingt uns das, haben wir für alle Variablen Werte. Wir müssen anschließend durch Einsetzen überprüfen, ob diese Werte auch in den Gleichungen, die nicht Teil der Diagonal- bzw. Dreieckform sind, richtige Ergebnisse liefern. Ist das der Fall, haben wir das System gelöst. Sind unsere Werte nicht Lösung der übrigen Gleichungen, dann ist das vorliegende Gleichungssystem nicht lösbar - es existieren keine Werte für alle Variablen, mit denen alle Gleichungen erfüllt sind. Da nur maximal soviele Zeilen linear abhängig sein können wie es Variablen gibt, können wir stattdessen auch das folgende Kriterium anwenden.

§ **55** Leider können wir bei keinem der Verhältnisse zwischen Variablen und Gleichungen immer eine Diagonalform finden. Bei den bisherigen Systemen ist das genau dann der Fall, wenn unsere Matrix weniger linear unabhängige Zeilen (oder Spalten - das ist äquivalent) besitzt als Variablen in den Gleichungen vorkommen. Dann können wir nämlich durch die beschriebenen Verfahren eine oder mehrere Zeilen der Matrix komplett auf 0 bringen. Hat mindestens eines der dazu gehörigen Vektorelemente nicht den Wert Null, widersprechen sich die Gleichungen und das System ist nicht lösbar. Ein einfachen Beispiel dafür ist

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Es besagt schlicht, dass $x + 2y$ gleichzeitig 3 und 5 ergeben soll. Das ist offensichtlich nicht möglich.

§ **56** Sind auch alle Vektorelemente 0, so bringen uns die Zeilen keine zusätzliche Information, da sie natürlich für beliebige Werte richtig sind. Wir können also alle lösbaren linearen Gleichungssysteme auf unter- oder vollständig bestimmte Systeme reduzieren.

§ **57** Überbestimmte Gleichungssysteme sind allerdings recht häufig. Sie treten z.B. dann auf, wenn eine Funktion an einen Datensatz gefittet werden soll. Wenn Sie lineare Regression durchführen, versuchen Sie eine Funktion $y = ax+b$ an einen Satz von gemessenen Wertepaaren $(x, y)$ anzupassen und die Parameter $a$ und $b$ des Fits zu bestimmen. Haben Sie nur zwei Messungen, so gibt das zwei Wertepaare und damit zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten $a$ und $b$. Die Lösung ist eindeutig: durch zwei Punkte lässt sich genau eine Gerade legen. Haben Sie mehr Messwerte, so ergibt sich eine entsprechend größere Zahl von Gleichungen für die beiden Unbekannten, das System ist überbestimmt. Dabei kann es passieren, dass verschiedene Paare von Gleichungen unterschiedliche Lösungen für $a$ und $b$ liefern. Im Fall der linearen Regression wählt man dann aus allen möglichen Paaren $(a, b)$ dasjenige aus, bei dem der Abstand aller Punkte von der Geraden minimal wird.

### 1.5.4 Unterbestimmte Gleichungssysteme

§ **58** Unterbestimmte Gleichungssysteme heißen Systeme mit weniger Gleichungen als Variablen. Widersprechen sich zwei Gleichungen, sind auch sie selbstverständlich nicht lösbar. Andernfalls haben sie nicht nur eine Lösung, sondern sogar mehrere: einen sogenannten Lösungsraum, der pro fehlender Bestimmungsgleichung eine Dimension hat. Zwei Gleichungen für drei Variablen definieren also eine Gerade im dreidimensionalen Raum, eine Gleichungen für drei Variablen eine Ebene und wenn wir gar keine Gleichungen haben, sind trivialerweise alle Zahlen Lösung und damit der gesamte $\mathbb{R}^3$.

§ **59** Wie interpretieren wir nun solche mehrdeutigen Lösungen genau? Betrachten wir zunächst ein Beispiel.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hier lohnt es sich, wieder daran zu denken, dass die Matrix Gleichungen repräsentiert. Aus der unteren Zeile (Gleichung) ist Offensichtlich $y = 1$. Die andere Gleichung definiert lediglich $x = 2 - z$. Mehr Information enthält sie nicht. Sehen wir die Lösung als Vektor $(x, y, z)$, können wir nun einfach einsetzen und erhalten für die Lösung alle Tupel[1] $(2 - z, 1, z)$, wobei $z$ beliebig ist. Es ist nicht schwer zu erkennen, dass es sich tatsächlich um eine Gerade handelt. In der Schule hätte man dafür die Darstellung $G = (2, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1)$ gewählt, an der es sehr deutlich wird.

§ **60** Das allgemeine Verfahren zur Lösung eines derartigen unterbestimmten Gleichungssystems besteht also darin, so viele Spalten auf $(0, ..., 1, ..., 0)$ zu bringen wie möglich. Die Zahl dieser Spalten entspricht der Zahl der linear unabhängigen Gleichungen unseres Gleichungssystems. Die übrigen Spalten sind dann auf die rechte Seite der Gleichungen zu ziehen.

§ **61** Im obigen Beispiel hat uns ein Gleichungssystem mit $m = 3$ Unbekannten und $m-1 = 2$ Gleichungen als Lösung die Gleichung für eine Gerade geliefert. Entsprechend wird uns ein Gleichungssystem mit $m$ Unbekannten und $m-2$ Gleichungen eine Ebene liefern. Betrachten wir wieder ein einfaches Beispiel mit $m = 3$ Unbekannten, d.h. wir haben nur $m-2 = 3-2 = 1$ Gleichung:

$$x + 2y + z = 4$$

In dieser Gleichung können wir $z$ durch $x$ und $y$ ausdrücken, die beide nicht näher bestimmt und damit beliebig wählbar sind. Unser Lösungstupel ist damit $(x, y, 4 - x - 2y)$. Oder in der aus der Schule geläufigen Schreibweise der Ebene mit Basispunkt und aufspannenden Vektoren: $(0, 0, 4) + x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2)$.

§ **62** Betrachten wir als umfangreicheres Beispiel das unterbestimmte Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} w - 1x - 2y &= 1 \\ 2w + x + 2y + 2z &= 5 \\ w + 3x + 6y + 4z &= 5 \\ w + x + 2y + z &= 3 \end{aligned}$$

Die Normalform lässt sich unmittelbar ablesen, bei der anschließenden Umwandlung werden die unteren beiden Zeilen (Gleichungen) identisch Null:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit können wir $y$ und $z$ frei wählen und müssen $w$ und $x$ mit Hilfe von $y$ und $z$ ausdrücken. Als Lösungsmannigfaltigkeit erhalten wir $L = (2 - z, 1 - 2y - z, y, z)$.

### 1.5.5 Lösbarkeit

§ **63** Auf Basis der bisherigen Überlegungen fassen wir nochmal die Erkenntnisse über die Lösbarkeit zusammen. Beginnen wir mit homogenen Gleichungssysystemen. Diese sind immer lösbar. Der Grund ist einfach, dass wir unlösbare Systeme daran erkannt haben, dass zwei Spalten der Koeffizientenmatrix durch Zeilenoperationen gleich werden konnten, die dazu gehörigen Elemente des konstenten Vektors sich dabei jedoch noch unterschieden. Bei homogenen Gleichungssystemen besteht dieser Vektor nur aus Nullen. Da keine Zeilenoperation das ändern kann, können auch keine Inkonsistenzen auftreten.

[1] Tupel sind geordnete Zahlenpaare, z.B. die beiden Koordinaten eines Punktes in der Ebene oder die drei Koordinaten eines Punktes im Raum. Die Ordnung ist dadurch bedingt, dass wir stets als erstes die $x$-Komponente, dann die $y$-Komponente und gegebenenfalls anschließend die $z$-Komponente angeben. Vektoren sind ebenfalls geordnete Zahlenpaare oder Tupel. Der Begriff des Tupel (ebenso wie der des Vektors) ist nicht auf die geometrische Interpretation beschränkt sondern kann für beliebige geordnete Zahlenpaare, z.B. die Größe der Storchenpopulation und die Zahl der Geburten innerhalb eines Jahres, verwendet werden.

§ **64** Ist ein lineares Gleichungssystem vollständig bestimmt, können wir wie beschrieben immer eine Diagonal- bzw. Dreieckmatrix erzeugen und der konstante Vektor gibt die Lösung an. Vollständig bestimmte Gleichungsssysteme sind also ebenfalls immer eindeutig lösbar. Es ist damit leicht zu erkennen, dass vollständig bestimmte homogene linear Gleichungssysteme generell nur die triviale - also vollständig aus Nullen bestehende - Lösung haben.

§ **65** Ob ein lineares Gleichungssystem vollständig bestimmt ist, ist einfach zu erkennen. Wir müssen lediglich feststellen, ob alle Zeilen linear unabhängig sind. Das ist dann der Fall, wenn die Determinante[2] der Koeffizientenmatrix ungleich Null ist.

§ **66** Inhomogene lineare Gleichungssysteme sind dann lösbar, wenn es keine Zeilenpaare gibt, die widersprüchliche Ergebnisse liefern. Bei vollständig, aber nicht überbestimmten Systemen ist das nie der der Fall - sie sind immer lösbar. Wir können die Determinante verwenden, um lineare Unabhängigkeit aller Zeilen festzustellen.

### 1.5.6 Cramer'sche Regel: ein alternatives Lösungsverfahren

§ **67** Ein sehr gut zu automatisierendes Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme basiert auf der Cramer'schen Regel. Da dieses Verfahren die Bestimmung von Determinanten voraussetzt, sollten Sie sich nur dann mit ihm beschäftigen, wenn Sie Determinanten bereits kennen oder sich nach Lektüre der Fußnote zu § 65 ausreichend mit ihnen vertraut machen konnten.

§ **68** Die Cramer'sche Regel wird auf ein Gleichungssystem mit $m$ Gleichungen für $m$ Unbekannte angewendet, d.h. ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mm}x_m & = & b_m \ . \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich auch schreiben mit Hilfe der die Koeffizienten $a_{ij}$ enthaltenden Koeffizientenmatrix $\mathtt{A}$, dem Vektor $\vec{x}$ der Unbekannten $x_i$ sowie dem Vektor $\vec{b}$ der Konstanten:

$$\mathtt{A}\vec{x} = \vec{b} \qquad \text{mit} \qquad \mathtt{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} .$$

[2] Die Determinante ist eine Zahl, die sich für eine quadratische Matrix, d.h. eine Matrix mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl bestimmen lässt gemäß

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

für eine $2 \times 2$-Matrix, d.h. eine Matrix mit zwei Spalten und zwei Zeilen, wie wir sie auf der linken Seite der Normalform für ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für zwei Unbekannte erhalten. Ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen für drei Unbekannte liefert eine $3 \times 3$-Matrix mit drei Spalten und drei Zeilen, deren Determinante gegeben ist durch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a32 - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{32}\,a_{23}\,a_{11} - a_{33}\,a_{21}\,a_{12} \ .$$

Falls Ihnen Determinanten aus der Schule bekannt sind, benötigen Sie diese Erläuterung nicht; sind Sie Ihnen nicht bekannt, so nehmen Sie die Erläuterung zur Kenntnis und versuchen, sich an den Begriff zu gewöhnen, da er Ihnen im Laufe des Studiums häufiger begegnen wird und außerdem ein sehr elegantes Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen, die Cramer'sche Regel ermöglicht.

§ **69** Zur Lösung des Gleichungssystems wird zuerst die Determinante der Koeffizientenmatrix bestimmt:

$$|\mathtt{A}| = \det \mathtt{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} .$$

Anschließend werden die Determinanten der einzelnen Variablen $x_i$ aus der Koeffizientenmatrix bestimmt, indem dort die jeweils $i$-te Spalte durch den Vektor $\vec{b}$ ersetzt wird:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{m1} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_m & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} , \quad D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{m1} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & b_m & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

und so weiter bis

$$D_{x_m} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_m \end{vmatrix} .$$

Die Lösungen des linearen Gleichungssystems sind dann

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{\det \mathtt{A}} , \qquad x_2 = \frac{D_{x_2}}{\det \mathtt{A}} , \qquad \dots \qquad x_m = \frac{D_{x_m}}{\det \mathtt{A}} .$$

§ **70** Auch dieses Verfahren können wir am Beispiel von Aufgabe 3 genauer betrachten. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 29 \\ -x_1 + 8x_2 - x_3 &= -24 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 &= -15 \end{aligned}$$

führt auf die Koeffizientenmatrix $\mathtt{A}$ sowie den konstanten Vektor $\vec{b}$ mit

$$\mathtt{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 29 \\ -24 \\ -15 \end{pmatrix} .$$

In der Normalform haben wir beide Größen bereits verwendet; dort steht die Koeffizientenmatrix links, der konstante Vektor rechts des senkrechten Strichs. Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist

$$|\mathtt{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -141 .$$

Die Determinanten für die einzelnen Variablen sind

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 29 & -4 & 3 \\ -24 & 8 & -1 \\ -15 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -423 , \qquad D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 29 & 3 \\ -1 & -24 & -1 \\ 4 & -15 & -5 \end{vmatrix} = 282$$

und

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 29 \\ -1 & 8 & -24 \\ 4 & 1 & -15 \end{vmatrix} = -705 .$$

Für die $x_i$ erhalten wir damit wieder

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{|\mathtt{A}|} = \frac{-423}{-141} = 3 , \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{|\mathtt{A}|} = \frac{282}{-141} = -2 \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{D_{x_3}}{|\mathtt{A}|} = \frac{-705}{-141} = 5 ,$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

### 1.5.7 Rechentraining

§ **71** Die Aufgaben in diesem Abschnitt dienen der Übung. Wie viele Sie davon bearbeiten, steht Ihnen frei. Im Gegensatz zum Selbst- und Abschlusstest geben Sie die Lösungen hier nicht zur Online-Überprüfung. Durch Anklicken der Schaltfläche `Hilfe` erhalten Sie einen Hinweis zur Lösung der entsprechenden Aufgabe – bitte möglichst die Benutzung dieser Hilfe vermeiden. Über die Schaltfläche `Musterlösung` erhalten Sie bei einigen der Aufgaben eine Musterlösung mit vollständigem Lösungsweg, sonst erhalten Sie über die Schaltfläche `Lösung` eine nicht weiter kommentierte Lösung.

**Aufgabe 33** Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -5 \\ 4x + y &= -3 \qquad \Rightarrow \qquad x = \square \qquad y = \square\ . \end{aligned}$$

Hilfe zur Aufgabe in § 458 Musterlösung in § 478

**Aufgabe 34** Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 6x - 2y + 3z &= 19 \\ 2x + 4y - 2z &= -12 \\ 2x + 2y - z &= -5 \qquad \Rightarrow \qquad x = \square \qquad y = \square \qquad z = \square\ . \end{aligned}$$

Hilfe zur Aufgabe in § 459 Musterlösung in § 479

**Aufgabe 35** Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ x + y &= -1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \square \qquad y = \square\ . \end{aligned}$$

Musterlösung in § 480

**Aufgabe 36** Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y - 4z &= -18 \\ 3x - 2y + z &= 22 \\ x + 3y - 4z &= -29 \qquad \Rightarrow \qquad x = \square \qquad y = \square \qquad z = \square\ . \end{aligned}$$

Musterlösung in § 481

**Aufgabe 37** Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 5x + 6y - 7z &= -51 \\ 7x - 8y - 9z &= -19 \qquad \Rightarrow \qquad x = \square \qquad y = \square \qquad z = \square\ . \end{aligned}$$

Lösung in § 482

**Aufgabe 38** Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \square \qquad y = \square \qquad z = \square\ . \end{aligned}$$

Lösung in § 483

**Aufgabe 39** Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& -13 \\ 2x-2y-z &=& 6 \\ x+3y-z &=& -1 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad x=\square \qquad y=\square \qquad z=\square\,.$$

Lösung in § 484

**Aufgabe 40** Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} x+4y-z &=& -3 \\ 3x-y-z &=& 12 \\ 2x+2y+3z &=& 10 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad x=\square \qquad y=\square \qquad z=\square\,.$$

Lösung in § 485

**Aufgabe 41** Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} 2w+3x-2y+z &=& 0 \\ w+2x-y+3z &=& 2 \\ 3w-2x+2y-z &=& -4 \\ 4w-4x-y+z &=& 1 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad w=\square \qquad x=\square \qquad y=\square \qquad z=\square\,.$$

Hilfe zur Aufgabe in § 460 Musterlösung in § 486

**Aufgabe 42** Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 8 \\ 2x-y-z &=& -5 \\ y/x+z &=& 7 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad x=\square \qquad y=\square \qquad z=\square\,.$$

Hilfe zur Aufgabe in § 461 Musterlösung in § 487

**Aufgabe 43** Lässt sich das folgende lineare Gleichungssystem lösen?

$$\begin{array}{rcl} 3x+4y &=& 5 \\ 6x+8y &=& 9\,. \end{array}$$

Begründen Sie!

Hilfe zur Aufgabe in § 462 Musterlösung in § 488

**Aufgabe 44** Lässt sich das folgende lineare Gleichungssystem lösen?

$$\begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& 9 \\ 4x+2y+z &=& 16 \\ -6x-3y+3z &=& 27\,. \end{array}$$

Begründen Sie!

Hilfe zur Aufgabe in § 463 Musterlösung in § 489

### 1.5.8 Abschlusstest

§ **72** Die Aufgaben in diesem Abschnitt sind gleichsam die Prüfungsaufgaben. Sie müssen mindestens 5 der Fragen korrekt beantwortet haben, in das nächste Lernfeld zu gelangen. Aufgaben 45 & 46 sind einfache Aufgaben mit maximal einer Lösung; Aufgaben 47 und 48 sind Aufgaben mit mehreren Lösungen; Aufgaben 49–51 sind etwas anspruchsvollere Textaufgaben.

**Aufgabe 45** Stellen Sie die erweiterte Matrixform auf und lösen Sie das Gleichungssystem. Falls Sie der Ansicht sind, dass das System nicht lösbar ist, markieren Sie das entsprechende Feld.

$$\begin{aligned} 3x + 3y + 2z &= 26 \\ 2x + 5y + z &= 32 \\ x + y + z &= 9 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad x = \square \quad y = \square \quad z = \square\,.$$

□ nicht lösbar

**Aufgabe 46** Stellen Sie die erweiterte Matrixform auf und lösen Sie das Gleichungssystem. Falls Sie der Ansicht sind, dass das System nicht lösbar ist, markieren Sie das entsprechende Feld.

$$\begin{aligned} 2w + x + y + z &= 11 \\ w + 2x + y + z &= 12 \\ w + x + 2y + z &= 13 \\ w + x + y + 2z &= 14 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left( \begin{array}{cccc|c} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{array} \right)$$

$\Rightarrow \quad w = \square \quad x = \square \quad y = \square \quad z = \square\,.$ □ nicht lösbar

**Aufgabe 47** Stellen Sie die erweiterte Matrixform auf und lösen Sie das Gleichungssystem. Falls Sie der Ansicht sind, dass das System nicht lösbar ist, markieren Sie das entsprechende Feld.

$$\begin{aligned} x + 2y + 5z &= 11 \\ x + y + 3z &= 7 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \right)$$

□ nicht lösbar

**Aufgabe 48** Stellen Sie die erweiterte Matrixform auf und lösen Sie das Gleichungssystem. Falls Sie der Ansicht sind, dass das System nicht lösbar ist, markieren Sie das entsprechende Feld.

$$\begin{aligned} 5w + 1x + 4y + 4z &= 5 \\ 4w + x + 2y + 3z &= 3 \\ 10w + 3x + 2y + 7z &= 5 \\ 7w + 2x + 2y + 5z &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left( \begin{array}{cccc|c} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{array} \right)$$

$\Rightarrow \quad w = \square \quad x = \square \quad y = \square \quad z = \square\,.$ □ nicht lösbar

**Aufgabe 49** Stellen Sie die erweiterte Matrixform auf und lösen Sie das Gleichungssystem. Falls Sie der Ansicht sind, dass das System nicht lösbar ist, markieren Sie das entsprechende Feld.

$$\begin{aligned} -2z + 5x &= 1 \\ 4y - x &= 0 \\ z - 2 &= 5y \\ 3y - 4 + 1x &= 1z \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad x = \square \quad y = \square \quad z = \square\,.$$

□ nicht lösbar

**Aufgabe 50** Sie sollen im Chemiepraktikum eine Stoffmischung anfertigen, die neben einer Trägermasse 16g von Stoff A enthält, 8g von Stoff B und 4g von Stoff C. Leider haben Ihre untalentierten Vorgängergruppen die Reinstoffe für falsche Mischungen verbraucht. Sie müssen deswegen auf diese zurückgreifen. Die Verhältnisse sind bekannt:

| Stoffgemisch | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Anteil A | 60% | 10% | 20% |
| Anteil B | 20% | 20% | 40% |
| Anteil C | 0% | 50% | 20% |

Berechnen Sie das nötige Mischungsverhältnis. Stellen Sie dazu zunächst die erweiterte Matrixform des Gleichungssystems auf und lösen Sie es anschließend.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Stoff 1: } \square g \qquad \text{Stoff 2: } \square g \qquad \text{Stoff 3: } = \square g\ .$$

Hinweis: Rechnen sie nicht direkt mit den Prozentwerten, sondern berechnen sie die benötigten Verhältnisse von 10g-Proben (um ganze Zahlen zu behalten.

**Aufgabe 51** Eine Rakete besitzt 3 Triebwerke. Sie ermöglichen die folgenden Beschleunigungen:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & (-2, 0, -4)\mathrm{m/s}^2 \\ a_2 & = & (-3, -1, -2)\mathrm{m/s}^2 \\ a_3 & = & (-6, -1, -1)\mathrm{m/s}^2 \end{array}$$

Wie lange muss jedes Triebwerk eingeschaltet werden, um die Rakete von einer Ausgangsgeschwindigkeit von $(55, 9, 32)$ m/s in Ruhe zu bringen? Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf und berechnen Sie die Lösung.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad t_1 : \square s \qquad t_2 : \square s \qquad t_3 = \square s\ .$$

Hinweis: Beachten Sie die Vorzeichen der Vektoren. Stellen Sie zunächst die Vektorgleichung auf, bilden Sie daraus die Bestimmungsgleichungen und stellen Sie dann die erweiterte Matrixform auf.

# 2 Vektoren

## 2.1 Übersicht und Selbsttest

§ **73** In diesem Lernfeld wird der Umgang mit Vektoren wiederholt: die Darstellung eines Vektors in kartesischen Koordinaten auch mit Hilfe der Einheitsvektoren, elementare Vektoralgebra sowie der sichere Umgang mit Skalar- und Kreuzprodukt. Außerdem sollten Sie die wichtigsten Interpretationen und Anwendungen dieser beiden Produkte wiederholen.

§ **74** Der folgende Test dient zur Selbsteinschätzung ihrer Fähigkeiten und Vorkenntnisse in diesem Lernfeld:

**Aufgabe 52** Die Vektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ sind Einheitsvektoren, die entlang der Achsen eines kartesischen Koordinatensystems zeigen. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = 5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 3\vec{e}_z\,, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bilden Sie damit die folgenden Ausdrücke:

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad 2(\vec{a} - \vec{b}) + 5\vec{c} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -3\vec{a} + 2\vec{b} - (\vec{c} + 2\vec{b}) = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 53** Bilden Sie aus den Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (-2, 1, 0)$ und $\vec{c} = (3, 0, 1)$ die folgenden Ausdrücke

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \square\,, \qquad (\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b} = \square \qquad \text{und} \qquad (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 54** Bilden Sie aus den Vektoren $\vec{a} = (1, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, 1, 3)$ und $\vec{c} = (2, -2, 1)$ die folgenden Ausdrücke:

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \qquad (\vec{b} \times 2\vec{a}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \square\,.$$

**Aufgabe 55** Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Tragen Sie bei den folgenden Ausdrücken in das Kästchen jeweils eine 0 ein falls das Ergebnis ein Skalar ist, eine 1 falls es ein Vektor ist und eine 2 falls es sich um einen mathematisch sinnlosen Ausdruck handelt:

| | | |
|---|---|---|
| $(a)$ | $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ | $\square$ |
| $(b)$ | $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times (\vec{c} \cdot \vec{d})$ | $\square$ |
| $(c)$ | $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$ | $\square$ |
| $(d)$ | $(\vec{a} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$ | $\square$ |
| $(e)$ | $(\vec{a} \times \vec{d}) \cdot \vec{d}$ | $\square$ |
| $(f)$ | $(\vec{a} + \vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{d}$ | $\square$ |
| $(g)$ | $(\vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}) \times \vec{d}$ | $\square$ |
| $(h)$ | $(\vec{a} \cdot \vec{d})(((\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{d} \times \vec{c})) \cdot \vec{c})$ | $\square$ |
| $(i)$ | $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d})$ | $\square$ |

§ **75** Haben Sie alle Aufgaben korrekt gelöst, so brauchen Sie die Texte und Trainings-Aufgaben in diesem Lernfeld nur zu überfliegen und können sich der Bearbeitung des Abschlusstest zuwenden. Nur wenn dieser erfolgreich bestanden wurde, gelangen Sie in das nächste Lernfeld. Haben sie dagegen mit einer oder mehreren der Aufgaben Schwierigkeiten gehabt, sollten Sie dieses Lernfeld gründlich durcharbeiten, insbesondere auch die Aufgaben zum Rechentraining. Innerhalb des Textes werden Sie auch Musterlösungen zu den Aufgaben aus dem Selbsttest finden.

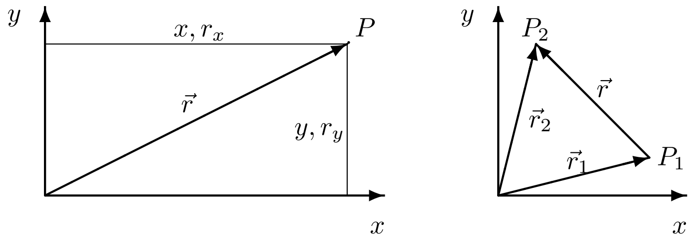



Abbildung 2: Vektor als Ortsvektor (rechts) und zur Darstellung einer Verschiebung zwischen den Punkten $P_1$ und $P_2$.

## 2.2 Was ist ein Vektor

**Definition**: Ein *Vektor* ist eine gerichtete Größe. Er wird durch eine Richtung und eine Länge (einen Betrag) beschrieben. Ein Vektor kann eine Verschiebung beschreiben.

§ **76** Zur Kennzeichnung eines Vektors werden Buchstabensymbole verwendet, die mit einem Pfeil versehen sind, z.B. $\vec{F}$, $\vec{v}$. In vielen modernen Büchern werden Vektoren nicht mehr durch Pfeile markiert sondern im Fettdruck gesetzt, z.B. $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$.

§ **77** Viele Physikalische Größen sind Vektoren, da sie nicht nur einen Betrag sondern auch eine Richtung haben. Beispiele aus der Mechanik sind die Geschwindigkeit $\vec{v}$, die Beschleunigung $\vec{a}$, die Kraft $\vec{F}$, der Impuls $\vec{p}$, die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, der Drehimpuls $\vec{L}$ sowie das Drehmonemt $\vec{M}$. Auch die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ sind vektorielle Größen, während Größen wie die Masse $m$, der Druck $p$ oder die Energie $E$ skalare Größen sind: sie haben zwar einen Betrag aber keine Richtung.

§ **78** Bei einer physikalisch-technischen Vektorgröße gehört zur vollständigen Beschreibung die Angabe einer Maßeinheit. Der Betrag eines physikalischen Vektors besteht dann aus Maßzahl und Einheit, z.B. für den Betrag des Vektors $\vec{F}_1$ gilt dann

$$|\vec{F}_1| = F_1 = 100 \text{ N} .$$

Die Einheit ist auch beim Vektor zu berücksichtigen. Wirken die 100 N entlang der $z$-Achse, so lässt sich die Kraft $\vec{F}_1$ darstellen durch den Vektor

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \text{ N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \text{ N} .$$

§ **79** Symbolisch kann ein Vektor durch einen Pfeil dargestellt werden, vgl. Abb. 2. Die Länge des Pfeils gibt den Betrag des Vektors, die Pfeilspitze legt seine Richtung fest. Ein Vektor lässt sich auch durch die Angabe von Anfangspunkt $Q$ und Endpunkt $P$ eindeutig festlegen; als Vektorsymbol kann dann verwendet werden $\overrightarrow{QP}$.

§ **80** Nehmen wir in der letzten Darstellung als Anfangspunkt $Q$ den Ursprung mit den Koordinaten (0,0,0), so kann der Ortsvektor $\vec{r}$ des Punktes $P = P(x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten (vgl. Abb. 2 links) geschrieben werden als

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} .$$

Der Ortsvektor $\vec{r}$ gibt also die Lage eines Punktes $P$ relativ zum Koordinatenursprung an.

§ **81** Vektoren können auch eine Verschiebung beschreiben. Zur Angabe eines Verschiebungsvektors $r$ zwischen den Punkten $P_1$ und $P_2$ benötigen wir die Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ der beiden Punkte

$$\vec{r} = -\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 .$$

Anschaulich bedeutet diese Gleichung, dass Sie erst vom Punkt $P_1$ entgegen dessen Ortsvektor $\vec{r}_1$ zurück zum Ursprung gehen und von dort entlang des Ortsvektors $\vec{r}_2$ zum Punkt $P_2$.

§ **82** Mit Hilfe eines Vektors lässt sich eine Gerade definieren, wie bereits in § 59 verwendet. Dazu benötigen wir einen beliebigen Punkt $P_0$ auf der Geraden, gegeben durch seinen Ortsvektor $\vec{r}_0$, und die durch den Vektor $\vec{r}$ gegebene Richtung. Alle Punkte der Geraden lassen sich dann erreichen mit Hilfe der Gleichung

$$\vec{g} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{r} \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

Entsprechend kann eine Ebene durch einen beliebigen Punkt $\vec{r}_0$ sowie zwei in der Ebene liegende, linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ aufgespannt werden:

$$\vec{p} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2 \qquad \lambda\,,\ \mu \in \mathbb{R}\,.$$

§ **83** Spezielle Vektoren sind:

- der Nullvektor $\vec{0}$, für dessen Betrag gilt $|\vec{0}| = 0$. Für ihn lässt sich keine Richtung angeben, häufig wird der Vektorpfeil über der Null weggelassen, da aus dem Zusammenhang deutlich wird, dass es sich um einen Vektor handelt. Wird der Vektor $\vec{r}$ in (4) Null, so definiert die Gleichung nur den Punkt $\vec{r}_0$. Wird einer der Richtungsvektoren in der Ebenengleichung Null, so definiert die Gleichung nur noch eine Gerade; verschwinden beide Richtungsvektoren in der Ebenengleichung, so wird durch die Gleichung nur ein Punkt definiert.
- der Einheitsvektor $\vec{e}$ ist ein Vektor mit dem Betrag 1, d.h. es ist $|\vec{e}| = 1$. Einheitsvektoren werden häufig verwendet, wenn eine Richtung angegeben werden soll. So können Einheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ zur Angabe eines kartesischen Koordinatensystems verwendet werden. Da die Vektoren in der Geraden- bzw. Ebenengleichung nur Richtungen angeben sollen und ohnehin mit reellen Zahlen $\lambda$ (und $\mu$) skaliert werden, verwendet man auch in dieser Darstellungsform in der Regel Einheitsvektoren.

§ **84** Vektoren können auf verschiedene Weise dargestellt werden. Die anschaulichste Form sind kartesische Koordinaten. In der Physik werden häufig auch andere Koordinatensysteme verwendet, die durch die Ausnutzung bestimmter Symmetrien des Problems seine Behandlung vereinfachen – Sie werden diese Darstellungsformen am Anfang Ihres Studiums kennen lernen.

§ **85** Im Vorkurs beschränken wir uns auf kartesische Koordinaten. Diese beschreiben das konventionelle rechtwinklige Koordinatensystem, das Sie z.B. bei der Darstellung von Funktionen verwenden. Das zweidimensionale System mit $x$- und $y$-Achse ist ein Spezialfall, die allgemeinere Darstellung erfolgt im dreidimensionalen System mit der zusätzlichen $z$-Achse.

§ **86** Ein kartesisches Koordinatensystem ist also über drei senkrecht aufeinander stehende Achsen, die von einem gemeinsamen Ursprung ausgehen und ein Rechtssystem (vgl. Kreuzprodukt, § 125) bilden, definiert.

§ **87** Zur Bestimmung der Lage eines Punktes werden die Abstände des Punktes vom Ursprung entlang dieser Achsen angegeben als ein Zahlentripel $(x, y, z)$. Unter Verwendung der Einheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ entlang der Achsen mit

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lässt sich der Ortsvektor $\vec{r}$ des Punktes $P = P(x, y, z)$ auch schreiben als

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z\,. \end{aligned}$$

In Anlehnung an die Gradengleichung (4) können wir diese Darstellung als die eines Raumes interpretieren, wobei der Ortsvektor $\vec{r}$ in Abhängigkeit von den reellen Vorfaktoren $x$, $y$ und $z$ jeden Punkt des durch die drei linear unabhängigen Einheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ aufgespannten Raumes beschreiben kann. Als beliebigen Punkt $\vec{r}_0$ des Raumes haben wir dabei den Punkt $(0, 0, 0)$ gewählt.

§ **88** Der Einheitsvektor $\vec{e}_{\vec{r}}$ in Richtung eines beliebigen Vektors $\vec{r}$ ergibt sich durch die Division des Vektors durch seinen Betrag:

$$\vec{e}_{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} .$$

Der Betrag (die Länge) des Vektors ist

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} .$$

Letzteres können Sie sich durch Anwendung des Satzes von Pythagoras klar machen.

§ **89** Betrachten wir zur kartesischen Darstellung und zum Einheitsvektor ein Beispiel. Der mit Hilfe der Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems dargestellte Vektor

$$\vec{r} = 3 \cdot \vec{e}_x + 4 \cdot \vec{e}_y - 5 \cdot \vec{e}_z \tag{5}$$

lässt sich als Spaltenvektor auch schreiben als

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

Der Betrag dieses Vektors ist

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} \approx 7.07 ;$$

der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{r}$ ist damit gegeben als

$$\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

### 2.2.1 Rechentraining

**Aufgabe 56** Ein Schiff startet zur Zeit $t = 0$ im Ursprung eines Koordinatensystems. Der Steuermann setzt den Kurs auf Nordost mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}_{\text{Schiff}} = (6, 6)$ km/h. Das Gewässer, in dem sich das Schiff befindet, strömt in Nordwestlicher Richtung mit $\vec{v}_{\text{Wasser}} = (-1, 1)$ km/h. Wo befindet sich das Schiff nach einer Stunde? Wie weit hat es sich in dieser Zeit vom Ausgangspunkt entfernt?

Hilfe zur Aufgabe in § 494 Musterlösung in § 508

**Aufgabe 57** Eine Fähre soll vom Punkt $\vec{r}_1 = (0, 3)$ km auf das gegenüberliegende Flussufer zum Punkt $\vec{r}_2 = (0, 6)$ km gelangen. Der Fluss strömt mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}_{\text{Fluss}} = (-1, 0)$ km/h. In welche Richtung bzw. mit welcher Geschwindigkeit muss die Fährfrau ihr Boot steuern, wenn die Überfahrt 30 min dauert?

Hilfe zur Aufgabe in § 495 Musterlösung in § 509

**Aufgabe 58** Ein Dreieck ist definiert durch die Eckpunkte $A = (1, 1, 2)$, $B = (1, 3, 2)$ und $C = (3, 1, 2)$. Bestimmen Sie die Vektoren entlang der Seitenkanten $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$.

Hilfe zur Aufgabe in § 496 Musterlösung in § 510

**Aufgabe 59** Die drei in einem kartesischen Koordinatensystem K durch $\vec{e}_1 = (1,1,1)/\sqrt{3}$, $\vec{e}_2 = (1,-1,1)/\sqrt{3}$ und $\vec{e}_3 = (1,1,-1)$ dargestellten Einheitsvektoren bilden die Basis eines Koordinatensystems K'. In K' ist ein Punkt $A = (a'_1, a'_2, a'_3) = (1,2,3)$ durch seine Komponenten $a'_1$ entlang dieser Einheitsvektoren gegeben. Geben Sie die Koordinaten dieses Punktes im kartesischen System K an.

Hilfe zur Aufgabe in § 497 Musterlösung in § 511

**Aufgabe 60** Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (3,4,5)$ und $\vec{b} = (1,2,-1)$. Bestimmen Sie die Beträge der Vektoren sowie Einheitsvektoren in Richtung dieser Vektoren.

Lösung in § 512

**Aufgabe 61** Auf Grund der einfachen elektronischen Überprüfbarkeit rechnen wir in diesem Vorkurs relativ viel mit konkreten Zahlen. In der Physik dagegen werden Ihnen wesentlich häufiger symbolische Rechnungen begegnen – so auch in dieser (und einigen anderen) Trainingsaufgaben. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, -a_y, b_z)$ und $\vec{c} = (a_x + 2b_x, 2a_y, -a_z - b_z)$. Bestimmen Sie daraus die Ausdrücke $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ und $\vec{e} = \lambda\vec{a} - \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$.

Lösung in § 513

## 2.3 Vektoralgebra

§ **90** In der Vektoralgebra werden die elementaren Manipulationen von und mit Vektoren formalisiert: die Addition von Vektoren sowie die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Beide Operationen haben wir bereits in der Darstellung des Vektors mit Hilfe seiner Einheitsvektoren in (5) intuitiv verwendet. Diese Operationen gehorchen den Regeln für eine Gruppe bzw. einen Körper – beides Konzepte, die nicht auf Vektoren beschränkt sind sondern in Mathematik und Physik eine breite Anwendung finden. Ein wichtiger Aspekt ist die Beschränkung auf wenige elementare Rechenoperationen und die Rückführung anderer Operationen auf diese Grundoperationen. So habe wir in der Grundschule zwar die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division kennen gelernt, mathematisch benötigen wir jedoch nur zwei davon: die Addition und die Multiplikation, da die beiden anderen Grundrechenarten als die Verwendung der gleichen mathematischen Operation mit dem Inversen dargestellt werden können.

### 2.3.1 Gleiche, inverse und parallele Vektoren

§ **91** Zur Formalisierung benötigen wir einige Begriffe:

- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich, $\vec{a} = \vec{b}$, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen, vgl. Abb. 3.
- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel, $\vec{a} \| \vec{b}$, wenn sie gleiche Richtung haben. Parallele Vektoren können unterschieden werden in gleichsinnig parallel und gegensinnig parallel (antiparallel). Sind zwei Vektoren parallel, so lässt sich der eine Vektor als ein Vielfaches des anderen ausdrücken, $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Beide Vektoren haben den gleichen Einheitsvektor (bis auf das Vorzeichen im Falle von antiparallel).
- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind invers zueinander, wenn sie im Betrag übereinstimmen aber in der Richtung entgegengesetzt sind. Die Summe zueinander inverser Vektoren verschwindet.

§ **92** Aus dem letzten Punkt lässt sich die Definition des Gegenvektors ableiten: der zu einem Vektor $\vec{a}$ gehörende inverse Vektor oder Gegenvektor $-\vec{a}$ besitzt den gleichen Betrag wie der Vektor $\vec{a}$ jedoch die entgegengesetzte Richtung. Der Gegenvektor erlaubt damit die Umkehrung einer Verschiebung. Komponentenweise lässt er sich darstellen als

$$-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix} .$$

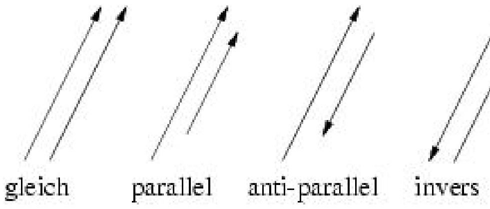



Abbildung 3: Gleiche, parallele, anti-parallele und inverse Vektoren

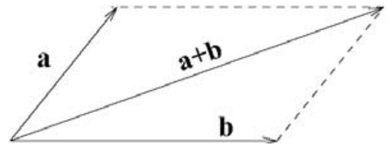



Abbildung 4: Komponentenweise Vektoraddition

### 2.3.2 Vektoraddition und -subtraktion

§ **93** Die Addition von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kann graphisch durch das Aneinanderhängen der Vektoren erfolgen: der Vektor $\vec{b}$ wird parallel zu sich selbst verschoben bis sein Anfangspunkt in den Endpunkt des Vektors $\vec{a}$ fällt. Der vom Anfangspunkt des Vektors $\vec{a}$ zum Endpunkt des Vektors $\vec{b}$ gerichtete Vektor ist der Summenvektor $\vec{a}+\vec{b}$. Alternativ können Sie die beiden Vektoren auch so verschieben, dass ihre Anfangspunkte zusammenfallen. Dann spannen diese Vektoren ein Parallelogramm auf, dessen Diagonale dem Summenvektor entspricht.

§ **94** In kartesischen Koordinaten werden Vektoren komponentenweise addiert. Für einen Vektor in zwei Dimensionen ist dies in Abb. 4 anschaulich dargestellt; allgemein gilt

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} .$$

Die Begründung für dieses Verfahren wird aus der Darstellung der Vektoren mit Hilfe ihrer Einheitsvektoren deutlich:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z + b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z \\ &= (a_x + b_x)\vec{e}_x + (a_y + b_y)\vec{e}_y + (a_z + b_z)\vec{e}_z = c_x\vec{e}_x + c_y\vec{e}_y + c_z\vec{e}_z \ . \end{aligned}$$

Hierbei haben wir vorausgesetzt, dass das Kommutativgesetz gilt (umsortieren der Reihenfolge der Summanden in der ersten Zeile) und ebenso das Distributivgesetz (die Einheitsvektoren können in der zweiten Zeile jeweils ausgeklammert werden).

§ **95** Die Subtraktion von Vektoren ist keine neue mathematische Operation sondern kann auf die Addition des inversen Elements zurück geführt werden:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \\ -b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + (-b_x) \\ a_y + (-b_y) \\ a_z + (-b_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

Diese Betrachtungsweise ist auch für die geometrische Darstellung möglich.

§ **96** Addieren wir zu einem Vektor $\vec{b}$ erst einen Vektor $\vec{a}$ und dann den dazu inversen Vektor $-\vec{a}$, so entspricht das einer Verschiebung erst um $\vec{a}$ und anschließend einer entgegengesetzten Verschiebung um den gleichen Betrag. Im Endeffekt heben sich diese beiden Verschiebungen auf – es wird nichts verschoben. Formal können wir diesen Sachverhalt mit Hilfe des neutralen Elements ausdrücken: Anwendung des neutralen Elements führt zu keiner Verschiebung, d.h. der Nullvektor muss das neutrale Element der Addition sein.

§ **97** Für Vektoren gilt also bezüglich ihrer Addition: es gibt ein neutrales Element, den Nullvektor, und ein inverses Element, den Gegenvektor. Die Addition des inversen Elements liefert das neutrale Element:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - a_x \\ a_y - a_y \\ a_z - a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \,.$$

§ **98** Für die Addition von Vektoren gelten die folgenden Rechenregeln:

- Kommutativgesetz der Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \,.$$

- Assoziativgesetz der Addition

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{b} + (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \,.$$

- Definition der Subtraktion als Addition des inversen Elements.

§ **99** Die Eigenschaften von Vektoren bezüglich der Addition können wir mit einem kurzen mathematischen Oberbegriff charakterisieren: Vektoren verhalten sich hinsichtlich der Addition wie eine Abel'sche Gruppe. Den Begriff der Gruppe führt man ein, um das Verhalten mathematischer Objekte bezüglich einer Rechenoperation zu charakterisieren:

**Definition**: Unter einer *Gruppe* bezeichnet man eine Menge von Objekten mit den folgenden Eigenschaften:

1. sie ist abgeschlossen bezüglich einer inneren Verknüpfung,
2. es gilt ein Assoziativgesetz,
3. es existiert genau ein neutrales Element, und
4. zu jedem Element existiert genau eine Umkehrung.

Gilt außerdem das Kommutativgesetz, so handelt es sich um eine Abel'sche Gruppe.

§ **100** Wir haben als Beispiele für eine Gruppe die mathematischen Objekte Vektoren und die Verknüpfung Addition betrachtet. Der Begriff der Gruppe ist jedoch nicht auf diese mathematischen Objekte und diese Verknüpfung beschränkt: so bildet die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung Addition, da (1) die Summe zweier ganzen Zahlen wieder eine ganze Zahl ist, (2) das Assoziativgesetz gilt, (3) mit der Null genau ein neutrales Element existiert und (4) zu jeder ganzen Zahl $z$ mit $-z$ eine inverse Zahl existiert. Da bei der Addition ganzer Zahlen das Kommutativgesetz gilt, bildet die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen sogar eine Abel'sche Gruppe bezüglich der Addition. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen dagegen bildet keine Gruppe bezüglich der Addition, da die Forderung nach einem inversen Element nicht erfüllt werden kann (dafür werden die negativen Zahlen benötigt).

§ **101** Das Konzept der Gruppe vereinfacht den Umgang mit verschiedenen mathematischen Objekten wie reellen Zahlen, Vektoren, Matrizen oder komplexen Zahlen, indem es ein Regelwerk zur Verfügung stellt, dass für diese Objekte bezüglich jeweils einer mathematischen Operation gilt: wir müssen also nicht für Vektoren ein neues Regelwerk lernen sondern können das durch den Begriff der Gruppe gelegte Regelwerk übernehmen, so wie wir es auch für reelle Zahlen getan haben.

**Verständnisfrage 3** Untersuchen sie, ob die folgenden Mengen mathematischer Objekte Gruppen bezüglich der Addition und/oder Multiplikation bilden: natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen. Sind diese Gruppen abelsch? Hinweis in § 490

### 2.3.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

§ **102** Die Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar $\lambda$ kann als die $\lambda$-fach nacheinander erfolgende Ausführung der Verschiebung $\vec{a}$ interpretiert werden. Damit lässt sie sich auf eine wiederholte Addition zurückführen. Graphisch erfolgt die Multiplikation durch Verlängerung des Vektors (die Richtung bleibt erhalten, der Betrag wird um den Faktor $\lambda$ erhöht). In kartesischen Koordinaten erfolgt die Multiplikation mit einem Skalar komponentenweise:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \alpha \cdot a_y \\ \lambda \cdot a_z \end{pmatrix} .$$

Auch diese Regel können wir aus der Darstellung (5) von Vektoren mit Hilfe der Einheitsvektoren begründen:

$$\lambda\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \lambda(a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z) = \lambda a_x\vec{e}_x + \lambda a_y\vec{e}_y + \lambda a_z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix} .$$

Dabei haben wir die Gültigkeit eines Distributivgesetzes stillschweigend voraus gesetzt – wir werden später auf diesen Punkt zurück kommen.

§ **103** Für den Betrag des Vektors $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ gilt dann

$$|\vec{b}| = |\lambda \cdot \vec{a}| = |\sqrt{(\lambda a_x)^2 + (\lambda a_y)^2 + (\lambda a_z)^2}| = |\sqrt{\lambda^2(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}| = |\lambda|\vec{a}|| = |\lambda||\vec{a}| .$$

Für $\lambda > 0$ sind die beiden Vektoren parallel, für $\lambda < 0$ sind sie anti-parallel.

§ **104** Die Division eines Vektors durch einen Skalar entspricht der Multiplikation des Vektors mit dem Kehrwert der Zahl:

$$\frac{\vec{a}}{\lambda} = \mu \cdot \vec{a} \qquad \text{mit} \qquad \mu = \frac{1}{\lambda} .$$

§ **105** Für die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar gelten die folgenden Rechenregeln:

- Kommutativgesetz der Multiplikation Vektor–Skalar

$$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \alpha .$$

- Assoziativgesetz der Multiplikation Vektor–Skalar

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \beta \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \beta \cdot \vec{a} .$$

- Distributivgesetz der Multiplikation Vektor–Skalar

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \qquad \text{und} \qquad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} .$$

§ **106** Auch hier können wir das Konzept der Gruppe aus § 99 anwenden: Vektoren bilden bezüglich der Multiplikation mit einem Skalar eine Abel'sche Gruppe, da (1) die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar wieder einen Vektor liefert (Abgeschlossenheit), (2) wie in § 105 dargestellt ein Assoziativgesetz gilt, (3) es genau ein neutrales Element gibt, nämlich die Eins, und (4) zu jedem Element $\lambda(\neq 0)$ mit $\mu = 1/\lambda$ ein Inverses existiert. Damit bilden Vektoren bezüglich der Multiplikation mit einem Skalar eine Gruppe. Da zusätzlich gemäß § 105 auch das Kommutativgesetz gilt, ist diese Gruppe eine Abel'sche.

§ **107** Das dritte der in § 105 genannten Gesetze, das Distributivgesetz, tritt in der Definition einer Gruppe nicht auf. Im Gegensatz zu Assoziativ- und Kommutativgesetz ist es nicht auf eine mathematische Verknüpfung (Addition oder Multiplikation mit einem Skalar) beschränkt, sondern verknüpft zwei mathematische Operationen mit einander, eben die Addition und die Multiplikation mit einem Skalar. Mit dem mathematischen Begriff des Körpers können wir auch das Distributivgesetz in ein allgemeineres Konzept einbetten:

**Definition**: Unter einem *Körper* versteht man eine Menge von mathematischen Objekten mit den folgenden Eigenschaften:

1. für diese Objekte sind zwei mathematische Verknüpfungen definiert,
2. die mathematischen Objekte gehorchen für jede dieser Verknüpfungen den Regeln einer Gruppe (aber nicht notwendigerweise einer Abel'schen Gruppe),
3. die beiden Verknüpfungen/Gruppen sind durch ein Distributivgesetz verbunden.

§ **108** Da Vektoren sowohl bezüglich der Addition als auch bezüglich der Multiplikation mit einem Skalar eine Gruppe bilden, und die beiden mathematischen Operationen durch ein Distributivgesetz verknüpft sind, bildet die Menge der Vektoren bezüglich der beiden Operationen Addition und Multiplikation mit einem Skalar einen Körper.

**Verständnisfrage 4** Untersuchen sie, ob die folgenden Mengen mathematischer Objekte Körper bezüglich der Addition und der Multiplikation bilden: natürliche Zahlen, ganze Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen. Hinweis in § 491

§ **109** Mit diesen Vorkenntnissen können wir jetzt Aufgabe 52 bearbeiten. Die einzige Herausforderung in dieser Aufgabe bestand wahrscheinlich darin, Vektor $\vec{a}$ aus den Einheitsvektoren zusammen zu setzen als

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Damit ergibt sich für die zu bestimmenden algebraischen Ausdrücke durch komponentenweise Ausführung der entsprechenden Rechenoperationen

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2-3 \\ 2-2-0 \\ -3+1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

$$2(\vec{a} - \vec{b}) + 5\vec{c} = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-4+20 \\ 4+4 \\ -6-2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 8 \\ -13 \end{pmatrix} ,$$

$$-3\vec{a} + 2\vec{b} - (\vec{c} - 2\vec{b}) = -3\vec{a} - \vec{c} = -3\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15-3 \\ -6 \\ -9+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} .$$

### 2.3.4 Rechentraining

**Aufgabe 62** Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a} = (1, 4, -4)$ und $\vec{b} = (2, 3, -1)$. Bilden Sie das Doppelte der Summe der beiden Vektoren, die Differenz des Vierfachen der beiden Vektoren sowie die Summe aus dem Dreifachen von $\vec{a}$ und dem Vierfachen von $\vec{b}$.

Lösung in § 514

**Aufgabe 63** Auf einen ruhenden Körper wirken die Kräfte $\vec{F}_1 = (3, 2, 3)$ N, $\vec{F}_2 = (-1, 3, -1)$ N, $\vec{F}_3 = (-1, -2, -4)$ N und $\vec{F}_4 = (2, 1, -4)$ N. Bestimmen Sie daraus die resultierende Kraft. Bleibt der Körper in Ruhe oder bewegt er sich? Und wenn ja, in welche Richtung?

Hilfe zur Aufgabe in § 498 Musterlösung in § 515

**Aufgabe 64** Auf einen Körper wirken die Kräfte $F_1 = (2, 3, -4)$N, $F_2 = (1, 3, -2)$ N, $F_3 = (-2, 3, -1)$N und $F_4 = (-2, 2, -1)$N. Bestimmen Sie eine weitere Kraft $F_5$ derart, dass sich der Bewegungszustand des Körpers nicht verändert.

Hilfe zur Aufgabe in § 499 Musterlösung in § 516

**Aufgabe 65** Die drei elektrischen Punktladungen $q_1 = 1$ C, $q_2 = -2$ C und $q_3 = 3$ C befinden sich an den Orten $\vec{r}_1 = (1, 1, 1)$ m, $\vec{r}_2 = (0, 1, -1)$ m und $\vec{r}_3 = (-1, 2, -1)$ m. Bestimmen Sie daraus die elektrische Feldstärke im Ursprung. Für den Betrag der elektrischen Feldstärke gilt $E = kq/r^2$ mit normalerweise $k = 1/4\pi\epsilon_0$, in unserem Fall jedoch $k = 1$ Vm/(As) um die Rechnung übersichtlich zu halten. Die Richtung des elektrischen Feldes einer Punktladung ist stets radial und zwar auf eine negative Ladung zu und von einer positiven weg.

Hilfe zur Aufgabe in § 500 Musterlösung in § 517

**Aufgabe 66** In einem abgeschlossenen System bleibt der Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ mit $m$ als der Masse und $\vec{v}$ als der Geschwindigkeit erhalten. Ein Beispiel für die Anwendung der Impulserhaltung ist der Stoß zwischen Billardkugeln. In diesem speziellen Fall stößt eine Billardkugel mit Masse $m = 200$ g und Impuls $\vec{p}_0$ auf zwei ruhende Kugeln, die sich nach dem Stoß mit den Impulsen $\vec{p}_1 = (1, 1)$ kg m/s und $\vec{p}_2 = (1, -1)$ kg m/s fortbewegen während die anstoßende Kugel nach dem Stoß in Ruhe ist. Bestimmen Sie den Impuls $\vec{p}_0$ der anstoßenden Kugel sowie ihre Geschwindigkeit. Ändert sich das Ergebnis Ihrer Rechnung, wenn die angestoßenen Billardkugeln eine größere oder kleinere Masse haben als die anstoßende Kugel? Begründen Sie.

Hilfe zur Aufgabe in § 501 Musterlösung in § 518

## 2.4 Multiplikation von Vektoren

### 2.4.1 Übersicht

§ **110** Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar als die Verlängerung eines Vektors, $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a}$, haben wir bereits im vorangegangenen Kapitel kennen gelernt. Untereinander können Vektoren auf zwei unterschiedliche Weisen multipliziert werden:

- Skalarprodukt: Multiplikation zweier Vektoren derart, dass das Ergebnis ein Skalar ist. Das Skalarprodukt wird auch als inneres Produkt bezeichnet. Unabhängig von der Darstellung in einem speziellen Koordinatensystem gilt für das Skalarprodukt $c$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

  $$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))\ ,$$

  in kartesischen Koordinaten gilt insbesondere auch

  $$c = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\ .$$

  Physikalisches Anwendungsbeispiel ist die Arbeit $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ als das Produkt aus der Kraft entlang eines Weges und dem Weg. Das Skalarprodukt wird ferner verwendet
  – um zu bestimmen ob Vektoren orthogonal sind,
  – um den Winkel zwischen Vektoren zu bestimmen oder
  – zur Projektion eines Vektors auf einen anderen.
- Kreuzprodukt: Multiplikation zweier Vektoren derart, dass das Ergebnis ein Vektor ist. Das Kreuzprodukt wird auch als äußeres Produkt bezeichnet. Unabhängig von der Darstellung in einem speziellen Koordinatensystem gilt für das Kreuzprodukt $\vec{c}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

  $$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad \text{mit} \qquad |\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))\ .$$

  Physikalisches Anwendungsbeispiel ist das Drehmoment $\vec{\tau} = \vec{l} \times \vec{F}$ als die Kraft senkrecht zu einem Hebel multipliziert mit dem Hebelarm. Das Kreuzprodukt wird ferner verwendet
  – um einen auf den beiden Ausgangsvektoren senkrecht stehenden Vektor zu bestimmen oder
  – um den Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms zu bestimmen.

Beide Formen der Multiplikation werden im Spatprodukt kombiniert, das das Volumen des von drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds gibt:

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\ .$$

### 2.4.2 Skalarprodukt

**Definition:** Das innere Produkt (Skalarprodukt) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist die Zahl (Skalar) $a \cdot b \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) \ . \tag{6}$$

Darin sind $a$ und $b$ die Beträge der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ ist der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel.

§ **111** Das Skalarprodukt hat die folgenden Eigenschaften:

1. das Ergebnis ist ein Skalar;
2. der Winkel $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ zwischen den Vektoren wird berücksichtigt;
3. die Beträge der beiden Vektoren werden berücksichtigt (wie beim Produkt zweier Zahlen).

§ **112** Aus der Definition des Skalarprodukts ergeben sich zwei wichtige Anwendungen:

- Der Betrag eines Vektors lässt sich mit Hilfe des Skalarprodukts berechnen. Da gilt $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$, gilt für den Betrag $a$ eines Vektors $\vec{a}$:

  $$a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

- Das Skalarprodukt kann auch verwendet werden, um Vektoren auf Orthogonalität zu prüfen. In diesem Falle beträgt der von den Vektoren eingeschlossene Winkel $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ 90°. Damit ist $\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = 0$ und damit verschwindet gemäß (6) das Skalarprodukt. Damit gilt

  $$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \ .$$

§ **113** Die beiden obigen Anwendungen betrachten Spezialfälle des Winkels zwischen den Vektoren: bei der Bestimmung des Betrages wird ein Vektor mit sich selbst multipliziert, d.h. der Winkel beträgt 0°, bei orthogonalen Vektoren beträgt der Winkel zwischen den Vektoren 90° und das Skalarprodukt verschwindet. Da der Winkel zwischen den Vektoren gemäß (6) in das Skalarprodukt eingeht, kann umgekehrt das Skalarprodukt verwendet werden, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu bestimmen:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \operatorname{acos} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \ .$$

§ **114** Über diesen Zusammenhang lässt sich der Richtungswinkel zwischen einem Vektor $\vec{a}$ und einer Koordinatenachse bestimmen. Dazu multiplizieren wir den Vektor mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_i$ entlang der Koordinatenachse und erhalten für den Richtungswinkel $\alpha_i$

$$\cos \alpha_i = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_i}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_i|} = \frac{a_i}{|\vec{a}|} = \frac{a_i}{a}; .$$

In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Richtungswinkel

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1 \ .$$

§ **115** Lässt sich das Skalarprodukt nicht bestimmen, so erlaubt die Schwarz'sche Ungleichung die Angabe einer oberen Grenze:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \ ,$$

da $|\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))| < 1$.

§ **116** Für das Skalarprodukt gelten die folgenden Rechenregeln:

- Kommutativgesetz:

  $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \ .$$

- Assoziativgesetz:

$$(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\alpha \cdot \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \, .$$

- Distributivgesetz:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \, .$$

§ **117** In kartesischen Koordinaten lässt sich das Skalarprodukt berechnen gemäß

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \, .$$

Eine formale Begründung erhalten wir, wenn wir beide Vektoren mit Hilfe ihrer Einheitsvektoren darstellen als

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i \, .$$

Dann gilt für das Produkt der beiden

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \cdot \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \cdot (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) \, .$$

Unter Anwendung des Distributivgesetzes ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = {} & a_x b_x (\vec{e}_x)^2 + a_x b_y \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + a_x b_z \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z + a_y b_x \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + a_y b_y (\vec{e}_y)^2 + a_y b_z \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z \\ & + a_z b_x \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x + a_z b_y \vec{e}_z \cdot \vec{e}_y + a_z b_b (\vec{e}_z)^2 \, . \end{aligned}$$

Hierbei verschwinden alle Produkte $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ mit $i \neq j$, da diese Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem senkrecht auf einander stehen. Es bleiben nur die Produkte für $i = j$, da hier ein Einheitsvektor mit sich selbst multipliziert wird. Damit erhalten wir den Betrag dieses Einheitsvektors, d.h. 1. Für das Skalarprodukt ergibt sich also wie oben angegeben

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \, .$$

§ **118** Als einfaches Rechenbeispiel bestimmen wir das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a} = (3, -1, 2)$ und $\vec{b} = (1, 2, 4)$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 9 \, .$$

Der Winkel zwischen den Vektoren beträgt wegen $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$ und $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \text{acos} \frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = 58.3^\circ \, .$$

§ **119** Als weiteres Training für das Skalarprodukt wenden wir uns der Lösung von Aufgabe 53 zu. Dazu sind aus den Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (-2, 1, 0)$ und $\vec{c} = (3, 0, 1)$ die folgenden Ausdrücke zu bestimmen:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 6 \, ,$$

$$(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -6 \, ,$$

$$\left( \vec{a} \cdot \vec{b} \right) \vec{c} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \, .$$

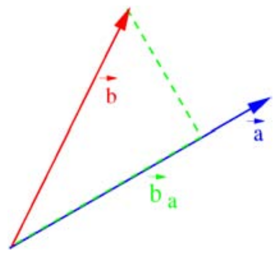



Abbildung 5: Projektion eines Vektors auf einen zweiten

§ **120** Neben den mathematischen Anwendungen wie Bestimmung eines Winkels zwischen Vektoren oder die Überprüfung von Vektoren auf Orthogonalität interessieren uns die physikalischen Anwendungen, insbesondere die Definition der Arbeit. Die Arbeit im physikalischen Sinne ist für eine konstante Kraft $\vec{F}$ definiert über das Skalarprodukt

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \,.$$

Einsetzen der Definition des Skalarprodukts liefert

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos(\angle(\vec{F}, \vec{s})) = F_s \cdot s \tag{7}$$

mit $F_s$ als der Kraftkomponente entlang des Weges $s$. Diese Form entspricht dem aus der Schulphysik bekannten Zusammenhang: Arbeit = Kraftkomponente in Wegrichtung mal zurückgelegtem Weg.

§ **121** In (7) bezeichnet das $F_s$ die Projektion der Kraft auf den Weg. Allgemein können wir das Skalarprodukt also auch verwenden, um die Projektion eines Vektors auf einen anderen zu bestimmen, vgl. Abb. 5. Dort ist mit $\vec{b}_a$ die Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$ bezeichnet mit

$$|\vec{b}_a| = |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) \,.$$

Die Definition (6) des Skalarprodukts lässt sich auch schreiben als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}_a|$$

woraus sich ergibt

$$|\vec{b}_a| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \,. \tag{8}$$

Dieser Ausdruck gibt den Betrag der Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$.

§ **122** Die Projektion von Vektor $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ hat jedoch auch eine Richtung. Da $\vec{b}_a$ die gleiche Richtung hat wie $\vec{a}$, muss für die Projektion in vektorieller Form, d.h. unter Angabe sowohl des Betrages als auch der Richtung, gelten

$$\vec{b}_a = |\vec{b}_a| \cdot \vec{e}_a = |\vec{b}_a| \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \,.$$

Nach Einsetzen von (8) ergibt sich damit

$$\vec{b}_a = \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} \,.$$

§ **123** Hierzu ein physikalisches Beispiel: die konstante Kraft $\vec{F} = (-10, 2, 5)$ N verschiebe einen Massenpunkt vom Punkt $P_1 = (1, -5, 3)$ m gradlinig zum Punkt $P_2 = (0, 1, 4)$ m. Welche Arbeit wird dabei verrichtet und wie groß ist der Winkel zwischen der Kraft und dem Verschiebungsvektor? Der Verschiebungsvektor ist gegeben als

$$\vec{s} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ m} \,;$$

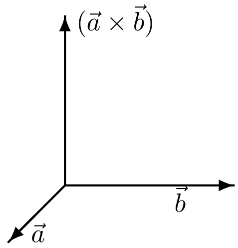



Abbildung 6: Orientierung der Vektoren im Rechte-Hand-System

für die verrichtete Arbeit ergibt sich daraus

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ N} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ m} = (10 + 12 + 5) \text{ Nm} = 27 \text{ Nm} .$$

Mit den Beträgen $|\vec{s}| = \sqrt{38}$ m und $|\vec{F}| = \sqrt{129}$ N ergibt sich für den Winkel

$$\angle(\vec{F}, \vec{s}) = \text{acos} \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \text{acos} \frac{27 \text{ Nm}}{\sqrt{129} \text{ N} \cdot \sqrt{38} \text{ m}} = \text{acos}\, 0.386 = 67.3° .$$

### 2.4.3 Kreuzprodukt

**Definition** Das äußere Produkt (Kreuzprodukt, Vektorprodukt) aus zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ mit

$$|\vec{c}| = a \cdot b \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) . \tag{9}$$

Die drei Vektoren bilden ein Rechstsystem (Rechte Hand Regel) mit $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$, vgl. Abb. 6

§ **124** Der letzte Satz weist auf eine der wichtigsten Anwendungen des Kreuzproduktes hin: es kann verwendet werden, um einen senkrecht stehenden Vektor zu erzeugen. Damit lässt sich z.B. aus einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem ein dreidimensionales kartesisches System erzeugen: der Einheitsvektor in dieser dritten Dimension ist als das Kreuzprodukt der beiden Einheitsvektoren des zweidimensionalen Systems gegeben,

$$\vec{e}_z = \vec{e}_x \times \vec{e}_y .$$

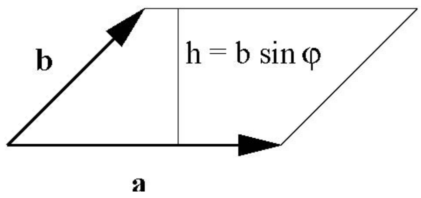
Auch lässt das Kreuzprodukt zur eindeutigen Definition einer Ebene im Raum verwenden: statt die Ebene über zwei Richtungsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ in der Form $\vec{r} = \lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2$ zu definieren, definieren wir die Ebene einfach über einen auf der Ebene senkrecht stehen den Vektor $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$. Für jeden Punkt $\vec{r}$ in der Ebene gilt dann $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$.

§ **125** Das Rechtssystem können wir uns auch anschaulich klar machen, vgl. Abb. 6: die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ stehen wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger (in dieser Reihenfolge) der gespreizten rechten Hand (Rechte-Hand Regel). Alternativ können Sie sich die räumlich Anordnung der Vektoren auch über eine andere Form der rechten Hand-Regel klar machen: die Finger der gekrümmten Hand weisen in die Richtung, in der Sie $\vec{a}$ auf kürzestem Wege auf $\vec{b}$ drehen können. Dann weist der Daumen in Richtung des Kreuzproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$. Wenn es Ihnen leichter fällt, können Sie auch von einem kartesischen Koordinantensystem ausgehen, um die Lage des Dreibeins zu definieren. Ein derartiges System würde durch die Vektoren in Abb. 6 beschreibbar sein.

§ **126** Aus der Definition (9) ergeben sich folgende Eigenschaften des Kreuzproduktes:

1. das Ergebnis muss ein Vektor sein;
2. der Winkel zwischen den beiden Vektoren wird berücksichtigt;
3. die Länge der Vektoren wird berücksichtigt.

Abbildung 7: Der Betrag des Kreuzprodukts entspricht dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms




Die zweite und dritte Eigenschaft entspricht der beim Skalarprodukt, in der ersten steckt der Unterschied: das Skalarprodukt gibt einen Skalar, das Kreuzprodukt einen Vektor. Aber auch der Eingang des Winkels in das Produkt ist unterschiedlich: beim Kreuzprodukt wird der Sinus des Winkels verwendet, beim Skalarprodukt der Kosinus. Daher verschwindet das Kreuzprodukt dann, wenn die Vektoren parallel sind, und ist maximal, wenn die Vektoren senkrecht auf einander stehen. Beim Skalarprodukt ist es genau umgekehrt: es verschwindet, wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen, und es ist maximal, wenn die Vektoren parallel sind.

§ **127** Für das Vektorprodukt gelten die folgenden Rechenregeln, die man sich wieder mit Hilfe der komponentenweisen Darstellung klar machen kann:

- Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ, d.h. bei der Multiplikation spielt die Reihenfolge der Vektoren eine Rolle. Das ist einleuchtend, da die beiden Multiplikanden zusammen mit dem Produkt ein Rechtssystem bilden sollen – und bei Vertauschung der Multiplikanden das Produkt daher in die entgegengesetzte Richtung weisen muss. Daher gilt anstelle des Kommutativgesetzes ein Anti-Kommutativgesetz:
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \,.$$
- Assoziativgesetz:
$$(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b} \,.$$
- Distributivgesetz:
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \,.$$

§ **128** Anschaulich lässt sich der Betrag des Vektorprodukts als die Fläche des aufgespannten Parallelogramms interpretieren:
$$F = |\vec{a} \times \vec{b}| \,.$$
Dieser Zusammenhang ist aus Abb. 7 unmittelbar einsichtig: die Fläche des Parallelogramms ist das Produkt aus Grundseite und Höhe: $F = ah$. Die Höhe $h$ ergibt sich dabei als Produkt aus der Länge der anderen Seite $b$ und dem Sinus des von den beiden Seiten eingeschlossenen Winkels: $h = b \sin\varphi$. Damit ist $F = ah = ab\sin\varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

§ **129** In kartesischen Koordinaten lässt sich das Kreuzprodukt darstellen als
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix} \,. \tag{10}$$
Wie beim Skalarprodukt gehen wir für die Begründung dieser Multiplikationsregel von der Darstellung der Vektoren mit Hilfe der Einheitsvektoren aus und verwenden das Distributiv- und das Anti-Kommutativgesetz. Dann ergibt sich
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z) \times (b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z) \\ &= a_xb_x(\vec{e}_x \times \vec{e}_x) + a_xb_y(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) + a_xb_z(\vec{e}_x \times \vec{e}_z) \\ &\quad + a_yb_x(\vec{e}_y \times \vec{e}_x) + a_yb_y(\vec{e}_y \times \vec{e}_y) + a_yb_z(\vec{e}_y \times \vec{e}_z) \\ &\quad + a_zb_x(\vec{e}_z \times \vec{e}_x) + a_zb_y(\vec{e}_z \times \vec{e}_y) + a_zb_z(\vec{e}_z \times \vec{e}_z) \,. \end{aligned}$$

Hier verschwinden alle Produkte $\vec{e}_i \times \vec{e}_i$, da die Einheitsvektoren parallel sind und damit das Kreuzprodukt verschwindet. Bei den anderen Produkten ergibt sich jeweils der dritte Einheitsvektor, wobei jedoch auf die Richtung zu achten ist (Rechtssystem):

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \,, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \quad \text{und} \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \,.$$

Damit erhalten wir

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_y \vec{e}_z - a_x b_z \vec{e}_y - a_y b_x \vec{e}_z + a_y b_z \vec{e}_x + a_z b_x \vec{e}_y - a_z b_y \vec{e}_x$$

bzw. nach Umstellen

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{e}_z \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix} ,$$

was der in (10) gegebenen Form entspricht.

§ **130** Eine einfache Möglichkeit zur Bestimmung des Skalarproduktes beruht auf dem Determinatenverfahren: In der Determinantendarstellung wird das Kreuzprodukt geschrieben als

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} . \tag{11}$$

Allgemein gilt für eine Determinante

$$\mathtt{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\mathtt{D}_{11} - a_{12}\mathtt{D}_{12} + a_{13}\mathtt{D}_{13} \,,$$

wobei sich die Unterdeterminanten $\mathtt{D}_{ij}$ jeweils dadurch ergeben, dass man in der Determinante $\mathtt{D}$ die Zeile $i$ und die Spalte $j$ streicht, d.h. es ist

$$\mathtt{D}_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} , \quad \mathtt{D}_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \mathtt{D}_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} .$$

Diese Unterdeterminanten können Sie dadurch berechnen, dass Sie wieder Unterdeterminanten bilden, die dann natürlich noch einmal kleiner werden:

$$\mathtt{D}_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\mathtt{D}_{22} - a_{23}\mathtt{D}_{23} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \,.$$

Mit diesen Regeln können wir das Determinantenverfahren auf das Kreuzprodukt (11) anwenden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{e}_y(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{e}_z(a_x b_y - a_y b_x) = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} .$$

Alternativ lässt sich die Determinante der $3 \times 3$-Matriz auch mit Hilfe der Regel von Sarrus bestimmen. Dazu schreiben wir die ersten beiden Spalten nochmals hinter die Determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{matrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix} \right| \begin{matrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y \\ a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{matrix} .$$

Jetzt werden jeweils die Elemente der von links oben nach rechts unten weisenden Diagonalen miteinander multipliziert; diese Produkte werden addiert:

$$D_1 = \vec{e}_x a_y b_z + \vec{e}_y a_z b_x + \vec{e}_z a_x b_y \; .$$

Entsprechend wir mit den Elementen der von links unten nach rechts oben weisenden Diagonalen verfahren:

$$D_2 = \vec{e}_z a_y b_x + \vec{e}_x a_z b_y + \vec{e}_y a_x b_z \; .$$

Das Kreuzprodukt ist die Differenz dieser Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= D_1 - D_2 = \vec{e}_x a_y b_z + \vec{e}_y a_z b_x + \vec{e}_z a_x b_y - \vec{e}_z a_y b_x - \vec{e}_x a_z b_y - \vec{e}_y a_x b_z \\ &= \vec{e}_x (a_y b_z - a_z b_y) - \vec{e}_y (a_x b_z - a_z b_x) + \vec{e}_z (a_x b_y - a_y b_x) = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \; . \end{aligned}$$

**Verständnisfrage 5** Zeigen Sie formal für allgemeine Vektoren, dass das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf jedem der Ausgangsvektoren steht. Hinweis in § 492

§ **131** Zur Vertiefung ein Rechenbeispiel: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 3)$ und $\vec{b} = (3, 4, 5)$. Das Kreuzprodukt der Vektoren ist gegeben als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \; .$$

Die Beträge der Vektoren sind $|\vec{a}| = \sqrt{14}$ und $|\vec{b}| = \sqrt{50}$. Der Betrag von $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24}$. Aus der Definition des Kreuzproduktes (9) können wir den Winkel zwischen den Vektoren bestimmen:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin\alpha \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{a \cdot b} = \sqrt{\frac{24}{14 \cdot 50}} \quad \Rightarrow \alpha = 10.7^\circ \; .$$

Dass wir richtig gerechnet haben, können wir daran erkennen, dass der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ wirklich senkrecht auf den Ausgangsvektoren steht:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 + 8 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$$

und

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -6 + 16 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b} \; .$$

§ **132** Als weiteres Rechentraining können wir Aufgabe 54 bearbeiten. Dazu sind aus den Vektoren $\vec{a} = (1, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, 1, 3)$ die folgenden Ausdrücke zu bilden:

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \; ,$$

$$(\vec{b} \times 2\vec{a}) \times \vec{c} = 2 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ -12 \end{pmatrix} \; ,$$

$$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 30 \; .$$

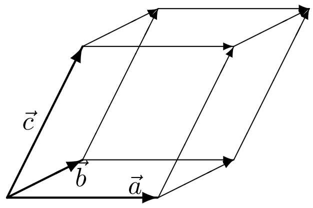



Abbildung 8: Spatprodukt

§ **133** Betrachten wir jetzt auch ein Beispiel aus der Physik: Elektonen, die mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ in ein Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}$ eintreten, werden dort durch die Lorentz-Kraft beschleunigt

$$\vec{F}_L = -e(\vec{v} \times \vec{B}) \ .$$

Wie groß ist die Kraft auf ein Elektron (Elementarladung $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C) mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} = (2000, 2000, 0)$ m/s, das in ein Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, 0.1)$ T $= (0, 0, 0.1)$ Vs/m$^2$ eintritt?

$$\vec{F}_L = -1.6 \cdot 10^{-19} \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} \text{ N} = 3.2 \cdot 10^{-17} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N} \ .$$

Die Bewegung bleibt auf die $xy$-Ebene beschränkt, da die Ausgangsgeschwindigkeit keine $z$-Komponente hat und auch keine Kraftkomponente in dieser Richtung existiert. Hätte man die Elektronen parallel zum Magnetfeld eingeschossen (nur $z$-Komponente der Geschwindigkeit), so wäre die Kraft verschwunden, d.h. die Elektronen hätten sich so bewegt, als wäre das Feld nicht vorhanden.

**Verständnisfrage 6** Die Lorentz-Kraft beschleunigt geladene Teilchen in einem Magnetfeld. Verrichtet die Kraft dabei Arbeit oder nicht? Argumentieren Sie physikalisch. Versuchen Sie auch eine formale Argumentation. Hilfe in § 493

### 2.4.4 Spatprodukt

**Definition:** Das Spatprodukt oder gemischte Produkt der drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{c}$ ist definiert als

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \ .$$

§ **134** Anschaulich kann das Spatprodukt als das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds interpretiert werden, vgl. Abb. 8:

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| \ .$$

Die Bedeutung des Spatproduktes können Sie sich wie folgt anschaulich klar machen: die ersten beiden Vektoren werden als Kreuzprodukt multipliziert, d.h. wir erhalten mit dem Kreuzprodukt ein Maß für die Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms. Damit bestimmt der Betrag des Kreuzprodukts die Grundfläche des Parallelepipeds. Der Vektor des Kreuzproduktes steht senkrecht auf dieser Fläche und schließt mit dem dritten Vektor $\vec{c}$ einen Winkel $\beta$ ein. Dieser ergibt zusammen mit dem Winkel $\alpha$ von $\vec{c}$ gegenüber der aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Grundfläche des Parallelepipeds 90°. Wenn wir jetzt den letzten Teil des Spatproduktes, nämlich das Skalarprodukt, ausführen, so bilden wir das Produkt $|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos\beta$ oder $V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \sin\alpha$ – dabei haben wir verwendet, dass $\cos\beta = \sin(90° - \beta)$, vgl. auch § 230. Aus dem zweiten Term erkennen Sie, dass anschaulich letztendlich ein Produkt mit einer Höhe gebildet wird, d.h. das Volumen lässt sich bestimmen als das Produkt aus der Grundfläche $|\vec{a} \times \vec{b}|$ und der Höhe $|\vec{c}| \sin\alpha$. Und das ist die Definition des Volumens eines Parallelepipeds.

§ **135** Das Spatprodukt ist nicht kommutativ: das Vertauschen zweier Vektoren bewirkt stets einen Vorzeichenwechsel:

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = -[\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}]\ .$$

Jedoch können die Vektoren zyklisch vertauscht werden:

$$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}\ .$$

§ **136** Das Spatprodukt enthält ein Kreuzprodukt, es lässt sich auch als Determinante darstellen:

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\ .$$

§ **137** Das Spatprodukt verschwindet, wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}\times\vec{c}$ senkrecht aufeinander stehen. Das ist dann der Fall, wenn der Vektor $\vec{a}$ in der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene liegt, d.h. wenn alle drei Vektoren komplanar sind:

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a},\ \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ sind } \textit{komplanar}\ .$$

Mit Hilfe des Spatproduktes hätte man daher die formalen Aspekte von Frage 5 und Frage 6 ebenfalls behandeln können.

§ **138** Neben dem Spatprodukt mit seiner anschaulichen Bedeutung gibt es noch verschiedenen andere gemischt Produkte, zu deren Vereinfachung die folgenden Rechenregeln dienen:

- doppeltes Kreuzprodukt (bac-cab-Regel):

  $$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

- Skalarprodukt aus zwei Kreuzprodukten:

  $$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

- Kreuzprodukt aus zwei Kreuzprodukten:

  $$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{c}((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}) - \vec{d}((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})\vec{b}((\vec{c}\times\vec{d})\cdot\vec{a}) - \vec{a}((\vec{c}\times\vec{d})\cdot\vec{b})$$

- Quadrat eines Kreuzproduktes (als Spezialfall eines Skalarproduktes aus zwei Kreuzprodukten):

  $$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

§ **139** Mit diesen Mehrfachprodukten haben wir die Möglichkeit, Aufgabe 55 ganz formal zu lösen. Da in der Aufgabe aber nur danach gefragt wurde, ob das Ergebnis ein Vektor, ein Skalar oder nicht definiert ist, ist auch eine anschauliche Betrachtung ausreichend. Außerdem hat diese den Vorteil, dass wir die Eigenschaften der verschiedenen Vektorprodukte noch einmal wiederholen. (a) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ ergibt einen Vektor parallel zu $\vec{c}$, wofern nicht der Vorfaktor $\vec{a}\times\vec{b}$ Null wird oder einen zu $\vec{c}$ parallelen Vektor ergibt, so dass das Kreuzprodukt verschwindet. (b) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times(\vec{c}\cdot\vec{d})$ ist mathematisch ein sinnloser Ausdruck: die Skalarprodukte in den Klammern ergeben jeweils einen Skalar, aber aus Skalaren kann man kein Kreuzprodukt bilden. (c) $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$ ergibt einen Skalar: die Kreuzprodukte in den Klammern ergeben jeweils einen Vektor, das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren ergibt dann einen Skalar. (d) $(\vec{a}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{d})$ ergibt einen Vektor: wie bei (c) ergeben die Kreuzprodukte in den Klammern jeweils Vektoren, das Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren gibt dann wieder einen Vektor. (e) $(\vec{a}\times\vec{d})\cdot\vec{d}$ ergibt einen Skalar, da das Kreuzprodukt in der Klammer einen Vektor ergibt, der skalar mit einem anderen Vektor multipliziert wird – da der sich in der Klammer ergebende Vektor senkrecht auf $\vec{d}$ steht, verschwindet das Skalarprodukt, d.h. unabhängig von den konkreten Vektoren ergibt sich stets Null. (f) $(\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{d}$ ergibt ebenfalls einen Vektor: die Klammer enthält eine Summe aus zwei Vektoren, wobei der zweite Vektor durch ein Kreuzprodukt bestimmt ist. Diese Summe ist ein Vektor, so dass das Kreuzprodukt mit einem weiteren Vektor wieder einen Vektor ergibt. (g) $(\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})\times\vec{d}$ ist kein mathematisch sinnvoller Ausdruck: der Ausdruck in der Klammer ist eine Summe aus einem Vektor und einem durch ein Skalarprodukt bestimmten Skalar und damit nicht definiert. (h) $(\vec{a}\cdot\vec{d})(((\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{d}\times\vec{c}))\cdot\vec{c})$ ergibt einen Skalar: der Ausdruck lässt sich zerlegen in einen Skalar (erste Klammer) multipliziert mit einem Skalar (zweite Klammer), der seinerseits durch das Skalarprodukt zweier Vektoren gebildet wird, wobei der erste dieser Vektoren das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist, die jeweils wieder als Kreuzprodukte anderer Vektoren dargestellt sind. (i) $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\cdot\vec{d})$ ergibt einen Skalar: beide Klammern enthalten Skalarprodukte und ergeben damit Skalare, die mit einander multipliziert werden können.

### 2.4.5 Rechentraining

**Aufgabe 67** Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (-1, 3, -2)$, $\vec{b} = (2, 1, -2)$ sowie $\vec{c} = (3, -1, -3)$. Bestimmen Sie daraus die folgenden Skalarprodukte: $s_1 = \vec{a}\cdot\vec{b}$, $s_2 = \vec{a}\cdot(\vec{c}+2\vec{b})$, $s_3 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ und $s_4 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$.

Lösung in § 519

**Aufgabe 68** Überprüfen Sie, ob irgendwelche der folgenden Vektoren paarweise senkrecht aufeinander stehen: $\vec{a} = (1, -2, -4)$, $\vec{b} = (-2, 3, 6)$, $\vec{c} = (-6, 3, -2)$ und $\vec{d} = (3, 2, -6)$.

Hilfe zur Aufgabe in § 502 Musterlösung in § 520

**Aufgabe 69** Bestimmen Sie die Richtungswinkel von $\vec{a} = (5, -3, -6)$ mit den Achsen eines kartesischen Koordinatensystems.

Hilfe zur Aufgabe in § 503 Musterlösung in § 521

**Aufgabe 70** Gegeben ist der Vektor $\vec{F} = (1, 4, 3)$ N. Diese Kraft verschiebt eine Masse entlang des Weges $\vec{s} = (4, 3, 2)$ m. Bestimmen Sie die dabei verrichtete Arbeit. Bestimmen Sie ferner die Kraftkomponente entlang des Weges, d.h. die Projektion der Kraft auf den Weg.

Lösung in § 522

**Aufgabe 71** Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, -1, 1)$ und $\vec{b} = (1, 1, 1)$. Bestimmen Sie einen Einheitsvektor, der senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Fläche steht.

Lösung in § 523

**Aufgabe 72** Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, -2, -4)$, $\vec{b} = (-2, 3, 6)$ und $\vec{c} = (-6, 3, -2)$. Bestimmen Sie die Projektion des Vektors $\vec{a}\times\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{c}$.

Lösung in § 524

**Aufgabe 73** Die beiden Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 5)$ und $\vec{b} = (-3, 2, 5)$ bilden die Seitenkanten eines Dreiecks. Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt.

Hilfe zur Aufgabe in § 504 Musterlösung in § 525

**Aufgabe 74** Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (5, t, -6)$, $\vec{b} = (-4, 7, -5)$ und $\vec{c} = (-3, 6, -2)$. Bestimmen Sie $\vec{c}$ so, dass das Volumen des von den Vektoren aufgespannten Parallelepipeds 112 ist.

Hilfe zur Aufgabe in § 505 Musterlösung in § 526

**Aufgabe 75** Zeigen Sie, dass $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b}) - a^2\vec{b}$.

Hilfe zur Aufgabe in § 506 Musterlösung in § 527

**Aufgabe 76** Überprüfen sie die Gültigkeit der bac-cab-Regel

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) \,.$$

Hilfe zur Aufgabe in § 507 Musterlösung in § 528

## 2.5 Abschlusstest

§ **140** Die Aufgaben in diesem Abschnitt sind gleichsam die Prüfungsaufgaben. Sie müssen mindestens 5 der Fragen korrekt beantwortet haben, um in das nächste Lernfeld zu gelangen.

**Aufgabe 77** Bestimmen Sie den Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a} - \vec{b}$ mit $\vec{a} = (1, -4, 6)$ und $\vec{b} = (5, -2, -7)$: $\vec{e} = (\square, \square, \square)/\sqrt{\square}$. (Hinweis: tragen Sie nur ganze Zahlen in die Felder ein!)

**Aufgabe 78** Geben Sie die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte $P_1 = (1, 2, 3)$ und $P_2 = (2, 2, 3)$ geht: $\vec{g} = (\square, \square, \square) + \lambda(\square, \square, \square)$.

**Aufgabe 79** Die beiden Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 3)$ und $\vec{b} = (3, 4, 5)$ spannen ein Parallelogramm auf. Bestimmen Sie dessen Schwerpunkt: $\vec{r}_s = (\square, \square, \square)$

**Aufgabe 80** In einer etwas verschrobenen Welt bewegt sich ein Bergsteiger entlang eines Weges $\vec{s} = (200, 6300, 2100)$ m gegen eine Gravitationskraft von $\vec{F} = (100, -200, 1000)$ N.

1. Welche Arbeit verrichtet er dabei? $W = \square$ kJ
2. Wie groß ist der Winkel zwischen Kraft und Weg? $\angle(\vec{F}, \vec{s}) = \square$
3. Bestimmen Sie die Projektionen der Kraft auf den Weg und des Weges auf die Kraft. $\vec{F}_{\vec{s}} = (\square, \square, \square)$ N
4. Wie viele Tafeln Schokolade (500 kJ pro Tafel) darf er sich am Ende zum Ausgleich gönnen? $n = \square$

Bei allen Angaben nur die erste Stelle hinter dem Komma berücksichtigen (ohne Rundung!)

**Aufgabe 81** Bilden Sie aus den Vektoren $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, 3)$ und $\vec{c} = (3, -2, 1)$ jeweils paarweise alle möglichen Skalar- und Kreuzprodukte:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \square\,, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \square\,, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \square\,, \quad \vec{b} \cdot \vec{a} = \square\,, \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = \square\,, \quad \vec{b} \cdot \vec{c},$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \square\,, \quad \vec{c} \cdot \vec{b} = \square \quad \text{sowie} \quad \vec{c} \cdot \vec{c} = \square\,.$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad \vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad \vec{b} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix},$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad \vec{c} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad \vec{c} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \quad \vec{c} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 82** Bestimmen Sie den Einheitsvektor, der zusammen mit den Vektoren $\vec{a} = (1, -2, -3)$ und $\vec{b} = (-2, 1, 3)$ ein Rechtssystem bildet: $\vec{c} = (\square, \square, \square)/\sqrt{\square}$.

**Aufgabe 83** Für welches $\lambda$ werden die drei Vektoren $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (2, \lambda, -1)$ und $\vec{c} = (-1, -2, -3)$ komplanar? Tragen Sie die Lösung in das Kästchen ein: $\lambda = \square$.

# 3 Funktionen

## 3.1 Übersicht und Selbsttest

§ **141** In diesem Lernfeld werden wir den Begriff der Funktion als einer eindeutigen Zuordnungsvorschrift wiederholen. Ferner werden die Eigenschaften elementarer, in der Physik häufig benötigter Funktionen diskutiert. Auch Grundbegriffe zu den Themen Folgen und Reihen werden als Beispiele für Funktionen mit einem speziellen Definitionsbereich, nämlich den natürlichen Zahlen, wiederholt.

§ **142** Bevor Sie mit dem Durcharbeiten des Kapitels beginnen, können Sie mit Hilfe des Selbsttests Ihre Vorkenntnisse überprüfen und daran entscheiden, in welcher Intensität Sie die einzelnen Abschnitte dieses Lernfeldes durcharbeiten wollen.

**Aufgabe 84** Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = \sin(x)$ und $i(x) = \tan(x)$. Falls die Funktion keine Nullstelle hat, tragen Sie bitte ein 'n' in die entsprechenden Kästchen ein:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | □ | □ | □ |
| $g(x)$ | □ | □ | □ |
| $h(x)$ | □ | □ | □ |
| $i(x)$ | □ | □ | □ |

**Aufgabe 85** Welchen Grenzwert hat die Funktion $f(x) = (\sin(x))/x$ für $x \to 0$?

**Aufgabe 86** Markieren Sie bei jeder der folgenden Funktionen ob sie eindeutig umkehrbar ist:

| | eind. umkehrbar | nicht eind. umk. |
|---|---|---|
| $f(x) = 2x - 4$ | □ | □ |
| $g(x) = x^2 + 25$ | □ | □ |
| $h(x) = x^3 + 9$ | □ | □ |
| $i(x) = 5\cos(x+3)$ | □ | □ |
| $j(x) = \mathrm{e}^{3x}/5$ | □ | □ |
| $k(x) = \tan(x)/x$ | □ | □ |
| $l(x) = \sin^2(x)$ | □ | □ . |

**Aufgabe 87** Ist die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x + 9$

□ streng monoton steigend im gesamten Definitionsbereich,
□ monoton steigend im gesamten Definitionsbereich,
□ monoton fallend im gesamten Definitionsbereich,
□ streng monoton fallend im gesamten Definitionsbereich,
□ streng monoton fallend in $\mathbb{R}^-$ und streng monoton steigend in $\mathbb{R}^+$,
□ monoton fallend in $\mathbb{R}^-$ und monoton steigend in $\mathbb{R}^+$,
□ streng monoton fallend in $\mathbb{R}^+$ und streng monoton steigend in $\mathbb{R}^-$,
□ monoton fallend in $\mathbb{R}^+$ und monoton steigend in $\mathbb{R}^-$.

**Aufgabe 88** Untersuchen Sie die Folge

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} \qquad n \in \mathbb{N}$$

auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

## 3.2 Grundlagen

### 3.2.1 Wozu?

§ **143** Physik ist eine empirische Wissenschaft: ein durch eher beiläufige Beobachtung als interessant identifiziertes Phänomen, z.B. ein Polarlicht, wird nicht nur qualitativ sondern auch quantitativ untersucht. Dazu gehört die Messung verschiedener Parameter, z.B. wie Höhe, Helligkeit und Farbe. Die so bestimmten Messwerte werden in Tabellen zusammen gefasst und/oder graphisch dargestellt und im Rahmen bestehender Modelle interpretiert oder als Basis zur Entwicklung neuer Theorien verwendet.

§ **144** Auch der nicht geowissenschaftlich orientierte Experimentalphysiker produziert derartige Tabellen und Graphen: im Laborexperiment lässt sich wohl definiert die Abhängigkeit einer physikalischen Größe von einer anderen messen, z.B. die Abhängigkeit des durch einen Widerstand $R$ fließenden Stroms $i$ von der angelegten Spannung $u$ oder die Abhängigkeit des Austrittswinkels $\alpha$ des Lichts aus einem Prisma von der Wellenlänge $\lambda$. Eine Größe kann dabei als die unabhängige Variable $x$ betrachtet werden (beim Widerstand wäre das die vorgegebene Spannung $u$), die andere Messgröße $y$ entspricht der abhängigen Variablen $y(x)$ (beim Widerstand der Strom $i$). Die beiden Beispiele würde unter der Verwendung der entsprechenden Formelzeichen zu Funktionen $i(u)$ bzw. $\alpha(\lambda)$ führen.

§ **145** Datensammlung ist der erste Schritt in der Physik, die Pflichtübung; die anschließende Dateninterpretation und sich daraus ergebend die Entwicklung oder Überprüfung von Modellen zur Beschreibung der Realität dagegen ist das eigentlich Spannende, die Kür. Und wie vorgehen? Ein Bild soll angeblich mehr als tausend Worte sagen. Für einen Physiker sagt ein mathematisch beschreibbarer Zusammenhang wie das Ohm'sche Gesetz dagegen mehr als tausend $i(u)$-Diagramme verschiedener Widerstände. Und diese mathematischen Zusammenhänge werden durch Funktionen vermittelt.

### 3.2.2 Funktionen als Zuordnung

§ **146** Wir werden in diesem Lernfeld von der Vorstellung einer Funktion als Zuordnungsvorschrift ausgehen und daher die folgende Definition wählen:

**Definition:** Eine *Funktion* $f(x)$ ordnet jedem Element $x$ ihres Definitionsbereichs $\mathbb{D}$ eindeutig ein Element $y$ ihres Wertebereichs $\mathbb{W}$ zu: $y = f(x)$

Für viele mathematische Funktionen entspricht der Definitionsbereich der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, gegebenenfalls vermindert um bestimmte Werte von $x_{\mathrm{DL}} \in \mathbb{R}$, an denen $f(x_{\mathrm{DL}})$ nicht definiert ist und damit die Funktion eine Definitionslücke aufweist. Die Menge der reellen Zahlen bildet eine kontinuierliche Menge und damit auch einen kontinuierlichen Wertebereich. Bei einer Messung dagegen ist der Wertebereich in der Regel diskret, da die unabhängige Variable nur an bestimmten Stützstellen vorgegeben wird. Bei der Beschreibung einer Bewegung $x(t)$ wird z.B. jede Sekunde der Ort $x$ des Körpers bestimmt. In diesem Fall ist hat $x(t)$ die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen als Definitionsbereich. Funktionen, die $\mathbb{N}$ als Definitionsbereich haben, werden auch als Folgen bezeichnet – wir werden später im Lernfeld auf diese spezielle Form einer Funktion zurück kommen. Obwohl Messreihen diskret sind, sind sie in der Regel keine Folgen im mathematischen Sinne, da die unabhängigen Variablen meist eher aus $\mathbb{R}$ als aus $\mathbb{N}$ stammen.

§ **147** Gemäß Definition ist eine Funktion ist eine Zuordnungsvorschrift zwischen einer unabhängiggen Variablen $x$, auch als Argument bezeichnet, und einer abhängigen Variablen $f(x)$, dem Funktionswert. Diese Zuordnung ist eindeutig: es kann verschiedenen Argumenten $x$ der gleiche Funktionswert $f(x)$ zugeordnet werden, aber es darf keinem Argument $x$ mehr als ein Funktionswert zugeordnet werden.

§ **148** Die Forderung nach Eindeutigkeit hat Konsequenzen für die Umkehrbarkeit einer Funktion. Beginnen wir dazu mit einem Beispiel. Die Funktion $f(x) = 2x$ nimmt für jedes $x \in \mathbb{R}$ einen anderen Wert an, d.h. für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt auch $f(x_1) \neq f(x_2)$. Da jeder Funktionswert nur einmal angenommen wird, ist jeder abhängigen Variablen eindeutig eine unabhängige Variable zugeordnet. Auf Grund dieser Eindeutigkeit existiert eine Umkehrfunktion: $f(x) = 2x \rightarrow f_{\mathrm{U}}(x) = \frac{1}{2}x$.

§ **149** Die Umkehrfunktion bestimmt sich aus $f(x) = y$ durch Auflösen der Gleichung nach $x$ und anschließendes Vertauschen von $x$ und $y$. In diesem Beispiel also $f(x) = y = 2x$ wird aufgelöst zu $x = y/2$ und damit nach Vertauschen von $x$ und $y$ zu $f_{\mathrm{U}}(x) = y(x) = x/2$. Eine Umkehrfunktion lässt sich auch graphisch erzeugen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$.

§ **150** Anders als $f(x) = 2x$ verhält sich die Funktion $f(x) = x^2$. Hier werden Funktionswerte doppelt angenommen: sowohl für $x_1 = -2$ als auch für $x_2 = +2$ ergibt sich der Funktionswert $f(x_1) = f(x_2) = 4$. Daher lässt sich aus dem Funktionswert nicht eindeutig eine zugehörige unabhängige Variable rekonstruieren, die Funktion ist also nicht umkehrbar. Daher gilt für Umkehrbarkeit der folgende Satz

**Satz:** Eine Funktion $f(x)$ heißt *umkehrbar*, wenn $\forall\, x_1 \neq x_2$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Das Symbol $\forall$ in der obigen Definition liest sich ‘für alle’.

§ **151** Damit können wir auch Aufgabe 86 beantworten: $f(x) = 2x - 4$ als lineare und damit streng monoton ansteigende Funktion ist entsprechend dem obigen Beispiel eindeutig umkehrbar. $g(x) = x^2 + 25$ ist nur eine verschobene Normalparabel. Da $x$ und $-x$ jeweils den gleichen Funktionswert erzeugen, liefert die Umkehrung keine eindeutige Zuordnungsvorschrift, d.h. die Funktion $g(x)$ ist nicht eindeutig umkehrbar. Die Funktion $h(x) = x^3 + 9$ ist, wie die lineare Funktion, streng monoton steigend und damit eindeutig umkehrbar. Die Funktion $i(x) = 5\,\cos(x+3)$ ist periodisch, d.h. jeder Funktionswert wird nach einer Periode oder einem Vielfachen der Periode wieder angenommen. Damit ist eine eindeutige Umkehrung nicht möglich. Die Exponentialfunktion $j(x) = \mathrm{e}^{3x}/5$ ist streng monoton steigend und damit eindeutig umkehrbar mit dem natürlichen Logarithmus als Umkehrfunktion. Für den Tangens als Quotient aus Sinus und Kosinus und damit als periodische Funktion gelten die gleichen Einwände wie für den Sinus. Die Division durch $x$ in $k(x) = \tan(x)/x$ verändert zwar die Funktionswerte, nicht aber die Tatsache der Wiederholung, so dass die Umkehrung nicht mehr eindeutig ist. Das können Sie sich insbesondere an den Nullstellen veranschaulichen. Die Nullstellen sind beim Tangens periodisch und verändern sich bei der Division durch $x$ nicht. Der quadrierte Sinus $l(x) = \sin^2(x)$ ist ebenfalls periodisch, so dass auch hier keine eindeutige Umkehrbarkeit gegeben ist.

### 3.2.3 Darstellung von Funktionen

§ **152** Zur Darstellung einer Funktion gibt es verschiedene Möglichkeiten, die alle ihre Vor- und Nachteile haben. Daher sollten Sie mehrere Möglichkeiten beherrschen, um sich die für das gegebene Problem beste Darstellungsform heraus suchen zu können.

§ **153** Eine Funktion ist gemäß der obigen Definition eine Zuordnung von Elementen des Wertebereichs $\mathbb{W}$ zu denen des Definitionsbereichs $\mathbb{D}$. Die einfachste Darstellungsform bedient sich einer Tabelle, in der explizit die Elemente der beiden Bereiche angegeben sind. Diese Wertetabelle kann nur für Funktion mit einem diskreten Wertebereich (z.B. das Ergebnis einer Messung) vollständig sein; für Funktionen mit einem kontinuierlichen Definitionsbereich kann eine endliche Wertetabelle stets nur unvollständig sein.

§ **154** Eine derartige unvollständige Wertetabelle erzeugen Sie in der Regel bevor Sie eine Funktion graphisch darstellen. Sehr umfangreiche Wertetabellen bildeten früher unter dem

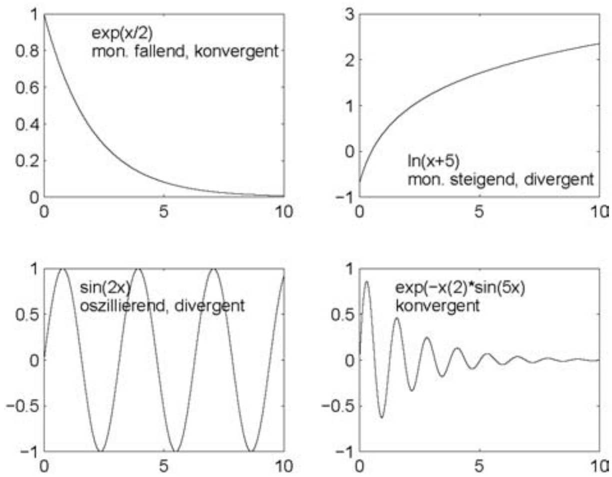



Abbildung 9: Skizzen von Funktionen mit unterschiedlichen Eigenschaften

Namen Logarithmentafel oder Funktionentafel die Grundlagen für umfangreichere Rechnungen. Funktionswerte an anderen als den in der Tafel gegebenen Werten der unabhängigen Variablen werden durch Interpolation bestimmt. Auch ein einfacher Rechner greift auf tabellierte Funktionen zurück. In modernen Rechnern werden Funktionen wie Sinus und Kosinus nicht aus tabellierten Werten bestimmt, da für die heute gewünschten Genauigkeiten zu umfangreiche Tabellen benötigt würden. Stattdessen werden diese Funktionen durch eine Potenzreihenentwicklung dargestellt – diese wird uns als Taylor Entwicklung im Aufgabenfeld 'Komplexe Zahlen' begegnen.

§ **155** Eine anschauliche Darstellung einer Funktion wird durch den Funktionsgraphen gegeben. Dabei wird in der Regel ein kartesisches Koordinatensystem verwendet, bei dem die unabhängige Variable auf der Abszisse, die zugehörige abhängige auf der Ordinate abgetragen wird. Funktionsgraphen haben den Nachteil, dass sich der Funktionswert zu einer vorgegebenen unabhängigen Variablen nur recht grob bestimmen lässt. Ihr Vorteil besteht darin, dass der Funktionsverlauf insgesamt überblickt werden kann. Insbesondere lässt sich häufig an Hand eines geschickt erstellten Funktionsgraphen abschätzen, ob die Funktion periodisch ist, ob sie monoton oder beschränkt ist, oder ob sie möglicherweise konvergieren könnte. Einige Skizzen zur Illustration dieser Begriffe finden sich in Abb. 9, alle diese Begriffe werden in diesem Lernfeld nochmals genau definiert.

§ **156** Die häufigste und allgemeinste Darstellung einer Funktion ist die analytische, d.h. die Funktion wird in Form einer Zuordnungsvorschrift oder Funktionsgleichung gegeben. Dabei gibt es drei Möglichkeiten: die explizite Darstellung, die implizite Darstellung und die Darstellung einer Funktion in Parameterform.

§ **157** Bei der expliziten Darstellung wird die Funktionsgleichung $y = f(x)$ z.B. in der Form

$$f(x) = x^2 + 3x^3 + 5x^9$$

gegeben. Diese Form ist die gebräuchlichste; sie ist insbesondere bei der Erstellung einer Wertetabelle und eines Funktionsgraphen hilfreich.

§ **158** Die implizite Darstellung einer Funktion ist nicht nach einer der Variablen aufgelöst: $F(x, y) = 0$. Ein Beispiel ist die Darstellung eines Kreises in der Form

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$

Auf diese Weise lässt sich ein Vollkreis darstellen, in der expliziten Darstellung $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ dagegen wird auf Grund der geforderten Eindeutigkeit nur die positive Wurzel berücksichtigt, d.h. der Kreis ist auf einen Halbkreis reduziert.

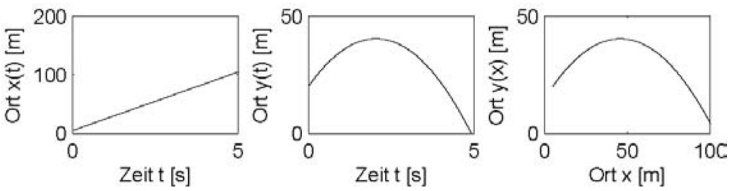



Abbildung 10: Wurfparabel in Parameterdarstellung $x(t)$ (links) und $y(t)$ (Mitte) sowie in expliziter Form $y(x)$ (rechts)

§ **159** Aus der Schule nicht unbedingt bekannt, in der Physik aber nicht unüblich ist die Darstellung einer Funktion in Parameterdarstellung. Sie messen den Strom $i$ durch einen Widerstand $R$ in Abhängigkeit von der angelegten Spannung $u$. In der manuellen Version stellen Sie eine Spannung ein und messen dann den Strom. Das wird langweilig, wenn auf diese Weise einige Tausend Widerstände durchgemessen werden sollen. Dann ist es einfacher, die Spannung $u$ automatisch zu verändern und parallel den Strom $i$ zu messen. Auf diese Weise ergeben sich zwei Messreihen $u(t)$ und $i(t)$ der zu betrachteten Größen in Abhängigkeit von einem gemeinsamen Parameter, der Zeit $t$:

| $t$ [s] | $u(t)[V]$ | $i(t)$ [mA] |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 4 | 2 |
| 3 | 6 | 3 |
| 4 | 7 | 3.5 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Um die gesuchte Funktion $i(u)$ graphisch darzustellen, ignorieren wir den Hilfsparameter $t$ einfach und plotten die dritte gegen die zweite Spalte.

§ **160** Bewegungen werden ebenfalls häufig in Parameterdarstellung angegeben. Ein einfaches Beispiel ist die Wurfparabel. Analytisch beschreiben wir die Wurfbewegung durch zwei getrennte Gleichungen für die horizontale und die vertikale Bewegung:

$$x(t) = v_{x,0} t + x_0 \qquad \text{und} \qquad y(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_{y,0} t + y_0$$

mit $x_0$ und $y_0$ als dem Ort zu Beginn der Bewegung und $v_{x,0}$ und $v_{y,0}$ als den dazu gehörigen Geschwindigkeitskomponenten. Beide Komponenten $x$ und $y$ der Bewegung sind in Abhängigkeit von einem Parameter, der Zeit $t$, gegeben. Auflösen der ersten Gleichung nach $t$ und Einsetzen in die zweite liefert die explizite Form der Wurfparabel

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \left( \frac{x - x_0}{v_{x,0}} \right)^2 + v_{y,0} \left( \frac{x - x_0}{v_{x,0}} \right) + y_0 \ .$$

Abbildung 10 zeigt die Parameterdarstellung $x(t)$ und $y(t)$ sowie die explizite Form $y(x)$.

**Verständnisfrage 7** Warum sehen mittleres und rechtes Teilbild in Abb. 10 so ähnlich aus, wenn doch in einem die $y$-Koordinate gegen die Zeit, im anderen dagegen gegen die $x$-Koordinate aufgetragen sind? Hinweis in § 529

§ **161** Eine Anmerkung zur Notation: die Verwendung der Symbole $x$ für die unabhängige und $y = f(x)$ für die abhängige Variable ist zwar bei den Mathematikern recht verbreitet, in der Physik werden Ihnen jedoch, wie schon in § 159 angedeutet, sehr unterschiedliche Variablennamen begegnen – in Abhängigkeit davon, durch welche Symbole die abhängigen und unabhängigen physikalischen Größen repräsentiert werden. Die Abhängigkeit eines Stromes $i$ durch einen Widerstand in Abhängigkeit von der angelegten Spannung $u$ stellen wir daher als eine Funktion $i(u)$ dar. Umgekehrt kann der Spannungsabfall $u$ über dem Widerstand in Abhängigkeit vom durch den Widerstand fließenden Strom $i$ als eine Funktion $u(i)$ dargestellt werden. Oder wir halten den Strom $i$ fest, variieren den Widerstand $R$ und messen wieder den Spannungsabfall $u$, diesmal dann jedoch als Funktion $u(R)$. Die Darstellung physikalischer Größen in Abhängigkeit von der Zeit $t$ führt entsprechend auf eine Funktion $f(t)$

wobei $f$ die entsprechende physikalische Größe wie der Strom $i$, die Spannung $u$, der Ort $x$, die Geschwindigkeit $v$ oder die Zahl $N$ der Atome in einer radioaktiven Substanz.

### 3.2.4 Rechentraining

**Aufgabe 89** Bestimmen Sie graphisch und rechnerisch die Umkehrfunktion zu den folgenden Funktionen:

$$f(x) = x^3\,, \quad g(x) = x^2\,, \quad h(x) = 100\sin(x) \quad \text{und} \quad i(x) = \mathrm{e}^{-x}\,.$$

Hilfe zur Aufgabe in § 530 Musterlösung in § 539

**Aufgabe 90** Die Astroide ist eine Kurve, die von einem Perepheriepunkt eines Kreises beschrieben wird, wenn dieser auf der Innenseite eines anderen Kreises abrollt. In Parameterform ist diese gegeben als $x(\varphi) = \cos^3\varphi$ und $y(\varphi) = \sin^3\varphi$. Wandeln Sie die Parameterform in eine explizite Darstellung um und diskutieren Sie Vor- und Nachteile der beiden Darstellungsformen.

Hilfe zur Aufgabe in § 531 Musterlösung in § 540

**Aufgabe 91** Skizzieren Sie die folgenden in Parameterform gegebenen Funktionen:

- *Epizykloide* (Kurve, die von einem Perepheriepunkt eines Kreises mit Radius $a$ beschrieben wird, wenn dieser auf der Außenseite eines anderen Kreises mit Radius $A$ abrollt): $x = (A+a)\cos\varphi - a\cos[(A+a)\varphi/a]$ und $y = (A+a)\sin\varphi - a\sin[(A+a)\varphi/a]$,
- *Evolvente* (Kurve, die am Endpunkt eines fest gespannten Fadens beschrieben wird, wenn dieser von einem Kreis abgewickelt wird): $x = a\cos\varphi + a\varphi\,\sin\varphi$ und $y = a\sin\varphi - a\varphi\,\cos\varphi$.

Lassen sich die beiden Funktionen in eine explizite Darstellung $y(x)$ umwandeln?

Hilfe zur Aufgabe in § 532 Musterlösung in § 541

## 3.3 Eigenschaften von Funktionen

§ **162** Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen werden durch Funktionen beschrieben. Häufig interessieren dabei nicht die Details der Funktion sondern ihr generelles Verhalten, beschrieben durch Monotonie (entwickelt sich eine physikalische Größe $f(x)$ mit zunehmendem $x$ immer in die gleiche Richtung oder schwankt sie?), Beschränktheit (kann die physikalische Größe $f(x)$ beliebig groß werden?) oder Konvergenz (entwickelt sich die physikalische Größe $f(x)$ mit zunehmendem $x$ auf einen bestimmten Wert, den Grenzwert, zu?).

### 3.3.1 Beschränktheit

§ **163** Der Begriff der Beschränktheit einer Funktion ist sehr anschaulich: eine Funktion ist nach oben beschränkt bzw. hat eine obere Schranke $A$, wenn alle Funktionswerte kleiner gleich $A$ sind. Entsprechend ist eine Funktion nach unten beschränkt bzw. hat eine untere Schranke $A$, wenn alle Funktionswerte größer gleich $A$ sind. Oder als formale Definition:

**Definition**: Eine Funktion $y = f(x)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist
– *nach oben beschränkt*, wenn es ein $A \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) \leq A\ \forall x \in \mathbb{R}$,
– *nach unten beschränkt*, wenn es ein $A \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x) \geq A\ \forall x \in \mathbb{R}$.

§ **164** Eine Funktion ist beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, d.h. wenn sowohl eine obere als auch eine untere Schranke existieren.

§ **165** Die Beschränktheit einer Funktion hat anschauliche Auswirkungen auf den Funktionsgraphen: gibt es eine obere Schranke, so liegen alle Funktionswerte unterhalb bzw. maximal auf einer waagerechten Linie, die durch diesen Wert geht. Entsprechendes gilt für die untere Schranke. Der Funktionsgraph einer beschränkten Funktion ist daher auf ein Band zwischen oberer und unterer Schranke beschränkt.

§ **166** Beschränktheit ist jedoch nicht nur im Bezug auf den Funktionsgraphen anschaulich zu interpretieren, sie beschreibt auch einen physikalischen Sachverhalt. Ist eine Funktion $x(t)$, die eine Bewegung beschreibt, nach oben und unten beschränkt, so bedeutet das anschaulich, das sich der Körper nur im Bereich zwischen oberer und unterer Schranke bewegt und diesen Bereich nie verlässt. Ist die Funktion nur nach oben oder unten beschränkt, so gilt entsprechendes für die Bewegung: in eine Richtung kann der Körper sich bis ins Unendliche bewegen, in der anderen jedoch maximal bis zur Schranke. Bei einer Schwingung z.B. interessieren uns häufig nur die Schranken, d.h. die Grenzen, innerhalb derer die Bewegung erfolgt. Zu jeder Zeit befindet sich der Körper zwischen diesen beiden Schranken – wo er sich zu einem bestimmten Zeitpunkt genau befindet, interessiert häufig nicht.

### 3.3.2 Nullstellen

**Definition**: Eine Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle $x_0$ eine *Nullstelle*, falls $f(x_0) = 0$.

§ **167** Nullstellen haben vielfältige Bedeutung. Bei der Beschreibung einer Bewegung bedeutet eine Nullstelle in $x(t)$ nur, dass der Körper sich wieder am Bezugspunkt $x = 0$ befindet. Eine Nullstelle in $v(t)$ dagegen bedeutet, dass der Körper zur Ruhe gekommen ist; findet an dieser Nullstelle ein Vorzeichenwechsel statt, so hat sich die Bewegungsrichtung des Körpers umgekehrt. Auf dieses Beispiel für eine physikalische Anwendung einer Kurvendiskussion werden wir im Lernfeld 'Differentiation' zurück kommen.

§ **168** Aus mathematischer Sicht sind insbesondere die Nullstellen der ersten Ableitung einer Funktion von Interesse: sie geben an, dass die Funktion an dieser Stelle eine waagerechte Tangente hat und damit entweder einen Extremwert oder einen Sattelpunkt.

§ **169** Aufgabe 84 hat sich auf die Nullstellen bekannter Funktionen bezogen. Die Funktionen werden Ihnen weiter unten im Lernfeld noch einmal genauer in Erinnerung gerufen, die Frage sollte sich aber alleine aus der Kenntnis des groben Verlaufs der Funktion beantworten lassen. Die abfallende Exponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ ist immer größer Null, d.h. es gibt keine Nullstelle. Sie wird formal zur Beschreibung von Zerfallsvorgängen eingesetzt. Auch formal lässt sich zeigen, dass $f(x)$ keine Nullstelle hat:

$$f(x_\mathrm{N}) = 0 = \mathrm{e}^{-x_\mathrm{N}} \quad \Rightarrow \quad x_\mathrm{N} = \ln 0 \quad \text{Widerspruch} .$$

Der natürliche Logarithmus $g(x) = \ln x$ hat seine Nullstelle bei $x_\mathrm{N} = 1$. Formal lässt sich dies einsehen mit

$$g(x_\mathrm{N}) = 0 = \ln x_\mathrm{N} \quad \Rightarrow \mathrm{e}^0 = x_\mathrm{N} = 1 .$$

Der Sinus $h(x) = \sin(x)$ ist eine periodische Funktion die die $x$-Achse schneidet in den Punkten $x_\mathrm{N} = n\,180°$ mit $n \in \mathbb{N}$. Auch die Funktion $h(x) = \tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ hat ihre Nullstellen an diesen Punkten – und zusätzlich Polstellen dort, wo der Kosinus verschwindet, d.h. bei $x_\mathrm{N} = (2n+1)\,90°$, $n \in \mathbb{N}$.

### 3.3.3 Gerade und ungerade Funktionen

**Definition**: Eine Funktion $f(x)$ mit symmetrischem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ heißt *gerade*, wenn für jedes $x \in \mathbb{D}$ gilt $f(x) = f(-x)$; sie heißt *ungerade*, wenn für jedes $x \in \mathbb{D}$ gilt $f(x) = -f(-x)$.

§ **170** Eine gerade Funktion ist achsensymmetrisch, d.h. spiegelsymmetrisch zur $y$-Achse, eine ungerade ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Die Bezeichnungen gerade und ungerade lassen sich auf die im Lernfeld 'Komplexe Zahlen' behandelte Taylor Entwicklung zurück führen. Funktionen, die spiegelsymmetrisch zur $y$-Achse sind, wie z.B. der Kosinus, benötigen zu ihrer Darstellung Potenzen von $x$, die ebenfalls achsensymmetrisch sind. Das sind aber

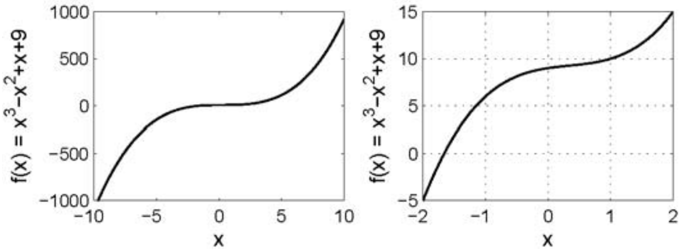



Abbildung 11: Zu Aufgabe 87; Übersichtsplot (links) und Ausschnitt für den kritischen Bereich (rechts)

gerade die geraden Potenzen $x^{2n}$. Der Sinus als ein Beispiel für eine ungerade Funktion benötigt zu seiner Darstellung aber ebenfalls ungerade Funktionen, d.h. Potenzen $x^{2n+1}$. Dies entspricht seiner Reihenentwicklung. Umgekehrt wird uns diese Unterscheidung auch bei der Fourier Reihe, der Darstellung periodischer Funktionen mit Hilfe der Winkelfunktionen Sinus und Kosinus (z.B. Überlagerung von Grund- und Oberschwingungen bei einer schwingenden Saite oder im Synthesizer), begegnen: bei der Darstellung von Funktionen als Summe aus Sinus- und Kosinus-Termen lassen sich grade Funktionen alleine mit Hilfe der Sinus-Terme darstellen; ungerade Funktionen dagegen werden ausschließlich mit Hilfe der Kosinus-Terme dargestellt.

§ **171** Ist eine Funktion gerade oder ungerade, so braucht zur Beschreibung ihrer Eigenschaften nur der Bereich $x \geq 0$ (oder falls es angenehmer ist der Bereich $x \leq 0$) untersucht zu werden. In der jeweils anderen Hälfte des Definitionsbereichs verhält sich die Funktion auf die gleiche Weise (gerade Funktion) oder auf gleiche Weise aber mit umgekehrtem Vorzeichen (ungerade Funktion).

### 3.3.4 Monotonie

§ **172** Monotonie ist ein einfacher Begriff, mit dem sich die Änderung einer Funktion beschreiben lässt:

**Definition**: Seien $x_1$ und $x_2$ zwei beliebige Werte aus $\mathbb{D}$ mit $x_1 < x_2$. Dann heißt die Funktion $f(x)$:

| | |
|---|---|
| – *monoton wachsend*, falls | $f(x_1) \leq f(x_2)$ |
| – *streng monoton wachsend*, falls | $f(x_1) < f(x_2)$ |
| – *monoton fallend*, falls | $f(x_1) \geq f(x_2)$ |
| – *streng monoton fallend*, falls | $f(x_1) > f(x_2)$ |

§ **173** An Hand der Monotonie kann entschieden werden, ob eine Funktion umkehrbar ist oder nicht: jede streng monotone Funktion ist umkehrbar. Bei einer monotonen aber nicht streng monotonen Funktion gilt diese Aussage nicht mehr, da in diesem Fall mindestens ein Funktionswert durch mindestens zwei verschiedene Argumente erzeugt wurde, so dass die Umkehrung nicht, wie für eine Funktion gefordert, zu einer eindeutigen Abbildung führt.

§ **174** Auch bei der Verwendung von Funktionen zur Beschreibung physikalischer Sachverhalte wird der Begriff der Monotonie häufig verwendet: mit seiner Hilfe lässt sich darstellen, wie sich die Funktion entwickelt. Bei einer Bewegung $x(t)$ kann man erkennen mit Hilfe der Monotonie z.B. ausdrücken, ob ein Körper seine Bewegungsrichtung beibehält (dann ist $x(t)$ entweder monoton fallend oder monoton steigend) und ob er dabei eine Pause einlegt (dann ist die Funktion nur monoton) oder immer in Bewegung ist. In letzterem Fall ist die Funktion streng monoton.

§ **175** Aufgabe 87 hat nach der Monotonie von $f(x) = x^3 - x^2 + x + 9$ gefragt. Für große Beträge von $x$ ist der $x^3$-Term dominierent, d.h. die Funktion wird für große $|x|$ monoton steigend sein. Lediglich für kleine $|x|$ ist auch der Beitrag des $-x^2$-Terms zu berücksichtigen –

die Konstante 9 ist für die Untersuchung der Monotonie irrelevant, da die Funktion dadurch nur um eine Konstante verschoben wird. Der Beitrag von $x$ ist ebenfalls nicht kritisch, da auch diese Funktion streng monoton steigend ist. Der $x^2$-Term ist für $x > 0$ ebenfalls streng monoton steigend, d.h. die Funktion muss mindestens in $\mathbb{R}^+$ streng monoton steigend sein. Bleiben also noch die kleinen negativen $x$-Werte: für $x < -1$ ist der $x^3$-Term dominant und die Funktion ist streng monoton steigend. Für $-1 < x < 0$ dagegen ist der $x$-Term dominant – und die Funktion ist wiederum streng monoton steigend. Insgesamt ist $f(x)$ daher eine streng monoton steigende Funktion. Falls Ihnen die Argumentation etwas unübersichtlich ist, können Sie diese nochmals mit Hilfe von Abb. 11 nachvollziehen.

### 3.3.5 Grenzwert

§ **176** Auch bei der Untersuchung, ob eine Funktion einen Grenzwert hat, kann der Begriff der Monotonie hilfreich sein: eine streng monoton fallende, nach unten beschränkte Funktion $f(x)$ konvergiert für $x \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert. Umgekehrt konvergiert eine streng monoton steigende, nach oben beschränkte Funktion für $x \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert.

§ **177** Ein physikalisches Beispiel ist der radioaktive Zerfall. Hier wird die Zahl der Atome $N(t)$ betrachtet. Diese Zahl nimmt durch den Zerfall der Kerne ab, d.h. $N(t)$ ist eine monoton (genauer sogar streng monoton) fallende Funktion. Gleichzeitig gibt es jedoch keine negative Zahl von Atomen, d.h. $N(t)$ ist nach unten beschränkt durch die Null. Damit hat $N(t)$ auch einen Grenzwert. Mathematisch wird der radioaktive Zerfall durch eine abfallende Exponentialfunktion beschrieben, $N(t) = N_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda t}$, die genau die oben beschriebenen Eigenschaften hat und für große Zeiten $t$ gegen den Grenzwert Null konvergiert.

§ **178** Grenzwerte werden bei Funktionen jedoch nicht nur für den Fall betrachtet, dass die unabhängige Variable gegen $\pm\infty$ geht. Eine Funktion unterscheidet sich von einer Folge dadurch, dass zwischen zwei benachbarten natürlichen Zahlen des Definitionsbereichs unendlich viele reelle Zahlen liegen. Ja selbst zwischen zwei beliebigen reellen Zahlen liegen unendlich viele weitere reelle Zahlen. Daher wird das Verhalten einer Funktion bei Annäherung an ein endliches Argument $x = a$ durch unendlich viele andere Argumente bestimmt. Dies führt zur folgenden Definition des Grenzwerts:

**Definition**: Die Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x = a$ den Grenzwert

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \qquad \text{oder} \qquad f(x) \to g \quad \forall x \to a$$

wenn sich die Funktion $f(x)$ bei unbegrenzter Annäherung von $x$ an $a$ unbegrenzt an $g$ nähert. $f(x)$ muss an der Stelle $a$ den Wert $g$ nicht zwingend annehmen; $f(x)$ muss an der Stelle $x = a$ nicht zwingend definiert sein.

§ **179** Achtung: die Funktion $f(x)$ kann für $x = a$ einen Grenzwert haben ohne ihn an dieser Stelle anzunehmen oder gar an dieser Stelle definiert zu sein. Eine derartige Stelle kann eine Sprungstelle sein, wie in Abb. 12 angedeutet, oder eine im Funktionsplot nicht einmal als Lücke wahrnehmbare Stelle wie in Abb. 13. In letzterem Fall hat die Funktion an ihrer Definitionslücke einen Grenzwert: es ist egal, ob wir uns von links oder rechts an die Stelle $x = 0$ annähern, die Funktion strebt immer gegen den Wert 1. In diesem Fall sind rechts- und linksseitiger Grenzwert identisch.

§ **180** Bei der Funktion in Abb. 12 dagegen ergeben sich bei Annäherung an die Definitionslücke von rechts und links unterschiedliche Grenzwerte, d.h. rechts- und linksseitiger Grenzwert sind nicht identisch.

§ **181** Eine alternative Definition des Grenzwerts bietet einen Hinweis auf eine mögliche Rechentechnische Behandlung von Grenzwerten und basiert auf dem $\varepsilon, \delta$-Kriterium:

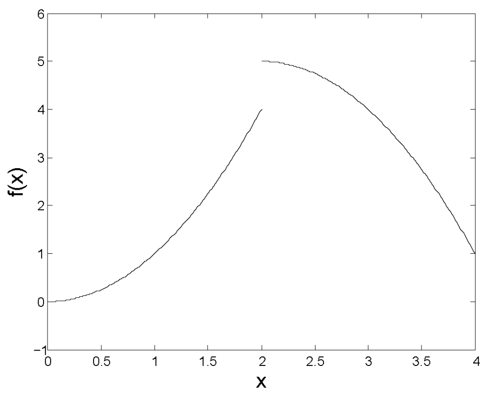



Abbildung 12: Die Funktion hat an der Stelle $x = 2$ zwar einen Grenzwert, ist dort aber nicht definiert. Annäherung an $x = 2$ von links und rechts führt zu unterschiedlichen Grenzwerten, dem linksseitigen und dem rechtsseitigen

**Definition**: Die Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle $x = a$ den Grenzwert $g$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass $|f(x) - g| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$.

Diese Definition wird häufig so gelesen, dass es zu jedem noch so kleinen $\varepsilon$ einen Wert $\delta$ gibt, so dass in einer $\varepsilon$-Umgebung um den Grenzwert $g$ alle Funktionswerte aus der $\delta$-Umgebung von des Arguments $a$ liegen.

### 3.3.6 Polstelle

§ **182** Bevor wir uns der Funktion in Abb. 13 zuwenden, betrachten wir noch ein Zahlenbeispiel für den Grenzwert. Die Funktion

$$f(x) = \frac{4 + x}{x + 1}$$

ist an der Stelle $x = -1$ nicht definiert. Bilden wir den linksseitigen Grenzwert, so erhalten wir (unter Verwendung des $\varepsilon, \delta$-Kriteriums in vereinfachter Schreibweise)

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x + 4}{x + 1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1 - \varepsilon + 4}{-1 - \varepsilon + 1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3 - \varepsilon}{-\varepsilon} = -\infty \, .$$

Für den rechtsseitigen Grenzwert dagegen ergibt sich

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x + 4}{x + 1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-1 + \varepsilon + 4}{-1 + \varepsilon + 1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3 + \varepsilon}{\varepsilon} = +\infty \, .$$

§ **183** Die beiden unterschiedlichen Grenzwerte der Funktion in § 182 haben eine weitere Besonderheit. Sie sind nicht einfach nur unterschiedlich wie in Abb. 12 sondern die Funktion strebt hier gegen Unendlich. Eine derartige ausgezeichnete Stelle wird als Pol bezeichnet:

**Definition**: Stellen, in deren unmittelbarer Umgebung die Funktionswerte über alle Grenzen hinaus fallen oder wachsen, heißen *Pole* oder *Unendlichkeitsstellen* der Funktion.

§ **184** Die Polstelle in der Beispielfunktion aus § 182 ist ein spezielles Beispiel für Funktionen der Form $f(x) \sim 1/x$, d.h. Funktionen, in denen der Nenner verschwindet. Während bei $f(x) = 1/x$ für $x \to 0$ wie in obigem Beispiel links- und rechtsseitiger Grenzwert im Unendlichen liegen und sich im Vorzeichen unterscheiden, hat die Funktion $f(x) = 1/|x|$ an der Stelle $x = 0$ ebenfalls eine Polstelle, d.h. einen Grenzwert im Unendlichen, jedoch haben links- und rechtsseitiger Grenzwert gleiches Vorzeichen.

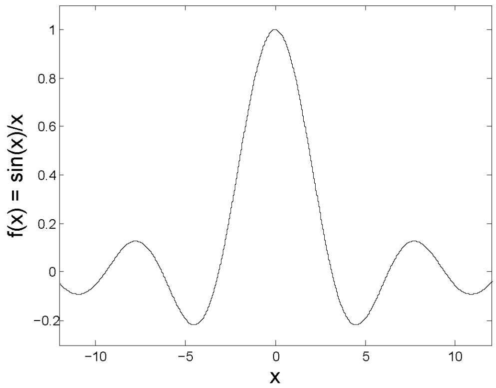



Abbildung 13: Die Funktion $f(x) = \sin(x)/x$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert, hat dort aber einen Grenzwert, der sich mit Hilfe der Regel von l' Hôspital bestimmen lässt, vgl. § 186

### 3.3.7 Regel von l' Hôspital

§ **185** Für den Fall, dass der Grenzwert an der Stelle $x = a$ existiert obwohl die Funktion $h(x)$ dort nicht definiert ist, lässt er sich unter der Voraussetzung, dass sich die Funktion als Quotient zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ schreiben lässt, nach der Regel von l' Hôspital bestimmen zu

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ . \tag{12}$$

Voraussetzung ist, dass (a) sowohl Zähler als auch Nenner an der Stelle $x = a$ verschwinden, d.h. $f(a) = g(a) = 0$, und (b) die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$ an dieser Stelle existieren. Sollte bei diesem Verfahren $g'(a)$ wiederum verschwinden, so wird die Regel von l' Hôspital so lange wiederholt bis die entsprechende Ableitung definiert ist.

§ **186** Als Beispiel bestimmen wir, wie bereits in Aufgabe 85 vorgeschlagen, den Grenzwert der Funktion $f(x) = (\sin x)/x$ an der Stelle $x = 0$ mit Hilfe der Regel von l' Hôspital zu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1 \ .$$

Dies lässt auch sich mit Hilfe des Funktionsplots in Abb. 13 bestätigen.

§ **187** Formal lässt sich die Regel von l'Hôspital mit Hilfe des Mittelwertsatzes beweisen; uns soll hier eine anschauliche Erklärung genügen: in einem kleinen Bereich um die zu untersuchende Stelle $x = a$ lässt sich die Funktion durch ihre Tangenten annähern. Die Voraussetzungen fordern

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \ .$$

Damit sind die beiden Tangenten gegeben durch die Gleichungen $t_f = f'(a)\,(x - a)$ und $t_g = g'(a)\,(x - a)$. Ihr Quotient

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} \approx \frac{t_f}{t_g} \frac{f'(a)\,(x-a)}{g'(a)\,(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ist daher die in (12) gegebene Annäherung an den Quotienten $f(a)/g(a)$.

### 3.3.8 Stetigkeit

§ **188** Anschaulich kann man eine stetige Funktion dadurch beschreiben, dass sie sich ohne Anheben des Bleistifts in einem Zug durch zeichnen lässt. Für eine formale Definition der Stetigkeit können wir die Informationen aus dem Abschnitt über Grenzwerte recyclen: sind in irgendeinem Punkt der Funktion links- und rechtsseitiger Grenzwert unterschiedlich wie in Abb. 12, so müssen wir an der Stelle den Bleistift anheben. Damit ist eine notwendige Bedingung für Stetigkeit identifiziert: rechts- und linksseitiger Grenzwert müssen übereinstimmen für entweder den Punkt $x = x_0$, in dem die Funktion auf Stetigkeit überprüft werden soll, oder für alle $x \in \mathbb{R}$ für den Fall, das Stetigkeit in $\mathbb{R}$ gegeben sein soll. Allerdings ist dies keine hinreichende Bedingung: links- und rechtsseitiger Grenzwert können existieren, aber dennoch lässt sich die Funktion nicht durchzeichnen, da der Funktionswert an dieser Stelle nicht definiert ist, vgl. Abb. 13. Daher müssen wir zusätzlich fordern, dass die Funktion in dem Punkt, in dem Stetigkeit bestimmt werden soll, definiert ist. Soll Stetigkeit für $\mathbb{R}$ gegeben sein, so muss $f(x)$ existieren für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ergibt sich als Definition für Stetigkeit in einem Punkte:

**Definition**: Eine in $x_0$ und einer Umgebung von $x_0$ definierte Funktion $f(x)$ heißt *stetig* an der Stelle $x_0$, wenn der Grenzwert der Funktion in $x_0$ existiert und mit dem Funktionswert übereinstimmt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

§ **189** Eine Funktion ist demnach stetig in einem Intervall $[a, b]$, wenn diese Definition für alle $x \in (a, b)$ erfüllt ist; sie ist stetig in $\mathbb{R}$, wenn die Definition für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

§ **190** Stetige Funktionen werden als 'well behaved' bezeichnet. Wohlverhalten bedeutet u.a. dass eine kleine Änderung im Input $x$ zu einer endlichen Änderung im Output $f(x)$ führt. Die meisten in der Physik gebräuchlichen Funktionen sind stetig, Beispiele sind $x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x^\alpha$ für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, Sinus, Kosinus und die Exponentialfunktion.

§ **191** Bei der Untersuchung, ob eine Funktion stetig ist, ist der folgende Satz hilfreich:

**Satz**: Alle stetigen Funktionen stetiger Funktionen sind stetig. Ebenso sind alls Summen, Produkte und Quotienten (in denen der Divisor von Null verschieden ist) aus Paaren stetiger Funktionen wieder stetige Funktionen.

Die Lösung der Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung mit externem Antrieb

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) + \mathrm{e}^{-\gamma t}(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$$

ist daher eine stetige Funktion, da sie nur Summen und Produkte von Funktionen enthält.

§ **192** Stetige Funktionen haben eine Eigenschaft, die durch den Zwischenwertsatz beschrieben wird:

**Zwischenwertsatz**: Ist eine Funktion $f(x)$ stetig in $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und ist $f(a) < 0 < f(b)$, so gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ derart, dass $f(c) = 0$.

Anschaulich besagt dieser Satz, dass eine stetige Funktion, die an einer Stelle einen positiven, an einer anderen Stelle dagegen einen negativen Funktionswert annimmt, an irgendeiner Stelle dazwischen die $x$-Achse schneiden muss. Das erwarten wir auch, da wir anschaulich Stetigkeit als Durchzeichnen interpretiert haben – und dabei muss der Funktionsgraph die Abszisse schneiden.

### 3.3.9 Rechentraining

**Aufgabe 92** Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Monotonie, Beschränktheit, Stetigkeit, Null- und Polstellen und geben Sie Definitions- und Wertebereich an sowie ob es sich um eine gerade oder ungerade Funktion handelt:

$$f(x) = x\,, \quad g(x) = \sin(x)\,, \quad h(x) = x\,\sin(x) \quad \text{und} \quad i(x) = \frac{(x+4)^2}{x+2}\,.$$

Hilfe zur Aufgabe in § 533 Musterlösung in § 542

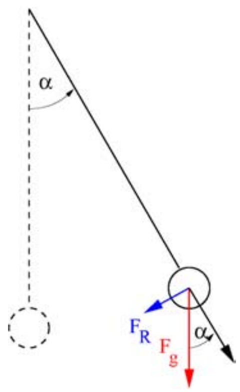



Abbildung 14: Kräfte am Fadenpendel

**Aufgabe 93** Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \, .$$

Hilfe zur Aufgabe in § 535 Musterlösung in § 543

**Aufgabe 94** Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 5}{2x^3 - 18x^2 + 30x - 14} \, .$$

Hilfe zur Aufgabe in § 535 Musterlösung in § 544

## 3.4 Wichtige Funktionen in der Physik

§ **193** Die wichtigsten mathematischen Funktionen in der Physik sind die Exponentialfunktion sowie ihre Umkehrung, der natürliche Logarithmus, die trigonometrischen Funktionen sowie die hyperbolischen Funktionen. Alle diese Funktionen sind transzendente Funktionen, d.h. sie lassen sich nicht als endliche Kombination algebraischer Terme darstellen. Allerdings lassen sich die Funktionen durch unendliche Potenzreihen darstellen, wie im Lernfeld 'Komplexe Zahlen' im Zusammenhang mit Euler'scher Formel und Taylor Entwicklung gezeigt.

### 3.4.1 Lineare Funktionen

§ **194** Die lineare Funktion

$$f(x) = m \cdot x + b \, .$$

ist für $m \neq 0$ im gesamten Definitionsbereich streng monoton und damit umkehrbar. Sie wird häufig zur Anpassung eines funktionalen Zusammenhanges an Messdaten verwendet, die sogenannte lineare Regression.

§ **195** Lineare Funktionen sind auf Grund ihrer Einfachheit sehr beliebt: die Veränderung des Funktionswertes bei einer kleinen Veränderung des Arguments ist ebenfalls nur klein und leicht abzuschätzen. Oder flapsig: kleines Eingangssignal (Argument) hat kleine Wirkung (niedriger Funktionswert), großes Eingangssignal hat große Wirkung und noch eichtiger: eine kleine Änderung des Eingangssignals bewirkt auch nur eine kleine Änderung des Ausgangssignals. Die meisten intuitiven Vorstellungen, die wir über quantitative Zusammenhänge im Alltagsleben haben, basieren auf der Annahme linearer Zusammenhänge.

### 3.4.2 Exkurs Fadenpendel: Linearisierung und Differentialgleichung

§ **196** Viele natürliche Prozesse lassen sich allerdings nicht durch eine lineare Funktion beschreiben. Dennoch versucht man in der Physik, viele dieser nicht-linearen Zusammenhänge zumindest für bestimmte Bedingungen durch lineare Zusammenhänge anzunähern. Die entsprechenden Gleichungen werden linearisiert und die mathematische Behandlung des Problems deutlich vereinfacht.

§ **197** Eines der ersten Beispiele für eine derartige Linearisierung, das Ihnen in der Experimentalphysik begegnen wird, ist das Fadenpendel, vgl. Abb. 14: eine an einem Faden befestigte Masse $m$ wird um einen Winkel $\alpha$ aus der Vertikalen ausgelenkt. Durch die rücktreibende Komponente $F_R$ der Gravitationskraft $F_g$ wird die Masse in Richtung auf die Ruhelage beschleunigt. Diese Beschleunigung hält, wenn auch mit abnehmendem $F_R$ so lange an, bis die Masse wieder die Ruhelage erreicht hat. Da sie auf diesem Weg aber immer entlang ihrer Bewegungsrichtung beschleunigt wurde, hat die Masse bei Eintreffen an der Ruhelage eine von Null verschiedenen Geschwindigkeit, so dass Sie sich auf Grund ihrer Trägheit durch die Ruhelage bewegt. Dadurch wird der Faden aus der Ruhelage ausgelenkt und es entsteht wieder eine rücktreibende Kraft in Richtung auf die Ruhelage. Da diese der Geschwindigkeit der Masse entgegen gesetzt ist, wird die Masse verzögert, bis sie im Umkehrpunkt zur Ruhe kommt und dich der ganze Prozess, nur mit umgekehrten Richtungen wiederholt. Das Fadenpendel führt also eine Schwingung aus.

§ **198** Die Bewegung des Fadenpendels wird durch das zweite Newton'sche Axiom

$$F = ma$$

beschrieben. Die einzige auf die Masse wirkende Kraft ist die senkrecht nach unten wirkende Gravitationskraft $F_g$. Diese zerlegen wir in zwei Komponenten, eine entlang des Fadens (schwarzer Pfeil in Abb. 14) und eine senkrecht zu diesem (blauer Pfeil). Die Kraftkomponente parallel zum Faden führt nicht zu einer Bewegung sondern wird durch eine entgegen gesetzte gleich große Seilspannung aufgehoben. Zur Beschleunigung und damit zur Bewegung führt die Kraftkomponente senkrecht zum Faden, d.h.

$$F_R = F_g \sin\alpha = mg \sin\alpha \, .$$

Diese rücktreibende Kraft ist eine Funktion der Auslenkung, $F_r = F_R(\alpha)$.

§ **199** Die Bewegung und damit den Ort der Masse können wir ebenfalls am besten mit Hilfe des Winkels $\alpha$ beschreiben: statt $s(t)$ wie bei einer gradlinigen Bewegung ist der Ort der Masse beschrieben durch die Funktion $\alpha(t)$. Die Masse bewegt sich auf einem Kreisbogen, d.h. der zurück gelegte Weg ist gegeben als $s = \alpha l$ mit $l$ als der Länge des Fadens. Die Beschleunigung als zweite Ableitung des Weges nach der Zeit ist

$$a(t) = s''(t) = \alpha''(t)\, l \; :$$

da die Fadenlänge $l$ konstant ist, wird nur die Funktion $\alpha(t)$ abgeleitet.

§ **200** Einsetzen von Beschleunigung und Kraft in das Newton'sche Axiom liefert

$$F = ma \qquad \Rightarrow \qquad -mg \sin\alpha(t) = ml\, \alpha''(t) \, .$$

Vor der Kraft steht ein Minus-Zeichen, da die Kraft der Bewegungsrichtung entgegen gesetzt ist – eine rücktreibende Kraft eben. Umschreiben liefert die sich aus dem zweiten Newton'schen Axiom ergebende Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l} \sin\alpha = 0 \, . \qquad (13)$$

Diese Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung: sie gibt eine Beziehung zwischen einer gesuchten Funktion $\alpha(t)$ und eine ihrer Ableitungen, in diesem Fall der zweiten.

§ **201** Differentialgleichungen sind Bestimmungsgleichungen für Funktionen, die einen Zusammenhang zwischen der Funktion und einer oder mehrere ihre Ableitungen enthalten ohne die Funktion explizit anzugeben. Differentialgleichungen treten in der Physik wie in diesem Beispiel bei der Beschreibung von Bewegungen auf, d.h. der Entwicklung des Ortes eines

Körpers mit der Zeit. Differentialgleichungen haben jedoch wesentlich breitere Anwendungen: auch die Entwicklung einer Baktrienpopulation in einer Petrischale, die Entwicklung von Finanzsystemen oder gar die Entwicklung des Klimasystems werden mit Hilfe von Differentialgleichungen bzw. Systemen von Differentialgleichungen beschrieben.

§ **202** Für einige Typen von Differentialgleichungen gibt es einfache Lösungsverfahren, andere lassen sich nur numerisch lösen. Besonders einfach sind lineare Differentialgleichungen, in denen nur ein linearer Zusammenhang zwischen der gesuchten Funktion und einer ihrer Ableitungen auftritt. Die Differentialgleichung (13) ist leider etwas komplizierter: sie setzt die Ableitung $\alpha''$ der gesuchten Funktion mit einer Funktion dieser Funktion, nämlich $\sin\alpha$ in Beziehung. Um den Sinus aus der Differentialgleichung weg zu kriegen, greifen wir auf die Taylor Entwicklung im Lernfeld 'Komplexe Zahlen' vor und schreiben den Sinus als eine Potenzreihe

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \ldots\,.$$

Für kleine Werte von $\alpha$ kann $\sin\alpha$ also durch den Winkel $\alpha$ ersetzt werden – wir brechen die Reihenentwicklung nach dem ersten Term ab. Wie groß oder klein $\alpha$ dabei sein darf, werden wir in § 431 noch genauer untersuchen.

§ **203** Mit der nach dem ersten Term abgebrochenen Reihenentwicklung lässt sich die Bewegungsgleichung (13) schreiben als

$$\alpha'' + \frac{g}{l}\alpha = 0 \qquad \text{oder} \qquad \alpha'' = -\frac{g}{l}\alpha\,. \tag{14}$$

Damit haben wir eine lineare Differentialgleichung erhalten, die sich einfach lösen lässt.

§ **204** Die formale Lösung der Differentialgleichung (14) interessiert uns im Rahmen dieses Vorkurses noch nicht – die werden wir im ersten Semester noch früh genug kennen lernen. Aber die rechte Variante von (14) sagt schon recht explizit, was für eine Funktion $\alpha(t)$ wir suchen: zweimal abgeleitet ergibt diese Funktion wieder sich selbst multipliziert mit einem negativen Vorfaktor. Potenzen scheiden also aus: diese ergeben zwar bei zweimaligem Ableiten wieder Potenzen, aber eben mit niedrigerem Exponenten. Winkelfunktionen wie Sinus oder Kosinus dagegen ergeben bei zweimaligem Ableiten wieder sich selbst mit negativem Vorzeichen. Den Vorfaktor besorgen wir uns dabei aus einer inneren Ableitung. Da diese zweimalig gebildet wird, ist der Vorfaktor $g/l$ das Quadrat der inneren Funktion, d.h. wir können für $\alpha(t)$ annehmen

$$\alpha(t) = A\,\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + B\,\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) \tag{15}$$

mit $A$ und $B$ als Integrationskonstanten.

§ **205** Überzeugen wir uns zuerst davon, dass (15) Lösung der Differentialgleichung (14) ist. Dazu leiten wir (15) zweimal nach $t$ ab:

$$\alpha'(t) = A\sqrt{\frac{g}{l}}\,\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) - B\sqrt{\frac{g}{l}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$$

und

$$\begin{aligned}\alpha''(t) &= -A\,\frac{g}{l}\,\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) - B\,\frac{g}{l}\,\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)\\ &= -\frac{g}{l}\left(A\,\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + B\,\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)\right) = -\frac{g}{l}\alpha(t)\,,\end{aligned}$$

d.h. die Differentialgleichung ist erfüllt.

§ **206** Die Lösung (15) besagt, dass sich die Bewegung des Fadenpendels als eine Überlagerung von Sinus und Kosinus mit einer Schwingungsdauer Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ entsprechend einer Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ darstellen lässt. Die Bewegung ist periodisch: sowohl das Auftreten der periodischen Winkelfunktionen in (15) als auch unsere Anschauung legen dies nahe. Aber was machen wir mit den beiden Integrationskonstanten $A$ und $B$? Diese können wir aus den Anfangsbedingungen, d.h. aus Ort und Geschwindigkeit des Fadenpendels zur Zeit $t = 0$ bestimmen. Beide Anfangsbedingungen sind erforderlich, da die Angabe nur des Ortes nicht auf eine eindeutige Beschreibung führt; wir müssen zusätzlich wissen, in welche Richtung sich die Masse bewegt (links oder rechts) und zusätzlich welche Geschwindigkeit sie hat, damit wir bestimmen könne, wo die maximale Auslenkung und damit der Umkehrpunkt der Bewegung liegen.

§ **207** Nehmen wir die einfachste Anfangsbedingung entsprechend Abb. 14: die Masse befindet sich bei der maximalen Auslenkung $\alpha_{\max}$ in Ruhe, d.h. es ist $\alpha(0) = \alpha_{\max}$ und $\alpha'(0) = 0$. Einsetzen dieser Anfangsbedingungen in die Lösung 15 bzw. die Gleichung für $\alpha'$ unter Verwendung von $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ liefert

$$\alpha_{\max} = A\sin(\omega_0 0) + B\cos(\omega_0 0) = B \qquad \Rightarrow \qquad B = \alpha_{\max}$$

sowie

$$\alpha'(0) = 0 = A\omega_0 \cos(\omega_0 0) - B\omega_0 \sin(\omega_0 0) = A\omega_0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0\,.$$

Damit erhalten wir als Lösung für diese Anfangsbedingung

$$\alpha(t) = \alpha_{\max} \cos(\omega_0 t)\,.$$

Eine andere einfache Anfangsbedingung, der Durchgang durch die Ruhelage mit $\alpha(0) = 0$ und $\alpha'(0) = \omega_{\max}$, führt auf einen Sinus; Anfangsbedingungen, in denen nicht einer der Ausdrücke $\alpha$ oder $\alpha'$ verschwindet, d.h. bei denen wir zu irgendeinem Zeitpunkt in die Schwingung einsteigen, erfordern die Überlagerung von Sinus und Kosinus.

§ **208** Bevor wir uns wieder dem eigentlichen Thema dieses Lernfeldes zuwenden, werfen Sie noch einen Blick auf (13). Diese Gleichung ist eine Bestimmungsgleichung für die Bewegung $\alpha(t)$ des Fadenpendels. Diese Bewegung, z.B. charakterisiert durch die Schwingungsdauer $T$ als die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden maximalen Auslenkungen zur rechten Seite, kann daher nur von den physikalischen Größen abhängen, die auch in der Bewegungsgleichung auftreten, in diesem Fall der Fadenlänge $l$ und die Gravitationsbeschleunigung $g$. Die Masse $m$ des Pendels geht nicht in die Schwingungsdauer ein, d.h. alle Pendel mit gleicher Fadenlänge $l$ (und unter Einwirkung der gleichen Gravitationskonstanten $g$) schwingen mit der gleichen Schwingungsdauer unabhängig von ihrer Masse: ein Sumoringer und ein 2jähriges Kleinkind benötigen auf einer gegebene Schaukel die gleiche Zeit, um einmal hin und her zu schwingen. Formal sind wir zu diesem Schluss gekommen, da sich die Masse aus den in das zweite Newton'sche Axiom eingesetzen Größen kürzen ließ, da die Masse sowohl im Trägheitsterm $ma$ auftritt als auch in der Kraft. Etwas physikalischer und anschaulicher können Sie auch folgendermaßen argumentieren: eine Kraft muss zur Änderung der Bewegung die Trägheit des Körpers überwinden. Diese ist durch die träge Masse $m$ bestimmt: um die gleiche Bewegungsänderung zu erreichen, muss bei einem Körper doppelter/vierfacher Masse eine doppelt/viermal so große Kraft wirken. Da die rücktreibende Kraft eine Komponente der Gravitationskraft ist, ist sie der Masse proportional und nimmt entsprechend zu.

### 3.4.3 Potenzfunktionen

§ **209** Potenzfunktionen oder ganz rationale Funktionen lassen sich in der allgemeinsten Form darstellen als

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i + a_\mathrm{o}\,.$$

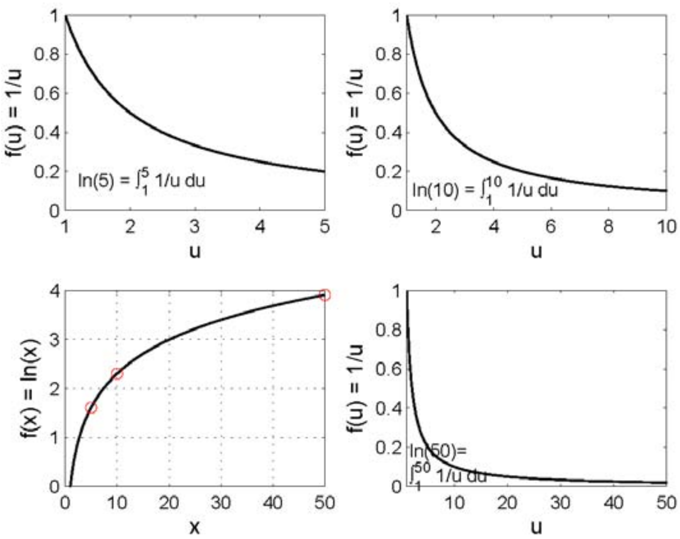



Abbildung 15: Definition des natürlichen Logarithmus als die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen von $1/u$ in den Grenzen von 1 bis x für verschieden Werte von $x$

Spezialfälle sind die quadratische Gleichung (Potenzfunktion 2$^{\text{ten}}$ Grades)

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_\mathrm{o} \quad \text{oder} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

sowie die kubische Gleichung (Potenzfunktion 3$^{\text{ten}}$ Grades)

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_\mathrm{o} \quad \text{oder} \quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ .$$

§ **210** Gebrochen rationale Funktionen lassen sich als der Quotient zweier Potenzfunktionen darstellen

$$f(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i + a_\mathrm{o}}{\sum\limits_{i=1}^{m} b_i x^i + b_\mathrm{o}}\ .$$

Gebrochen rationale Funktionen haben mit relativ großer Wahrscheinlichkeit Polstellen: hat die Potenzfunktion im Nenner eine oder mehrere Nullstellen (und verschwindet nicht gleichzeitig der Zähler wie in Aufgabe 94), so hat die gebrochen rationale Funktion in diesen Punkten Polstellen.

§ **211** Die Wurzelfunktion ist die Umkehrung der Potenzfunktion. Die Quadratwurzel ist die Umkehrung zur Potenzfunktion 2$^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \text{Umkehrfunktion :} \ \ f_\mathrm{U}(x) = \pm\sqrt{x} = \pm x^{1/2}\ .$$

Die Qudratwurzel ist nicht eindeutig: die quadratische Funktion ist zwar streng monoton fallend für $x \leq 0$ und streng monoton steigend für $x \geq 0$, über den gesamten Definitionsbereich jedoch nicht streng monoton. Für einen beliebigen Exponenten gilt

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \text{Umkehrfunktion} \ \ f_\mathrm{U} = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}\ .$$

### 3.4.4 Exponentialfunktion und Logarithmus

§ **212** Eine Möglichkeit der mathematischen Einführung von Exponentialfunktion und Logarithmus startet von der Definition des natürlichen Logarithmus $\ln(x)$ als bestimmtes Integral der Funktion $x^{-1}$:

$$\ln(x) = \int\limits_1^x \frac{1}{u}\, \mathrm{d}u\ .$$

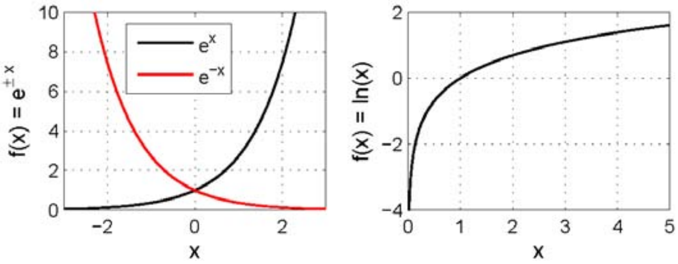



Abbildung 16: Exponentialfunktion (links) und natürlicher Logarithmus (rechts)

Der natürliche Logarithmus ist damit eine über ein Integral definierte Funktion: das Argument des Funktion Logarithmus ist die obere Integrationsgrenzen im bestimmten Integral einer Funktion $1/u$. Oder anschaulich: der natürliche Logarithmus von $x$ gibt die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen von $1/u$ und der Absizze im Intervall von 1 bis $x$, vgl. Abb. 15. Die Exponentialfunktion wird als Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus definiert.

§ **213** In diesem Abschnitt wird ein einfacherer Ansatz vorgestellt, der von einer allgemeinen Form der Exponentialfunktion ausgeht und die gebräuchliche Exponentialfunktion $\mathrm{e}^x$ nur als Speziallfall hierzu betrachtet. In der allgemeinen Exponentialfunktion

$$f(x) = a^x$$

ist die Konstante $a \in \mathbb{R}$ die Basis und die Variable $x \in \mathbb{R}$ der Exponent. Spezialfälle ergeben sich für die Basis 10 als $f(x) = 10^x$ und für die Basis e (Euler Zahl) zu $f(x) = \mathrm{e}^x$. Jede Exponentialfunktion ist streng monoton. Ist die Basis größer 1, so ist die Funktion streng monoton wachsend, vgl. Abb. 16. Ist die Basis dagegen zwischen 0 und 1, so ist die Funktion streng monoton fallend. Die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes beliebige Polynom in $x$; sie geht durch den Punkt (0,1) und nähert sich für $a > 1$ asymptotisch der negativen $x$-Achse an, für $0 < a < 1$ asymptotisch der positiven.

§ **214** Alle Exponentialfunktionen zur beliebigen Basis $a$ lassen sich in eine auf der Euler Zahl basierende Darstellungsform umwandeln:

$$a^x = (\mathrm{e}^{\ln a})^x = \mathrm{e}^{x \ln a} = \mathrm{e}^{\ln a^x} \; .$$

Für die Umwandlung von einer Basis $a$ zu einer Basis $b$ gilt entsprechend

$$f(x) = a^x = (b^{\log_b a})^x = b^{x \, \log_b a} = b^{\log_b a^x} \; .$$

§ **215** Für den Umgang mit Potenzen zur gleichen Basis gilt wie bereits in § 32 verwendet

$$a^x a^y = a^{x+y} \; , \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \text{und} \qquad (a^x)^y = a^{xy} \; .$$

§ **216** Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion ist der Logarithmus. Zu verschiedenen Basen der Exponentialfunktion gibt es verschiedene Logarithmen. Diese werden abgekürzt als $\log_{\mathrm{a}}$, gesprochen ‚Logarithmus zur Basis $a$‘. Die verschiedenen Exponentialfunktionen mit ihren Logarithmen sind

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = a^x$ | $\log_{\mathrm{a}} f(x) = x$ | |
| $f(x) = 10^x$ | $\log_{10} f(x) = \log f(x) = x$ | dekadischer Logarithmus |
| $f(x) = \mathrm{e}^x$ | $\log_{\mathrm{e}} f(x) = \ln f(x) = x$ | natürlicher Logarithmus |

§ **217** Der dekadische Logarithmus wird häufig in der logarithmischen Darstellung von Daten, die einen weiten Größenbereich umspannen, verwendet. So sind einige Größen wie der pH-Wert auf einer logarithmischen Skala definiert.

§ **218** Der Logarithmus stellt graphisch die an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten gespiegelte Exponentialfunktion dar. Er geht daher durch den Punkt (1,0). Der Logarithmus wächst langsamer als jede beliebige Potenz von $x$. Da die Exponentialfunktion nur Werte größer Null annimmt, ist der Logarithmus nur für Werte größer Null definiert, vgl. rechtes Teilbild in Abb. 16. Für $a > 1$ wächst der Logarithmus von $-\infty$ bis $+\infty$, für $0 < a < 1$ fällt er monoton von $+\infty$ auf $-\infty$.

§ **219** Wie die Exponentialfunktion lässt sich auch der Logarithmus jeweils von einer Basis zur anderen umformen

$$f(x) = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \; .$$

**Verständnisfrage 8** Leiten Sie diesen Zusammenhang her; lassen Sie sich eventuell von § 214 inspirieren.

§ **220** Für den Umgang mit Logarithmen gleicher Basis gilt, entsprechend den Rechenregeln für Exponenten,

$$\log(xy) = \log x + \log y \; , \qquad \log\frac{x}{y} = \log x - \log y \qquad \text{und} \qquad \log x^n = n \log x \; .$$

### 3.4.5 Winkel im Bogenmaß

§ **221** Mathematisch sind Winkel unhandliche Gebilde. Zwar lassen sich sich anschaulich durch den Schnitt zweier Geraden einfach darstellen, eine daraus abgeleitete mathematisch saubere Beschreibung ist jedoch nicht einfach: diese würde den Winkel als einen Schnitt aus den Graden $y = 0$ (das ist die $x$-Achse) und $y = mx$ (das ist die Gerade, die den zweiten Schenkel des Winkels bildet) interpretieren und den Winkel in Abhängigkeit von der Steigung $m$ dieser zweiten Geraden angeben.

§ **222** Unsere konventionelle Angabe des Winkels in Grad ist einfacher. Sie definiert den vollen Winkel zu 360°: dann fällt der zweite Schenkel des Winkels mit der Bezugsgeraden zusammen, d.h. der maximale Winkel von 360° entspricht einem Winkel von 0°. Alle dazwischen liegenden Winkel werden durch gleichmäßige Teilung dieser 360° bestimmt: der Winkel entspricht dem Verhältnis des ausgeschnittenen Tortenstücks zur Gesamttorte.

§ **223** Eine alternative Definition geht nicht von der Fläche sondern von der Bogenlänge aus, die von den Schenkeln eines Winkels $\varphi$ aus einem Einheitskreis geschnitten wird: die Länge $x$ dieses Bogenstücks im Verhältnis zum Gesamtumfang $2\pi$ des Einheitskreises ist ein Maß für den Winkel, siehe Abb. 17. Diese Größe wird als Bogenmaß bezeichnet, formal definiert als:

**Definition**: Das *Bogenmaß* $x$ eines Winkels $\varphi$ ist die Länge des Bogens, der dem Winkel $\varphi$ im Einheitskreis gegenüber liegt.

§ **224** Bei einem Kreis mit beliebigem Radius ergibt sich der Winkel $\varphi$ im Bogenmaß als

$$\varphi = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}} = \frac{b}{r} \; .$$

Das Bogenmaß ist gemäß Definition eine dimensionslose Größe; die Einheit Radiant ist eine willkürliche Hilfsgröße und sollte weggelassen werden.[3]

[3] Hätte ein Winkel $\varphi$ eine Einheit, so müsste es auch eine Vorschrift dafür geben, wie eine Winkelfunktion mit dieser Einheit umgeht, d.h. es müsste z.B. den Sinus der Einheit geben. Aus der geometrischen Definition der Winkelfunktionen als Verhältnis von Seitenlängen ergibt sich jedoch eine dimensionslose Größe, d.h. $\sin\varphi$ hat keine Einheit und damit hat $\varphi$ auch keine.

Tabelle 3: Grad- und Bogenmaß für einige Winkel

| $\varphi$ | 30° | 45° | 90° | 180° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $\pi$ | $2\,\pi$ |

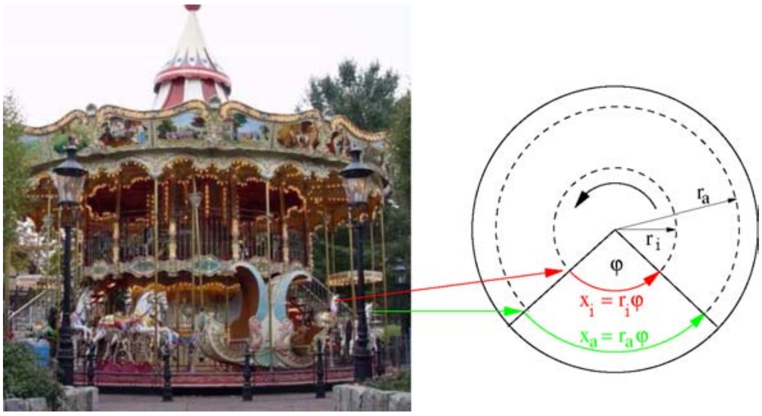



Abbildung 17: Die Angabe des Winkels $\varphi$ im Bogenmaß vereinfacht z.B. die Behandlung von Drehbewegungen

§ **225** Da das Bogenmaß auf den Umfang des Einheitskreises bezogen ist, nimmt ein Winkel im Bogenmaß Werte zwischen 0 und $2\pi$ an. Die Umrechnung zwischen Grad- und Bogenmaß erfordert nur, dass wir uns merken, dass (a) jeweils das Verhältnis zum Vollkreis gebildet wird und (b) dass der Bezugswert für den Vollkreis im Bogenmaß $2\pi$, im Gradmaß jedoch 360° beträgt. Mit $\varphi_{\rm grad}$ als Winkel im Gradmaß und $\varphi$ als Winkel im Bogenmaß ergibt sich daraus für die Umrechnung

$$\varphi_{\rm grad} = \frac{360°}{2\pi}\varphi \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi = \frac{2\pi}{360°}\varphi_{\rm grad}\ .$$

Werte für wichtige Winkel sind in Tabelle 3 gegeben; für $\varphi = 1$ (rad) ergibt sich 1 (rad) $\cong \frac{360°}{2\pi} = 57°17'45''$, d.h. 1 rad gibt den Winkel, unter dem die Bogenlänge eines Einheitskreises genau 1 ist.

§ **226** Mathematisch ist die Darstellung von Winkeln im Bogenmaß sinnvoll, da das Bogenmaß sich formal und nicht nur anschaulich definieren lässt. Außerdem sind Manipulationen der Winkelfunktionen, wie z.B. die Entwicklung einer Winkelfunktion in eine Potenzreihe nur dann möglich, wenn der Winkel im Bogenmaß angegeben wird.

§ **227** Auch für physikalische Anwendungen ist die Angabe eines Winkels im Bogenmaß sinnvoll, z.B bei der Betrachtung einer Kreisbewegung wie in Abb. 17. Sind die beiden markierten Karussell-Pferdchen gleich schnell oder nicht? Natürlich sind sie es und sind sie es auch nicht: sie sind gleich schnell, wenn man den zurück gelegten Winkel $\varphi$ betrachtet; aber das äußere Pferdchen legt in der gleichen Zeit einen größeren Bogen $x_{\rm a}$ zurück als das innere ($x_{\rm i}$), ist also schneller. Beide, zurück gelegter Winkel und dabei zurück gelegter Weg, stehen bei Angabe des Winkels im Bogenmaß in einfacher Beziehung:

$$x_{\rm a} = r_{\rm a}\varphi \qquad \text{und} \qquad x_{\rm i} = r_{\rm i}\varphi\ .$$

Für die Geschwindigkeiten gilt entsprechend

$$v_{\rm a} = r_{\rm a}\omega \qquad \text{und} \qquad v_{\rm i} = r_{\rm i}\omega$$

mit $\omega = {\rm d}\varphi/{\rm d}t$ als der räumlich und zeitlich konstanten Winkelgeschwindigkeit.

### 3.4.6 Trigonometrische Funktionen

§ **228** Während die Einführung der Exponentialfunktion auf den ersten Blick etwas unbeholfen erscheint, lassen sich die trigonometrischen Funktionen auf Grund ihrer geometrischen Bedeutung leichter einführen.

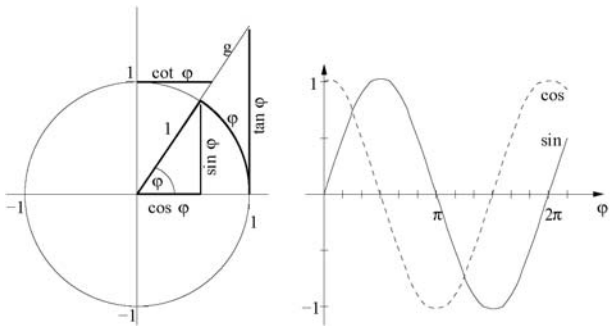



Abbildung 18: Trigonometrische Funktionen als Kreisschnitte (links) sowie Verlauf der Sinus- und Kosinusfunktion (rechts)

| | 0° <br> 0 | 30° <br> $\pi/6$ | 45° <br> $\pi/4$ | 60° <br> $\pi/3$ | 90° <br> $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | $\frac{1}{2} = 0.5$ | $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$ | $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87$ | 1 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87$ | $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.71$ | $\frac{1}{2} = 0.5$ | 0 |
| tan | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58$ | 1 | $\sqrt{3} = 1.73$ | $\infty$ |
| sec | 1 | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$ | 2 | $\infty$ |
| cosec | $\infty$ | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 1 |
| cot | $\infty$ | $\sqrt{3} = 1.73$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0.58$ | 0 |

Tabelle 4: Wichtige Werte einiger Winkelfunktionen

§ **229** Zur Herleitung betrachten wir den Schnitt eines Einheitskreises mit einer Geraden $g$ wie im linken Teil von Abb. 18 gezeigt. Die trigonometrischen Funktionen setzen den aus dem Kreis ausgeschnittenen Bogen $\varphi$ mit verschiedenen der fett ausgezogenen Linien in Beziehung. Der Sinus $\sin\alpha$ ergibt sich als das Verhältnis aus Gegenkathete zu Hypothenuse, der Kosinus $\cos\alpha$ als Verhältnis von Ankathete zu Hypothenuse und der Tangens $\tan\alpha$ als das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete bzw. Sinus zu Kosinus. Die Funktionen Kosekans, Sekans und Kotangens sind die Kehrwerte zu Sinus, Kosinus und Tangens.

§ **230** Aus der Darstellung am Einheitskreis lässt sich der Verlauf der Winkelfunktionen (rechter Teil von Abb. 18) veranschaulichen. Für $\varphi = 0$ hat die Gegenkathete die Länge Null, d.h. der Sinus beginnt bei Null. Er steigt an, bis er bei $\pi/2$ den Wert 1 annimmt und fällt dann bis $\pi$ wieder auf Null ab. Der Abfall ist symmetrisch um $\pi/2$, daher gilt $\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi)$. Für $\pi < \varphi < 2\pi$ nimmt der Sinus negative Werte an, deren Beträge denen für $0 < \varphi < \pi$ entsprechen. Daher gilt $\sin\varphi = -\sin(\pi + \varphi)$. Diesen Zusammenhang haben wir bereits in § 134 bei der anschaulichen Interpretation des Spatprodukts verwendet.

§ **231** Der Kosinus ist über die Ankathete definiert, d.h. für $\varphi = 0$ nimmt er den Wert 1 an und fällt mit zunehmendem $\varphi$ ab bis er bei $\pi/2$ den Wert Null erreicht. Für $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ ist der Kosinus negativ, für $\varphi > 3\pi/2$ wieder positiv. Der Kosinus entspricht in seinem Verlauf einem um $\pi/2$ verschobenen Sinus, d.h. es gilt $\cos\varphi = \sin(\pi/2 + \varphi)$. Da $\pi/2 - \varphi$ der Komplementwinkel zu $\varphi$ ist, gilt gleichzeitig auch $\cos\varphi = \sin(\pi/2 - \varphi)$.

§ **232** Der Verlauf des Tangens ergibt sich anschaulich aus der Länge der Tangente an den Kreis. Für $\varphi = 0$ beginnt er bei Null und steigt mit zunehmendem $\varphi$ auf $\infty$ bei $\pi/2$. An dieser Stelle springt der Tangens auf $-\infty$ und steigt mit zunehmendem $\varphi$ auf Null bei $\pi$ und auf $+\infty$ bei $3\pi/2$. Das Tangens ist daher periodisch mit einer Periode $\pi$ während Sinus und Kosinus periodisch mit der Periode $2\pi$ sind.

§ **233** Wichtige Werte für die Winkelfunktionen sind in Tabelle 4 gegeben, die Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen in Tabelle 5.

Tabelle 5: Umwandlung einer Winkelfunktion in eine andere

| | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\tan\alpha$ | $\cot\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha =$ | - | $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ | $\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ | $\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$ |
| $\cos\alpha =$ | $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ | - | $\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ | $\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$ |
| $\tan\alpha =$ | $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ | $\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ | - | $\frac{1}{\cot\alpha}$ |
| $\cot\alpha =$ | $\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$ | $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ | $\frac{1}{\tan\alpha}$ | - |

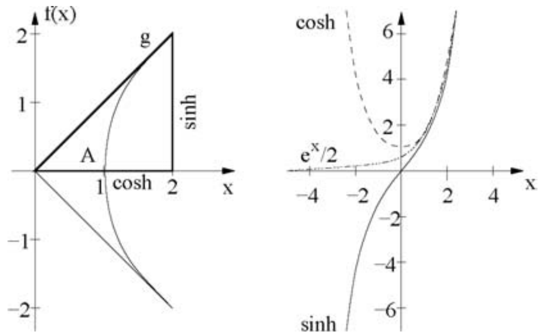



Abbildung 19: Hyperbolische Funktionen: Definition über den Schnitt einer Geraden mit einem Hyperbelast (links) und Verlauf von sinh und cosh zusammen mit dem der e-Funktion (rechts)

### 3.4.7 Hyperbolische Funktionen

§ **234** Während die trigonometrischen Funktionen durch den Schnitt einer Geraden mit dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ erzeugt werden, entstehen die hyperbolischen Funktionen durch Schnitte einer Geraden mit Hyperbelästen, vgl. Abb. 19. Der Parameter der hyperbolischen Funktionen ist die von den Geraden $g$ und $-g$ und der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ eingeschlossene Fläche $A$. Die Funktionen Sinus Hyperbolicus sinh, Kosinus Hyperbolicus cosh und Tangens Hyperbolicus tanh lassen sich geometrisch beschreiben als die $y$- bzw. $x$-Koordinate des Schnittpunktes zwischen Gerade und Hyperbel sowie als die Geradensteigung.

§ **235** Die hyperbolischen Funktionen hängen zusammen gemäß

$$\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1 \qquad \text{und} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \,.$$

§ **236** Sie lassen sich mit Hilfe der Exponentialfunktion darstellen als

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \,, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \,.$$

Die inversen hyperbolischen Funktionen sind die Areafunktionen. Sie lassen sich unter Verwendung von Logarithmen darstellen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Arsinh}x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \,, \quad \mathrm{Arcosh}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad \text{und} \\ \mathrm{Arctanh}x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \,. \end{aligned}$$

### 3.4.8 Rechentraining

**Aufgabe 95** Die Intensität $I_0$ des Tageslichts nimmt in einem Meer alle 5 m um 50% ab. Ist es dann noch möglich, mit einer Unterwasserkamera, die 65% des Tageslichts benötigt, in einer Tiefe von 3 m gute Aufnahmen zu machen?

Hilfe zur Aufgabe in § 536 Musterlösung in § 545

**Aufgabe 96** Zwischen den beiden Eishockey-Spielern S1 (Abstand von der Bande $d_1$) und S2 (Abstand von der Bande $d_2$) in Abb. 20 steht ein gegnerischer Spieler G. Daher spielt Spieler S1 Spieler S2 den Puck über die Bande zu (gestrichelte Linie). Der Puck wird unter

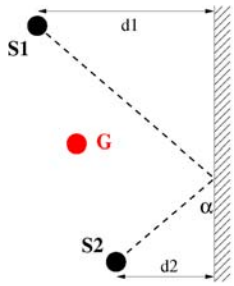



Abbildung 20: Skizze zu Aufgabe 96

dem Winkel $\alpha$ an der Bande reflektiert. Bestimmen Sie den Abstand der beiden Spieler für allgemeine Werte $d_1$, $d_2$ und $\alpha$ sowie konkret für $d_1 = 2.5$ m, $d_2 = 6.5$ m und $\alpha = 42°$.

Musterlösung in § 546

**Aufgabe 97** Eine Archimedische Spirale ist die Bahnkurve eines Körpers, der sich mit konstanter Geschwindigkeit $v$ entlang eines Strahls radial nach außen ausbreitet während der Strahl gleichzeitig mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um seinen Ursprung rotiert. Für die Länge $s$ der Archimedischen Spirale in Abhängigkeit vom radialen Abstand $r$ vom Ursprung gilt

$$s(r) = \frac{1}{2}\,\frac{v}{\omega}\left(\psi\,\sqrt{\psi^2+1} + \ln\left\{\psi + \sqrt{\psi^2+1}\right\}\right) \qquad \text{mit} \qquad \psi = \frac{\omega r}{v}\,.$$

Lässt sich diese Gleichung als $r(s)$ darstellen, d.h. lässt sich eine Umkehrfunktion bestimmen, mit deren Hilfe aus einer bekannten Spirallänge $s$ der radiale Abstand $r$ bestimmt werden kann.

Hilfe zur Aufgabe in § 537 Musterlösung in § 547

## 3.5 Folgen und Reihen

### 3.5.1 Definition einer Folge

§ **237** Eine Folge ist eine unendliche Menge von Zahlen, die durchnummeriert, d.h. eindeutig auf die natürlichen Zahlen abgebildet werden können: $a_n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Folgen werden nicht explizit angegeben, da man dann ihre unendlich vielen Glieder darstellen müsste.

§ **238** Die Definition einer Folge durch die Abbildung auf $\mathbb{N}$ beinhaltet bereits den Begriff der (eindeutigen) Zuordnung. Eine andere Möglichkeit der Definition geht daher vom Begriff der Funktion aus und betrachtet eine Folge als eine spezielle Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$:

**Definition:** Eine Funktion mit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ohne Null als Definitionsbereich heißt *Folge*. Die einzelnen Funktionswerte heißen die Glieder einer Folge.

§ **239** Einige gebräuchliche Folgen sind:

- die Folge der natürlichen Zahlen (rote Punkte in Abb. 21):

$$a_1 = 1\,,\;\; a_2 = 2\,,\;\; a_3 = 3\,,\;\; a_4 = 4\,,\;\; \ldots\,,\;\; a_n = n\,,\;\; \ldots\,.$$

- die harmonische Folge, gebildet aus den Inversen der natürlichen Zahlen:

$$a_1 = 1\,,\;\; a_2 = \frac{1}{2}\,,\;\; a_3 = \frac{1}{3}\,,\;\; a_4 = \frac{1}{4}\,,\;\; \ldots\,,\;\; a_n = \frac{1}{n}\,,\;\; \ldots\,,.$$

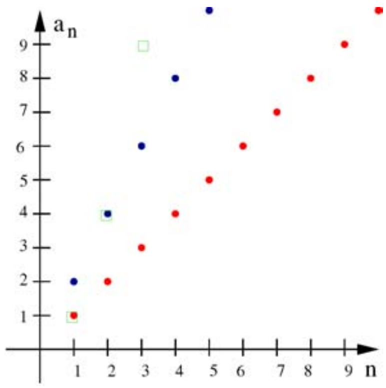



Abbildung 21: Beispiele für Folgen: Folge der natürlichen Zahlen $a_n = n$ (rote Punkte), $a_n = 2n$ (blaue Punkte), $a_n = n^2$ (grüne Quadrate)

- die geometrische Folge, bei der jedes Glied durch Multiplikation mit einem festen Faktor $q$ aus seinem Vorgänger entsteht:

$$a_1 = a_0 q\,, \;\; a_2 = a_0 q^2\,, \;\; a_3 = a_0 q^3\,, \;\; a_4 = a_0 q^4\,, \;\; \ldots\,, \;\; a_n = a_0 q^n\,, \;\; \ldots\,.$$

  Diese Folge lässt sich auch auf einfache Weise rekursiv definieren:

$$a_{n+1} = q a_n\,.$$

- eine alternierende Folge:

$$a_1 = 1\,, \;\; a_2 = -1\,, \;\; a_3 = 1\,, \;\; a_4 = -1\,, \;\; \ldots\,, \;\; a_n = (-1)^{n+1}\,, \;\; \ldots\,.$$

§ **240** Mit der obigen Definition haben wir eine Folge als eine spezielle Form einer eindeutigen Zuordnungsvorschrift bzw. Funktion beschrieben. Damit lassen sich auch die meisten Begriffe, die wir zur Beschreibung einer Funktion eingeführt haben, auf Folgen übertragen. So wird eine Folge durch drei Eigenschaften charakterisiert: Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Von diesen Eigenschaften ist die Monotonie die einfachste, die anderen beiden kann man sich veranschaulichen, in dem man die Glieder der Folge auf die Ordinate projiziert. Auch wenn diese Eigenschaften teilweise bereits von den Funktionen bekannt sind, werden wir sie hier nochmals wiederholen, um (a) eine weitere Erläuterung der Begriffe zu geben und (b) Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Folgen und Funktionen zu verdeutlichen.

### 3.5.2 Monotonie

§ **241** Monotonie weckt die Assoziation mit Langeweile. Einige monotone Folgen sind in der Tat langweilig, andere dagegen können recht spannend sein, insbesondere wenn es um die Frage geht, ob die Folge konvergiert oder nicht. Die Monotonie oder Langeweile bezieht sich auf das Änderungsverhalten der Glieder der Folge – bei einer Funktion entspricht dies der Steigung. Wie bei Funktionen unterscheiden wir bei einer Folge vier Formen der Monotonie:

**Definition:** Eine Folge $a_n$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt:
– *streng monoton steigend* wenn $a_{n+1} > a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$,
– *monoton steigend* wenn $a_{n+1} \geq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$,
– *streng monoton fallend* wenn $a_{n+1} < a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$,
– *monoton fallend* wenn $a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

§ **242** Die Folge der natürlichen Zahlen ist streng monoton steigend mit $a_{n+1} = a_n + 1$, die harmonische Folge dagegen streng monoton fallend. Die geometrische Folge ist streng monoton steigend für $q > 1$, dagegen streng monoton fallend für $q < 1$. Für $q = 1$ ist sie wie im umgangssprachlichen Sinne einfach nur monoton. Die alternierende Folge ist nicht monoton, da für $a_{n+1} > a_n$ automatisch $a_{n+2} < a_{n+1}$ gilt und umgekehrt.

### 3.5.3 Beschränktheit

§ **243** Projizieren wir alle Glieder der Folge auf die Ordinate, so erhalten wir den Bereich von Werten, die die Glieder der Folge annehmen können. Projizieren wir die alternierende Folge, so werden nur zwei Werte, $-1$ und $+1$ angenommen, diese aber unendlich oft. Es werden keine Werte größer $+1$ oder kleiner $-1$ angenommen, der Wertebereich der Folge ist also auf den Bereich $[-1, +1]$ beschränkt.

§ **244** Die Glieder der Folge der natürlichen Zahlen werden bei einer derartigen Projektion auf die natürlichen Zahlen auf der Ordinate abgebildet. Diese Folge ist nach unten beschränkt, da kein Glied der Folge einen Wert kleiner $+1$ annimmt. Nach oben ist diese Folge jedoch nicht beschränkt.

§ **245** Diese anschauliche Beschreibung lässt sich in der folgenden Definition formalisieren:

**Definition:** Eine Folge $a_n$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist
– *nach oben beschränkt*, wenn es ein $A \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq A \; \forall n \in \mathbb{N}$,
– *nach unten beschränkt*, wenn es ein $A \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \geq A \; \forall n \in \mathbb{N}$.

§ **246** Nimmt ein Glied der Folge den Wert $A$ dieser oberen Schranke an, so ist $A$ gleichzeitig das Maximum der Folge. Entsprechendes gilt für die untere Schranke und das Minimum.

### 3.5.4 Grenzwert, Häufungspunkt und Konvergenz

§ **247** Der Begriff des Grenzwerts lässt sich ebenfalls mit Hilfe einer Projektion der Werte der Folgenglieder auf die Ordinate veranschaulichen. Dabei wird aber nicht die Größe oder Beschränktheit des Wertebereichs der Folgenglieder betrachtet sondern ihre Häufigkeitsverteilung. Betrachten wir dazu die harmonische Folge. Diese ist nach oben beschränkt durch $+1$ (gleichzeitig das Maximum der Folge) und nach unten durch die Null, da kein Glied der Folge negativ werden kann. Innerhalb dieses Bereichs sind die Häufigkeiten der Werte der Folgenglieder sehr unterschiedlich verteilt: so fällt in das Intervall $[1, 0.5)$ genau ein Glied der Folge ($a_1 = 1$), desgleichen in die Intervalle $[0.5, 0.4)$ ($a_2 = 0.5$), $[0.4, 0.3)$ ($a_3 = 0.\overline{3}$) und $[0.3, 0.2)$ ($a_4 = 0.25$). Erst in das anschließende Intervall $[0.2, 0.1)$ fallen fünf Glieder der Folge. Dafür ist das verbliebene Intervall $[0.1, 0]$ recht gut gefüllt mit unendlich vielen Gliedern der Folge. Dieses letzte Intervall können wir nochmals unterteilen:

$$\begin{array}{ccccc} [0.1, 0.08) & [0.08, 0.06) & [0.06, 0.04) & [0.04, 0.02) & [0.02, 0) \\ 3 & 4 & 8 & 25 & \infty \end{array}$$

Wieder ist die Zahl der Glieder der Folge in den oberen Teilintervallen relativ klein, im untersten dagegen unendlich. Dieses Muster wiederholt sich bei immer feinerer Unterteilung. Das legt die Vermutung nahe, dass sich die Werte der Glieder der Folge an der unteren Grenze des unteren Intervalls, also bei Null, häufen: die Null bildet einen Häufungspunkt der Folge.

§ **248** Für die harmonische Folge scheinen Häufungspunkt und Grenzwert identisch zu sein: nicht nur liegen unendlich viele Glieder der Folge in der Nähe von Null sondern sie streben mit wachsendem $n$ auch gegen die Null. Die alternierende Folge zeigt jedoch, dass ein solcher Häufungspunkt keinesfalls zwingend ein Grenzwert ist: bei ihr liegen jeweils unendlich viele Werte in den Punkten $+1$ und $-1$, aber die alternierende Folge strebt weder gegen $+1$ noch gegen $-1$; sie hat keinen Grenzwert.

§ **249** Ein Zusammenhang zwischen Beschränktheit und Existenz von Häufungspunkten wird durch den *Satz von Bolzano und Weierstraß* beschrieben:

**Satz von Bolzano und Weierstraß:** Jede nach oben und unten beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.

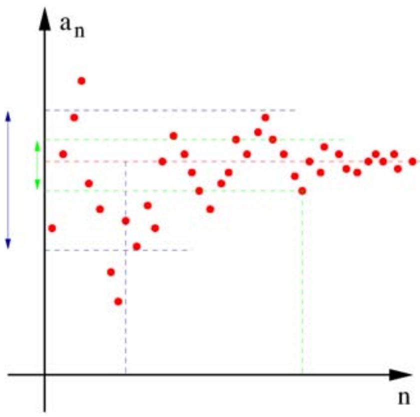



Abbildung 22: Veranschaulichung zum Grenzwert

§ **250** Statt eines Beweises soll hier soll eine Plausibilitätsbetrachtung ausreichen. Die alternierende Folge erfüllt die Voraussetzung des Satzes (sie ist nach oben und unten beschränkt) und hat zwei Häufungspunkte. Auch die harmonische Folge erfüllt die Voraussetzungen, sie hat einen Häufungspunkt. Die geometrische Folge erfüllt die Voraussetzungen nur für $q \leq 1$ und hat dann einen Häufungspunkt: die Null für $|q| < 1$ und $a_0$ für $q = 1$. Die Folge der natürlichen Zahlen und die geometrische Folge mit $|q| > 0$ erfüllen die Voraussetzung des Satzes nicht, da sie zwar nach unten aber nicht nach oben beschränkt sind. Die Tatsache, dass beide keinen Häufungspunkt besitzen hat nichts mit dem Satz von Bolzano und Weierstraß zu tun: dieser ist nur anwendbar, wenn die Voraussetzungen erfüllt sind.

§ **251** Im Hinblick auf die Existenz eines Grenzwerts scheint ein Häufungspunkt eine notwendige Bedingung zu sein, nicht jedoch eine hinreichende. Notwendig, da eine Folge sicherlich keinen Grenzwert hat, wenn sie keinen Häufungspunkt hat. Das illustriert die Folge der natürlichen Zahlen. Ein Häufungspunkt ist aber auch keine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Grenzwerts: die alternierende Folge hat zwei davon, dafür aber keinen Grenzwert. Mit einer zusätzlichen Bedingung lässt sich ein formaler Zusammenhang zwischen Häufungspunkt und Grenzwert herstellen:

**Satz:** Eine Folge $(a_n)$ hat einen *Grenzwert*, wenn sie genau einen Häufungspunkt $A$ besitzt und dieser im Endlichen liegt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A$$

ist der Grenzwert dieser Folge.

Die alternierende Folge erfüllt die Voraussetzungen nicht, da sei mehr als einen Häufungspunkt hat. Damit muss sie auch keinen Grenzwert haben.

§ **252** Die Existenz genau eines Häufungspunktes im Endlichen besagt, dass fast alle Glieder der Folge in einer beliebig kleinen Umgebung um diesen Häufungspunkt liegen müssen. Dann müssen ab einem bestimmten $n \in \mathbb{N}$ alle Glieder $a_n$ der Folge innerhalb einer Umgebung $\varepsilon$ um diesen Häufungspunkt liegen, vgl. Abb. 22. Egal, wie klein dieses $\varepsilon$ vorgegeben wird, es lässt sich immer ein $n$ finden, ab dem alle $a_n$ innerhalb einer $\varepsilon$-Umgebung um den Häufungspunkt liegen.

§ **253** Für die harmonische Folge lässt sich zu jedem noch so kleinen $\varepsilon$ das zugehörige $n$ aus dem Bildungsgesetz der Folge bestimmen zu

$$\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} \, .$$

Mit diesem Ansatz kann der Grenzwert einer Folge auf folgende Weise definiert werden:

**Definition:** Zahlenfolge $(a_n)$ strebt gegen einen *Grenzwert* $A$, wenn für jede positive Zahl $\varepsilon$ von einem gewissen $n_\varepsilon$ an $|a_n - A| < \varepsilon$ gilt.

Hat eine Folge den Grenzwert Null, so wird sie als Nullfolge bezeichnet.

§ **254** Mit Grenzwerten lässt sich wie mit reellen Zahlen rechnen. Für zwei Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ mit den Grenzwerten $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ gelten folgende Rechenregeln:

- Summation und Multiplikation mit einem Skalar $\alpha$ bzw. $\beta$:

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n \; .$$

- Produkte und Quotienten von Folgen (letzteres erfordert $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$):

$$\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \; .$$

§ **255** Die Zahlenfolge

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

mit den Gliedern

$$a_1 = 2 \,, \;\; a_2 = 2.25 \,, \;\; a_3 = 2.37 \,, \;\; \ldots \;\; a_{10} = 2.59 \;\; \ldots \;\; a_{100} = 2.70 \;\; \ldots \;\; a_{1000} = 2.71692$$

hat den Grenzwert $a_\infty = 2.718281 = \mathrm{e}$, die Euler Zahl. In diesem Beispiel haben wir eine Folge zur Definition einer transzendenten Zahl verwendet.

§ **256** Hat eine Folge einen Grenzwert, so wird sie als konvergent bezeichnet. Da Konvergenz über den Grenzwert definiert ist, ergibt sich

**Definition:** Eine Folge $(a_n)$ heißt *konvergent*, wenn sie einen Grenzwert $A$ hat, d.h. wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt $|a_n - A| < \varepsilon$.

Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

§ **257** Die Definition hat den Nachteil, dass sie den Grenzwert $A$ explizit enthält. Ist dieser nicht bekannt (oder nicht bestimmbar), so lässt sich eine Folge an Hand dieser Definition nicht auf Konvergenz überprüfen. In der Physik interessiert oftmals aber nicht der Grenzwert selbst sondern nur die Tatsache, dass dieser existiert. In letzterem Fall nähert sich die Folge einem Wert an. Existiert der Grenzwert nicht, so hat die Folge etwas unberechenbares an sich, insbesondere kann sie ins Unendliche entweichen.

§ **258** Sind die Eigenschaften Beschränktheit und Monotonie der Folge bereits überprüft, so ist der folgende Satz hilfreich:

**Satz:** Jede nach oben beschränkte monoton steigende Folge ist konvergent. Entsprechend ist jede nach unten beschränkte monoton fallende Folge konvergent.

§ **259** Das Cauchy Kriterium, auch als allgemeines Konvergenzprinzip bezeichnet, liefert eine formalere Bedingung für Konvergenz:

**Satz (Cauchy-Kriterium):** eine Folge $(a_n)$ ist *konvergent* genau dann, wenn es ein zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m > n_\varepsilon$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Dieses Kriterium erinnert an die Definition von Konvergenz und Grenzwert, hat jedoch den Vorteil, dass der Grenzwert nicht explizit auftritt sondern nur die Differenz aus Folgegliedern immer kleiner werden muss. Wir vergleichen also nicht mit dem absoluten Wert 'Grenzwert' sondern betrachten das relative Verhalten von Folgegliedern.

### 3.5.5 Definition einer Reihe

§ **260** Aus den Gliedern einer Folge lassen sich Partial- oder Teilsummen bilden, indem man Glied für Glied aufsummiert. Diese Summen können zu einer neuen Folge zusammen gefasst werden, der Partialsummenfolge oder Reihe.

**Definition:** Die Folge der Partialsummen $(s_n)$ einer unendlichen Zahlenfolge heißt *unendliche Reihe*; die einzelnen Glieder der Folge sind:

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m = a_1 + a_2 + ... + a_n \; .$$

§ **261** Die Euler Zahl, in § 255 als Grenzwert einer Folge eingeführt, lässt sich auch als Reihe darstellen:

$$\mathrm{e} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{16}$$

mit $n$-Fakultät $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.

**Querverbindung 1** Eine Reihe ist einer Folge ähnlich: in beiden Fällen handelt es sich um eine endliche oder unendliche Sequenz von Zahlen. Die Glieder beider Sequenzen können explizit angegeben werden, z.B.

$$a_n = n \qquad \text{und} \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} k$$

für die Folge $(a_n)$ der natürlichen Zahlen und die natürliche Reihe $(s_n)$. Beide Sequenzen können auch rekursiv definiert werden:

$$a_{n+1} = a_n + 1 \qquad \text{und} \qquad s_{n+1} = s_n + (n+1) = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \; .$$

Der entscheidende Unterschied ist das Auftreten des Summenzeichens in der Reihe, d.h. der Unterschied zwischen Folgen und Reihen liegt eigentlich nur in diesem Detail des Bildungsgesetzes. Mathematisch ist dieses Detail aber nicht unerheblich: eine Nullfolge ist leicht zu erkennen, bei einer Reihe dagegen ist die Beurteilung bezüglich Konvergenz schwieriger, da in jedem Fall zum vorangegangenen Wert etwas addiert (oder subtrahiert) wird – und das gegebenenfalls unendlich oft.

### 3.5.6 Konvergenz

§ **262** Reihen werden, ebenso wie Folgen, durch Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz charakterisiert. Der einzige Unterschied besteht darin, dass nicht die einzelnen Glieder $a_n$ der Folge untersucht werden, sondern jeweils die Partialsummen $s_n$. Konvergenz einer Reihe wird in Analogie zur Konvergenz einer Folge wie folgt definiert:

**Definition:** Eine Folge von Partialsummen $s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen $S$ genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $|s_n < S| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$. Die Reihe konvergiert dann gegen

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \; .$$

§ **263** Die Definition besagt, dass sich für $n > n_\varepsilon$ die Partialsumme $s_{n+1}$ kaum noch (oder genauer gesagt nur noch um ein beliebig kleines $\varepsilon$) von $s_n$ unterscheiden darf. Dass kann nur dann der Fall sein, wenn $(a_n)$ eine Nullfolge ist, d.h. $(a_n)$ ist Nullfolge ist zumindest eine notwendige Bedingung für Konvergenz. Ist dagegen $a_n$ keine Nullfolge, so ist die Reihe $s_n$ in jedem Fall divergent, selbst wenn die Folge $a_n$ konvergent ist.

§ **264** Die Definition des Grenzwerts kann, entsprechend dem Cauchy Kriterium, umformuliert werden, so dass nicht mehr die $n^{\text{te}}$ Partialsumme mit dem Grenzwert vergleichen wird sondern mit einer $m^{\text{ten}}$ Partialsumme, wobei $n, m > n_\varepsilon$.

§ **265** Aus den bereits aus § 239 bekannten Folgen können wir die folgenden Reihen bilden:

- für die Folge der natürlichen Zahlen erhalten wir eine Reihe, die mit den Gliedern 1, 3, 6, 10, 15, 21 beginnt. Diese Reihe ist offenbar divergent. Dazu wäre es nicht notwendig gewesen, sich die ersten Terme explizit anzusehen, da bereits die zugehörige Folge der natürlichen Zahlen divergent ist.
- aus der harmonischen Folge lässt sich die harmonische Reihe
$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$$
Obwohl die zu Grunde liegende harmonische Folge eine Nullfolge ist, ist die harmonische Reihe divergent.
- aus der alternierenden Folge ergibt sich eine alternierende Reihe, die abwechselnd die Werte 1 und 0 annimmt. Diese Reihe konvergiert nicht.
- das Produkt aus harmonischer und alternierender Folge führt auf eine Reihe der Form
$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} .$$
Diese alternierend harmonische Reihe konvergiert gegen $\ln 2$.
- aus der geometrischen Folge lässt sich eine geometrische Reihe konstruieren. Diese Reihe konvergiert für $q < 1$.

Während die Divergenz der natürlichen Reihe leicht einzusehen ist, ist Konvergenz oder Divergenz für die anderen Reihen weniger offensichtlich.

### 3.5.7 Geometrische Reihe

§ **266** Für die geometrische Reihe lässt sich die Konvergenz auf einfache Weise zeigen. In Anlehnung an das Cauchy Kriterium betrachten wir dazu nicht die unendliche Reihe sondern nur Paare endlicher Partialsummen. Da diese jeweils endlich sind, können sie ohne Probleme algebraisch manipuliert werden. Für $q \neq 1$ gilt für die geometrische Reihe
$$s_n = \sum_{m=1}^{n} q^m \qquad \Rightarrow \qquad q s_n = s_n + q^{n+1} - 1 .$$
Umformen ergibt
$$s_n - \frac{1}{1-q} = \frac{-q^{n+1}}{1-q} .$$
Wenn beide Seiten gleich sind, müssen auch ihre Beträge gleich sein:
$$\left| s_n - \frac{1}{1-q} \right| = \left| \frac{-q^{n+1}}{1-q} \right| . \tag{17}$$
Für $|q| < 1$ wird die rechte Seite mit zunehmendem $n$ immer kleiner, insbesondere auch kleiner als jede vorgegebene positive Zahl. Also lässt sich für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon$ finden, so dass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt
$$\left| s_n - \frac{1}{1-q} \right| < \varepsilon .$$

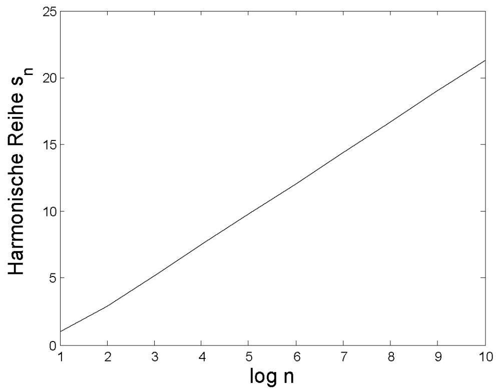



Abbildung 23: Harmonische Reihe: zumindest bis $n = 10^{10}$ lassen sich keine Anzeichen für Konvergenz erkennen

Damit ist Definition für Konvergenz erfüllt, wir erhalten sogar den Grenzwert der geometrischen Reihe zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \forall\, |q| < 1 \; .$$

§ **267** Für $|q| > 1$ dagegen wächst die rechte Seite von (17) beliebig an, so dass sich zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ kein passendes $n_\varepsilon$ finden lässt. In diesem Fall ist eine formale Betrachtung nicht erforderlich, da die geometrische Folge für $|q| > 1$ keine Nullfolge ist und daher die Reihe divergent sein muss. Mit entsprechender Argumentation folgt auch, dass die geometrische Reihe für $|q| = 1$ nicht konvergiert.

### 3.5.8 Harmonische Reihe

§ **268** Für die harmonische Reihe ist die Möglichkeit der Konvergenz nicht einfach zu beurteilen. Die harmonische Folge ist eine Nullfolge, d.h. wir können nicht ausschließen, dass die harmonische Reihe möglicherweise konvergiert. Andererseits zeigt ein einfacher Test mit dem Rechner, dass die Reihe zumindest bis $n = 10^{10}$ keine Anzeichen für Konvergenz erkennen lässt, vgl. Abb. 23. Dieser experimentelle Test schließt aber nicht aus, dass die Reihe einige oder etliche Größenordnungen später nicht mehr weiter wächst und konvergiert.

§ **269** Zerlegen wir die Reihe zur genaueren Untersuchung in Intervalle $[2^m, 2^{m+1} - 1]$. Jedes Intervall ist doppelt so groß wie sein Vorgänger und enthält $2^m$ Terme, die alle kleiner sind als der $2^{m+1}$te. Der Beitrag der Zahlen aus dem betrachteten Intervall zur harmonischen Serie ist daher größer als $2^m/2^{m+1}$:

$$\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} a_k > \frac{2^m}{2^{m+1}} = \frac{1}{2} > \varepsilon \; .$$

Für jedes $n$ ist daher die Potenzreihe $s_n$ größer als $n/2$: die harmonische Reihe wächst also über jede reelle Zahl hinaus und ist damit divergent.

§ **270** Die harmonische Reihe ist ein Sonderfall, der sich genau auf der Grenze zwischen Konvergenz und Divergenz befindet. Sie ist ein Spezialfall einer allgemeineren Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} = \begin{cases} \infty & \text{falls } \delta \leq 0 \\ A \in \mathbb{R} & \text{falls } \delta > 0 \end{cases}$$

### 3.5.9 Alternierend harmonische Reihe

§ **271** Die Tatsache, dass die der alternierend harmonischen Reihe zu Grunde liegende Folge eine Nullfolge ist, besagt nur, dass die Reihe konvergent sein könnte. Ein vorsichtiges Antesten mit dem Rechner legt den Verdacht nahe, dass die alternierend harmonische Reihe

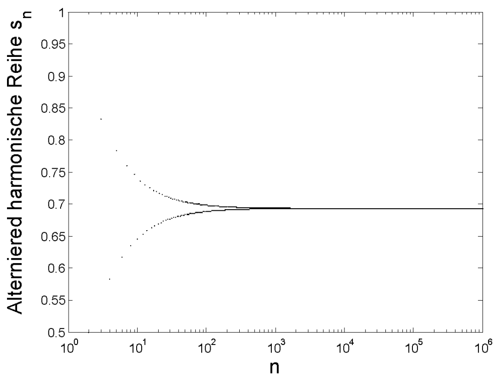



Abbildung 24: Alternierend harmonische Reihe: der Verlauf legt Konvergenz nahe, beweist sie aber natürlich nicht

im Gegensatz zur harmonischen konvergieren könnte, vgl. Abb. 24. Für eine Abschätzung können wir die Reihe umschreiben:

$$\begin{aligned} S &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots \\ &= \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}\right) + \ldots \\ &= 1 - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\right) - \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7}\right) - \ldots \end{aligned}$$

Da die Klammern jeweils positive Ausdrücke ergeben, muss für den Grenzwert gelten

$$\frac{1}{2} < S < 1 ,$$

d.h. die Reihe konvergiert.

§ **272** Für die obige Abschätzung des Grenzwerts der alternierend harmonischen Reihe haben wir die Terme in der Summe geschickt zusammen gefasst. Alternativ zu den beiden oben gegebenen Summen hätte man auch versuchen können, positive und negative Terme zusammen zu fassen:

$$\begin{aligned} S &= \left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \ldots\right) - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \ldots\right) \\ &= \left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \ldots\right) - \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \ldots\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \ldots\right) \\ &= \tfrac{1}{2} S \end{aligned}$$

und damit $S = 0$ im scheinbaren Widerspruch zu dem oben abgeschätzten Ausdruck $\frac{1}{2} < S < 1$. Das Problem wird durch die Klammern in der zweiten Reihe verursacht: beide gehen gegen $\infty$, d.h. in der Zeile steht der nicht definierte Ausdruck $S = \infty - \frac{1}{2}\infty = ?$. Das Umsortieren der Terme in einer Reihe ist nur dann möglich, wenn eine derartige interne Unendlichkeit nicht auftreten kann. Nur im Falle von absoluter Konvergenz, d.h. wenn nicht nur $\sum a_n$ sondern auch $\sum |a_n|$ konvergiert, kann die unendlich große Zahl von Termen beliebig umsortiert werden, ohne dass sich die Summe und damit der Grenzwert ändert. Das ist aber für die alternierend harmonische Reihe nicht der Fall, da der Betrag der Folgeglieder die harmonische Reihe ist und diese nicht konvergiert.

### 3.5.10 Rechentraining

**Aufgabe 98** Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz (geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an):

| | | |
|---|---|---|
| inverse Fakultäten: | $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{24}, \ldots$ | $a_n = \dfrac{1}{n!} \quad n \in \mathbb{N}$ |
| echte Brüche: | $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5}, \ldots$ | $a_n = \dfrac{n}{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$ |
| inverse Quadrate: | $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16}, \ldots$ | $a_n = \dfrac{1}{n^2} \quad n \in \mathbb{N}$ |
| alternierende harmonische F.: | $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots$ | $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \quad n \in \mathbb{N}$ |

$$\text{Exponentialfolge:}\quad 2\,,\ \left(\tfrac{3}{2}\right)^2\,,\ \left(\tfrac{4}{3}\right)^3\,,\ \left(\tfrac{5}{4}\right)^4\,,\ldots\quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad n\in\mathbb{N}$$

Musterlösung in § 548

**Aufgabe 99** Bestimmen Sie das hundertse Glied der Reihe der natürlichen Zahlen.
Hilfe zur Aufgabe in § 538 Musterlösung in § 549

## 3.6 Abschlusstest

§ **273** Die Aufgaben in diesem Abschnitt sind gleichsam die Prüfungsaufgaben. Sie müssen mindestens 3 der Fragen korrekt beantwortet haben, um in das nächste Lernfeld zu gelangen.

**Aufgabe 100** Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Beschränktheit innerhalb ihres gesamten Definitionsbereichs

| | unten beschr. | oben beschr. |
|---|---|---|
| $f(x) = \ln(x)$ | □ | □ |
| $g(x) = (x^2+4)/x^3$ | □ | □ |
| $h(x) = (x^4+4)/x^2$ | □ | □ |
| $i(x) = \cos(x)\,\sin(x)$ | □ | □ |
| $j(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\cos(x)$ | □ | □ |
| $k(x) = \ln(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ | □ | □ |

**Aufgabe 101** Welche der folgenden Funktionen hat eine oder mehrere Definitionslücken in $\mathbb{R}$:

| | keine | eine | zwei | mehr als zwei |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) = \ln(x)$ | □ | □ | □ | □ |
| $g(x) = (x^2+4)/x^3$ | □ | □ | □ | □ |
| $h(x) = (x^4+4)/x^2$ | □ | □ | □ | □ |
| $i(x) = \cos(x)\,\sin(x)$ | □ | □ | □ | □ |
| $j(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\cos(x)$ | □ | □ | □ | □ |
| $k(x) = \ln(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ | □ | □ | □ | □ |

**Aufgabe 102** Markieren Sie in der folgenden Liste die Funktionen, die mindestens eine Polstelle im angegebenen Definitionsbereich haben:

□ $f(x) = (x^2+4)/(x-4)$ in $\mathbb{R}^+$ bei □,
□ $g(x) = \mathrm{e}^x/x$ in $\mathbb{R}$ bei □,
□ $h(x) = (x^3-x^2+x+9)/(x^2+4)$ in $\mathbb{R}$ bei □,
□ $i(x) = \sin^2(x)/\tan(x)$ in $[-180°, 180°]$ bei □,
□ $j(x) = \tan^2(x)/\sin(x)$ in $(-180°, 180°)$ bei □,
□ $k(x) = (x^2-4)/(x+4)$ in $\mathbb{R}$ bei □.

Wenn Sie ja angekreuzt haben, so tragen Sie die Polstelle in die Box ein.

**Aufgabe 103** Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = (\cos(x))/x$ den links- und den rechtsseitigen Grenzwert und kreuzen Sie alle deren Eigenschaften in der folgenden Liste an:

□ rechts- und linksseitiger Grenzwert stimmen überein,
□ der rechtsseitige Grenzwert ist endlich,
□ der linksseitige Grenzwert ist nicht endlich,
□ der rechtsseitige Grenzwert ist nicht endlich,
□ der linksseitige Grenzwert stimmt mit dem Funktionswert überein,
□ der rechtsseitige Grenzwert stimmt mit dem Funktionswert überein,
□ die Funktion ist an dieser Stelle nicht definiert,
□ Funktionswert und beide Grenzwerte stimmen überein.

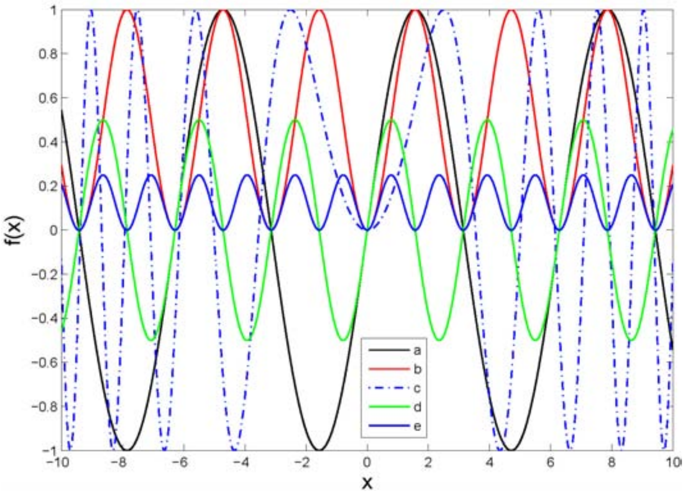



Abbildung 25: Skizze zu Aufgabe 104

**Aufgabe 104** Ordnen Sie die Kurven aus Abb. 25 den folgenden Funktionen zu, in dem Sie den entsprechenden Buchstaben in da Kästchen vor der Funktion eintragen:

| | | |
|---|---|---|
| ☐ $\sin(x)$ , | ☐ $\cos(x^2)$ , | ☐ $x\,\cos(x)$ , |
| ☐ $\cos(x)$ , | ☐ $x\,\sin(x)$ , | ☐ $x^2\,\cos(x)$ , |
| ☐ $x^2\,\sin(x)$ | ☐ $\cos^2(x)$ , | ☐ $x\,\cos(x^2)$ , |
| ☐ $x\,\sin(x^2)$ | ☐ $\sin^2(x)$ , | ☐ $x\,\sin^2(x)$ , |
| ☐ $\sin(x^2)$ , | ☐ $x\,\cos^2(x)$ , | ☐ $(x\,\cos(x))^2$ , |
| ☐ $\sin^2(x)\,\cos^2(x)$ , | ☐ $(x\,\sin(x))^2$ , | ☐ $x\,\sin(x)\,\cos(x)$ , |
| ☐ $\sin(x)\,\cos(x)$ , | ☐ $x^2\,\sin(x)\,\cos(x)$ , | ☐ $x\,\sin^2(x)\,\cos^2(x)$ . |

Hinweis: verwenden Sie keinen Taschenrechner zum berechnen von Funktionswerten sondern machen Sie sich an Hand der markanten Punkte (Nullstellen, Extrem) der Funktionen klar, welcher Graph zu welcher Funktion gehört.

# 4 Differentiation

## 4.1 Übersicht und Selbsttest

§ **274** In diesem Lernfeld werden die Grundregeln der Differentiation sowie deren Bedeutung/Interpretation wiederholt: dazu gehören die anschauliche Interpretation von Differential und Differentialquotient, die Ableitungen elementarer Funktionen sowie die Ableitungsregeln, insbesondere die Produkt- und die Kettenregel. Nach Durcharbeiten dieses Lernfeldes sollte sicheres und schnelles Differenzieren kein Problem mehr für sie sein.

§ **275** Der folgende Test dient zur Selbsteinschätzung ihrer Fähigkeiten und Vorkenntnisse in diesem Lernfeld:

**Aufgabe 105** Leiten Sie die folgende Funktion zweimal ab und tragen Sie das Ergebnis in die Kästchen ein:

$$f(x) = 5x\,\cos^2(x)\ .$$

$$f'(x) = \Box x^{\Box} + \Box x^{\Box}\sin^{\Box}(x) + \Box x^{\Box}\cos^{\Box}(x) + \Box x^{\Box}\sin^{\Box}(x)\,\cos^{\Box}(x)$$

$$f''(x) = \Box x^{\Box} + \Box x^{\Box}\sin^{\Box}(x) + \Box x^{\Box}\cos^{\Box}(x) + \Box x^{\Box}\sin^{\Box}(x)\,\cos^{\Box}(x)$$

**Aufgabe 106** Leiten Sie die folgende Funktion zweimal ab und tragen Sie das Ergebnis in die Kästchen ein:

$$f(x) = \cos(kx)\,\mathrm{e}^{-kx}$$

$$f'(x) = \Box k^{\Box}x^{\Box}\ \sin^{\Box}(\Box kx)\,\mathrm{e}^{-kx} + \Box k^{\Box}x^{\Box}\ \cos^{\Box}(\Box kx)\,\mathrm{e}^{-kx}$$

$$f''(x) = \Box k^{\Box}x^{\Box}\ \sin^{\Box}(\Box kx)\,\mathrm{e}^{-kx} + \Box k^{\Box}x^{\Box}\ \cos^{\Box}(\Box kx)\,\mathrm{e}^{-kx}$$

**Aufgabe 107** Die Bewegung eines Körpers wird durch die Gleichung $x(t) = (t-2)^3 - 3t + 2$ beschrieben. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion und die Funktionswerte an dieser Stelle.

$$t_1 = \Box\,,\quad x(t_1) = \Box\,,\quad t_2 = \Box\,,\quad x(t_2) = \Box\ .$$

Hinweis: beim Eintragen der Lösung mit dem kleineren Argument beginnen.

**Aufgabe 108** Die Bewegung eines Federpendels wird beschrieben durch die Gleichung $x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$. Bestimmen Sie daraus die Geschwindigkeit $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ sowie die Beschleunigung $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$:

$$\begin{aligned}
v &= \Box\gamma^{\Box}\omega^{\Box}\varphi^{\Box}\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos^{\Box}(\omega t+\varphi) + \Box\gamma^{\Box}\omega^{\Box}\varphi^{\Box}\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin^{\Box}(\omega t+\varphi)\ ,\\
a &= \Box\gamma^{\Box}\omega^{\Box}\varphi^{\Box}\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos^{\Box}(\omega t+\varphi) + \Box\gamma^{\Box}\omega^{\Box}\varphi^{\Box}\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin^{\Box}(\omega t+\varphi)\\
&\quad \Box\gamma^{\Box}\omega^{\Box}\varphi^{\Box}\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos^{\Box}(\omega t+\varphi) + \Box\gamma^{\Box}\omega^{\Box}\varphi^{\Box}\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin^{\Box}(\omega t+\varphi)\\
&\quad +\Box\gamma^{\Box}\omega^{\Box}\varphi^{\Box}\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin^{\Box}(\omega t+\varphi)\cos^{\Box}(\omega t+\varphi)\ .
\end{aligned}$$

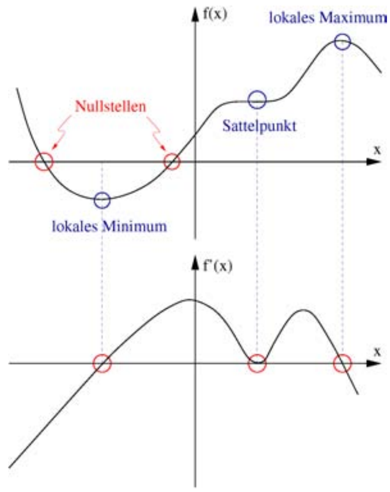



Abbildung 26: Anmerkungen zur Kurvendiskussion

## 4.2 Grundlagen

§ **276** Differenzieren ist gleich bedeutend mit ableiten oder die Ableitung einer Funktion bestimmen. Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist wieder eine Funktion; sie beschreibt die Veränderung der ursprünglichen Funktion.

### 4.2.1 Wozu?

§ **277** Differenzieren ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Kurvendiskussion, d.h. bei der Bestimmung der wesentlichen Merkmale einer Funktion:

- Nullstellen sind die Werte von $x$, für die $f(x) = 0$ gilt, d.h. bei Stellen, an denen der Funktionsgraph die $x$-Achse schneidet, vgl. Abb. 26.
- die erste Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ liefert für jeden Punkt $x$ die Steigung in diesem Punkt.
- die erste Ableitung $f'(x)$ verschwindet in einem Punkt $x$, wenn in diesem Punkt die Steigung verschwindet, d.h. wenn es sich um eine (lokales) Maximum, ein (lokales) Minimum oder einen Sattelpunkt handelt, vgl. Abb. 26.
- die erste Ableitung gibt die Veränderung der Funktion $f(x)$ bei Änderung von $x$; die zweite Ableitung gibt entsprechend die Änderung der ersten Ableitung und damit die Änderung der Änderung von $f(x)$ an.
- Mit Hilfe der zweiten Ableitung kann man die aus den Nullstellen der ersten Ableitung bestimmten Punkte mit waagerechter Tangente einordnen in
  - lokales Minimum wenn $f''(x) > 0$,
  - lokales Maximum wenn $f''(x) < 0$ und
  - Sattelpunkt wenn $f''(x) = 0$ und kein Vorzeichenwechsel in $f'(x)$. Ohne die zusätzliche Bedingung würde z.B. das Minimum von $f(x) = x^4$ an der Stelle $x = 0$ wegen $f''(x) = 12x^2$ und damit $f''(0) = 0$ fälschlicherweise als Sattelpunkt identifiziert werden.

§ **278** Wir können diese bisher aus mathematischer Sicht geführte Kurvendiskussion auch in ein physikalisches Beispiel übersetzen. Dazu nehmen wir den Verlauf der Kurven in Abb. 26 und verwenden die Zeit als die unabhängige Variable, d.h. $t$ an Stelle von $x$, und den Ort als die abhängige, d.h. $s(t)$ an Stelle von $f(x)$.

- eine Nullstelle in $s(t)$ bedeutet, dass der Körper wieder am Bezugspunkt $s = 0$ vorbei kommt. Nullstellen befinden sich also bei den Zeiten $t_\mathrm{N}$, für die gilt $s(t_\mathrm{N}) = 0$, d.h. für die der Körper sich in dem speziellen Ort $s = 0$ befindet.
- die erste Ableitung beschreibt die Veränderung des Ortes $s$ mit der Zeit $t$, also die Geschwindigkeit: $v = s'(t)$. Verschwindet die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt, so ist der Körper in diesem Zeitpunkt in Ruhe, z.B. weil er gerade seine Bewegungsrichtung umdreht

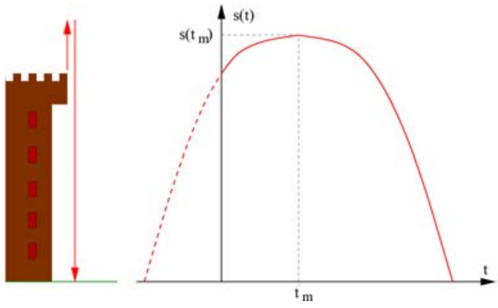



Abbildung 27: Wurf von Turm, Skizze zum Beispiel in § 279

oder ‘eine kurze Pause’ einlegt. Die Umkehr der Bewegungsrichtung entspricht einem lokalen Maximum oder lokalen Minimum: hat sich der Körper anfangs auf diesen Punkt zu bewegt, so wird er immer langsamer bis seine Geschwindigkeit Null wird und er sich anschließend in Gegenrichtung und damit mit umgekehrtem Vorzeichen der Geschwindigkeit von diesem Punkt weg bewegt. Die Ruhepause entspricht einem Sattelpunkt: der Körper ist zwar zur Ruhe gekommen, bewegt sich anschließend aber in gleicher Richtung und damit mit gleichem Vorzeichen der Geschwindigkeit (also der ersten Ableitung) weiter.

- die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit entspricht der ersten Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit und damit der Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit, auch bezeichnet als Beschleunigung: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Maxima in der Geschwindigkeit entsprechen den Nullstellen in der Beschleunigung: zuerst wurde die Geschwindigkeit mit Hilfe einer positiven Beschleunigung bis zu ihrem Maximum erhöht, zur Reduktion der Geschwindigkeit muss dann eine negative Beschleunigung (Verzögerung) wirken.

§ **279** Betrachten wir ein Beispiel zu dieser in ein physikalisches Gewand gekleideten Kurvendiskussion. Ein Stein wird von einem 50 m hohen Turm mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s senkrecht nach oben geworfen. Wo und wann erreicht der Stein das Maximum seiner Flugbahn und wann trifft er auf den Boden vor dem Turm auf? Hinweis: für die Gravitationsbeschleunigung können Sie $g = 10\ \mathrm{m/s}^2$ verwenden; die Situation ist im linken Teil von Abb. 27 gezeigt.

§ **280** Die Bewegung des Steins wird beschrieben durch die Funktion $s(t)$. Physikalisch benötigen wir hier das Weg–Zeit-Gesetz in einer allgemeinen Form, die (a) die Beschleunigung durch die Gravitationskraft berücksichtigt, $-\frac{1}{2}gt^2$ (minus, da nach unten gerichtet), (b) die Startgeschwindigkeit, $v_0t$ (positiv, da nach oben geworfen wird) und (c) den Startort $s_0$:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt + s_0\ . \tag{18}$$

Die Funktion ist im rechten Teil von Abb. 27 dargestellt.

§ **281** Von dieser Funktion $s(t)$ suchen wir ein Maximum, nämlich den höchsten Punkt der Flugbahn, sowie eine Nullstelle, nämlich den Aufschlagpunkt mit $s = 0$. Also setzen wir dieses $s = 0$ in (18) ein:

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0 \qquad \Rightarrow \qquad t^2 - \frac{2v_0}{g}t - \frac{2s_0}{g} = 0$$

und lösen die sich so ergebende quadratische Gleichung nach $t$ auf:

$$t_{1,2} = -\left(-\frac{1}{2}\,\frac{2v_0}{g}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\,\frac{2v_0}{g}\right)^2 + \frac{2s_0}{g}} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2s_0}{g}}$$

bzw. nach Einsetzen der Zahlenwerte

$$t_{1,2} = \frac{10\ \mathrm{m/s}}{10\ \mathrm{m/s}^2} \pm \sqrt{\left(\frac{10\ \mathrm{m/s}}{10\ \mathrm{m/s}^2}\right)^2 + \frac{2\cdot 100\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{m/s}^2}} = 1\ \mathrm{s} \pm \sqrt{1\ \mathrm{s}^2 + 20\ \mathrm{s}^2} = (1 \pm \sqrt{21})\ \mathrm{s}$$

oder ausgeführt

$$t_1 = 5.58 \text{ s} \qquad \text{und} \qquad t_2 = -3.58 \text{ s} .$$

Warum zwei Zeiten? Formal, weil es sich um eine quadratische Gleichung handelt. Physikalisch ist aber nur eine Zeit sinnvoll, die mit dem positiven Vorzeichen, also $t_1$. Das bedeutet, dass der Stein 5.58 s nach dem Abwurf den Boden erreicht. Häufig wird argumentiert, dass die zweite Zeit physikalisch nicht sinnvoll ist, da sie negativ ist und die Zeitrichtung nur positiv nach vorne geht. Wenn wir uns allerdings einmal für einen Moment auf die negative Zeit einlassen und diese mit im Funktionsgraphen berücksichtigen, so erhalten wir den gestrichelt gezeichneten Teil der Flugbahn in Abb. 27 und damit eine sinnvolle Interpretation dieses Wertes: wenn man den Stein zur Zeit $t_2 = -3.58$ s mit einer geeigneten Geschwindigkeit $v(t_2)$ am Boden abgeworfen hätte, so wäre er zur Zeit $t = 0$ genau mit der Abwurfgeschwindigkeit am Abwurfort angekommen. Seine Bahn wäre von da an nicht mehr von der zu unterscheiden, die der vom Turm geworfene Stein nimmt. Die negative Zeit macht also insofern Sinn, als dass sie eine mögliche physikalische Realität zu einer Zeit vor dem Beginn $t = 0$ unserer Beobachtung der Bewegung beschreibt, die auch auf die beobachtete Bewegung führen würde. Für die Entwicklung der Bewegung für Zeiten größer $t = 0$ ist aber natürlich nur die positive Lösung sinnvoll.

§ **282** Zur Bestimmung des Maximums $s_\mathrm{m} = s(t_\mathrm{m})$ der Flugbahn leiten wir (18) einmal nach $t$ ab und erhalten die Geschwindigkeit

$$v(t) = -gt + v_0 .$$

Für ein Maximum muss die erste Ableitung verschwinden, d.h. wir fordern

$$0 \stackrel{!}{=} -gt_\mathrm{m} + v_0 .$$

Durch Auflösen nach $t_\mathrm{m}$ erhalten wir die Zeit, zu der das Extremum erreicht wird:

$$t_\mathrm{m} = -\frac{v_0}{g} = \frac{10 \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}^2} = 1 \text{ s} .$$

Um zu überprüfen, ob es sich hierbei wirklich um ein Maximum handelt, bilden wir die zweite Ableitung, d.h. wir untersuchen die Veränderung der Geschwindigkeit bzw. die Veränderung der Veränderung des Ortes, das ist die Beschleunigung:

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = -g = -10 \text{ m/s}^2 .$$

Da diese negativ ist, handelt es sich um ein Maximum. Einsetzen dieser Zeit in (18) liefert für die maximale Flughöhe

$$\begin{aligned} s(t_\mathrm{m}) &= -\tfrac{1}{2}gt_\mathrm{m}^2 + vt_\mathrm{m} + s_0 = -\tfrac{1}{2} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot (1 \text{ s})^2 + 10 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} + 50 \text{ m} \\ &= -5 \text{ m} + 10 \text{ m} + 50 \text{ m} = 55 \text{ m} . \end{aligned}$$

Der Stein erreicht seine maximale Flughöhe von 55 m über dem Boden (bzw. 5 m über der Abwurfstelle) damit 1 Sekunde nach dem Abwurf.

§ **283** Eine Anmerkung zur Notation: wir haben bereits in § 161 gesehen, dass die abhängigen und unabhängigen Variablen in einer einen physikalischen Sachverhalt beschreibenden Funktion sehr unterschiedliche Formelzeichen haben können. Daher ist es häufig sinnvoll, die unabhängige Variable als Argument der Funktion in Klammern mit anzugeben, z.B. $i(u)$ oder $s(t)$. Beziehen wir uns nur auf die Funktion $s = vt$, so können wir für eine feste Geschwindigkeit $v$ die Funktion $s(t)$ meinen, wir können aber auch die Zeit $t$ konstant halten und betrachten, wie sich der Ort nach dieser Zeit in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit verändert hat, d.h. wir betrachten eine Funktion $s(v)$. Welche Bedeutung hat dann die Anweisung: Leiten Sie die Funktion $s = vt$ ab, d.h. bilden Sie $s'$? Die Anweisung ist nicht eindeutig, da wir aus der Funktionsgleichung $s = vt$ nicht entnehmen können, welches die unabhängige Variable ist. Eindeutig ist dagegen die folgende Anweisung: leiten sie die Funktion $s = vt$ nach der Zeit $t$ ab, d.h. bilden Sie den Ausdruck $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$. Daher sollten Sie sich

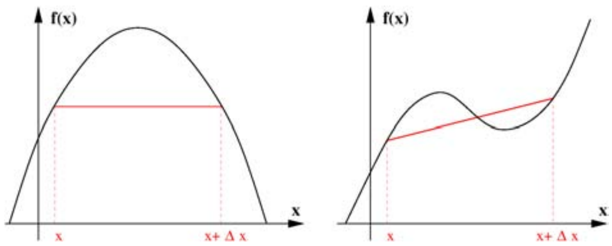



Abbildung 28: Differenzenquotient und mittlere Steigung: die Detailinformationen über den Kurvenverlauf gehen beim Differenzenquotienten verloren, vgl. § 286.

daran gewöhnen, die Ableitung im Zweifelsfall über den Differentialkoeffizienten eindeutig zu kennzeichnen. Häufig hilft es auch, in der Definition der Funktion die unabhängige Variable eindeutig zu identifizieren, z.B. $s(t) = vt$. dann ist eindeutig, was mit dem Ausdruck $s'(t)$ gemeint ist.

### 4.2.2 Die formale Grundlage: Differenzen- und Differentialquotient

**Definition**: Die Ableitung $f'$ einer Funktion $f(x)$ ist bestimmt durch den Differentialquotienten $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$, der sich als der Grenzwert eines Differenzquotienten $(f(x+\Delta x) - f(x))/\Delta x$ ergibt im Grenzübergang $\Delta x \to 0$. Oder in kompakter Schreibweise:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

§ **284** Zum Verständnis dieser allgemeinen Definition betrachten wir einige Begriffe und entwickeln daraus nochmals die Definition. Der Differenzenquotient ist definiert als der Quotient aus der Differenz der Funktionswerte und der Differenz der Argumente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Anschauliche gibt der Differenzenquotienten die mittlere Steigung des Funktionsgraphen im Intervall $[x_1, x_2]$ bzw. $[x, x+\Delta x]$. Mit Hilfe eines Differenzenquotienten wird also immer ein endlicher Abschnitt, eben dieses Intervall, einer Funktion betrachtet.

§ **285** Betrachten wir ein Beispiel für einen Differenzenquotienten. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 1$. Gesucht ist die mittlere Steigung im Intervall zwischen $x$ und $\Delta x$. Dazu wird der Differenzenquotient gebildet:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2(x+\Delta x)^3 + 4(x+\Delta x)^2 - 1 - (2x^3 + 4x^2 - 1)}{\Delta x} \\
&= \frac{2(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3)}{\Delta x} \\
&\quad + \frac{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 1 - 2x^3 - 4x^2 + 1}{\Delta x} \\
&= \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x^2) + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} + \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 2x^3 - 4x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{6x^2\Delta x + 8x\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} \\
&= 6x^2 + 8x + 6x\Delta x + 4\Delta x + 2(\Delta x)^2 .
\end{aligned} \tag{19}$$

§ **286** Der Differentialquotient liefert eine mittlere Steigung. Alle Informationen über Details des Kurvenverlaufs innerhalb dieses Intervalls gehen verloren. So entsteht im linken Teil von Abb. 28 auf Grund der verschwindenden mittleren Steigung (rote Gerade) der Eindruck, die Funktion müsse im Intervall $[x, x+\Delta x]$ konstant sein, im rechten Teil würde man aus der mittleren Steigung nur auf eine monoton wachsende Funktion im Intervall $[x, x+\Delta x]$ schließen, nicht jedoch das lokale Minimum und Maximum vermuten.

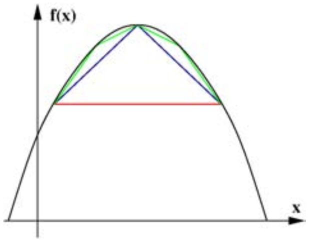



Abbildung 29: Die Verkleinerung der Schrittweite $\Delta x$ im Differenzenquotienten erlaubt eine bessere Annäherung an die Funktion

§ **287** Der Informaionsverlust bezüglich der Details des Kurvenverlaufs lässt sich durch die Wahl kleinerer Differenzen verringern. In Abb. 29 ist für die im linken Teil von Abb. 28 gezeigte Funktion das Ausgangsintervall jeweils halbiert, wodurch sich statt des einen Differenzenquotienten (rote Linie) über das Gesamtintervall zwei Differenzenquotienten (blaue Linie) für die entsprechenden Intervallhälften bzw. vier Differenzenquotienten (grüne Linie) für die entsprechenden Intervallviertel ergeben. Je kleiner die Differenz der aufeinander folgenden Argumente wird, um so besser wird die Annäherung des Funktionsverlaufes durch die mittlere Steigung. Den exakten Funktionsverlauf würden wir erhalten, wenn die Differenz der Argumente verschwindend klein wird, d.h. im Übergang von der Differenz bzw. dem Differenzenquotienten zum Differential bzw. Differentialquotienten.

§ **288** Definieren wir diese Begriffe etwas genauer: ein Differential ist eine Differenz, bei der der Abstand der beiden Argumente gegen Null geht:

$$\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} ((x + \Delta x) - x) = \lim_{\Delta x \to 0} (x_2 - x_1) .$$

bzw. für die Funktionswerte

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = f'(x)\,\mathrm{d}x . \tag{20}$$

Das Differential der Funktionswerte beschreibt also wie sich der Funktionswert verändert, wenn man ein infinitesimal kleines Stückchen d$x$ im Argument fortschreitet. Diese Änderung ist, wie im letzten Term von (20) bereits angedeutet, durch die lokale Steigung $f'(x)$ bestimmt.

§ **289** Der die lokale Steigung beschreibende Differentialquotient geht aus dem Differenzenquotienten dadurch hervor, dass man $\Delta x$ gegen Null gehen lässt:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Der Differentialquotient bestimmt, wie sich Funktionswerte entwickeln, wenn man vom Argument $x$ um ein Stückchen d$x$ weitergeht.

§ **290** Der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten liefert uns die Ableitung der Funktion. Mit dem Beispiel aus § 285 erhalten wir aus (19) für die Ableitung der Funktion $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 1$:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 6x^2 + 8x .$$

§ **291** Da die Ableitung über den Differentialquotienten definiert ist,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} ,$$

ergibt sich für das Differential wie in (20):

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x .$$

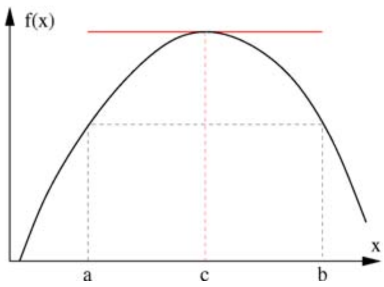



Abbildung 30: Satz von Rolle: eine differenzierbare Funktion $f(x)$ nimmt an den Stellen $a$ und $b$ den gleichen Funktionswert an: $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$

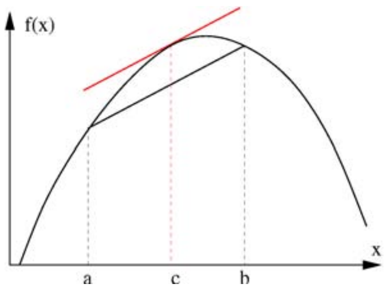



Abbildung 31: Mittelwertsatz: eine Funktion $f(x)$ ist im Intervall $[a, b]$ differenzierbar. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ derart, dass die Steigung $f'(c)$ (rote Kurve) gleich der Sekantensteigung zwischen $a$ und $b$ (schwarze Kurve) ist

### 4.2.3 Satz von Rolle

**Satz von Rolle**: Ist eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall $[a, b]$ differenzierbar und ist $f(a) = f(b)$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.

§ **292** Anschaulich besagt der Satz von Rolle, dass bei einer stetigen Funktion zwischen zwei Stellen mit gleichem Funktionswert (z.B. zwei Nullstellen) stets ein Extremum liegen muss, vgl. Abb. 30. Oder einfacher: lassen sich zwei Punkte einer stetigen Funktion mit einer waagerechten Linie verbinden, so muss es zwischen diesen beiden Punkten mindestens einen Punkt geben, an dem der Funktionsgraph eine waagerechte Tangente hat, d.h. in dem die Tangente parallel zur Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten ist.

§ **293** Physikalisch können wir uns diesen Satz an Hand einer einfachen Bewegung veranschaulichen. Ein Stein wird im Gravitationsfeld der Erde nach oben geworfen, seine Bewegung ist durch die Funktion $s(t)$ beschrieben. Zur Zeit kommt $t_1$ kommt er, immer noch steigend, auf der Höhe $s(t_1) = s_1$ vorbei; zur Zeit $t_3$ kommt er, in Richtung Erde fallend, nochmals an dieser Höhe vorbei: $s(t_3) = s(t_1) = s_1$. Da die Flugbahn eines Steins stetig ist, muss sie irgendwo zwischen diesen beiden Zeitpunkten ihr Maximum erreicht haben, d.h. es gibt ein $t_2$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ derart, dass $s(t_2)$ ein Maximum (oder allgemeiner Extremwert) der Funktion ist. In einem Extremum gilt aber $\dot{s} = 0$, d.h. es muss gelten $\dot{s}(t_2) = 0$. Das ist genau die Aussage des Satzes von Rolle. Wir können die waagerechte Tangente am Extremum in diesem Fall sogar anschaulich erläutern: der aufwärts fliegende Stein wird verzögert bis seine Geschwindigkeit im Scheitelpunkt seiner Flugbahn verschwindet, d.h. $\dot{s}(t_2) = 0$. Anschließend fällt er abwärts.

### 4.2.4 Mittelwertsatz

§ **294** Eine Verallgemeinerung des Satzes von Rolle ist der Mittelwertsatz:

**Mittelwertsatz**: I Ist eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall $[a, b]$ differenzierbar, so gibt es einen Wert $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

§ **295** Der Mittelwertsatz besagt, dass die Sekantensteigung in einem Intervall an mindestens einem Punkt innerhalb des Intervall mit der Tangentensteigung identisch ist, vgl. Abb. 31. Da die Funktion differenzierbar ist, muss sie alle Argumente zwischen $a$ und $b$ annehmen. Dabei ändert sich die Richtung der Tangente von einem Punkt zum nächsten und wird in einem Punkt parallel zur Sekante zwischen $a$ und $b$ sein. Der Satz von Rolle ist der Spezialfall des Mittelwertsatzes für $f(a) = f(b)$.

§ **296** Auch der Mittelwertsatz lässt sich an einem einfachen physikalischen Beispiel illustrieren. Betrachten wir wieder eine Bewegung. Die Sekantensteigung gibt die mittlere Geschwindigkeit. Der Mittelwertsatz besagt, dass diese irgendwo im Intervall angenommen wird. Die Aussage ist trivial im Falle konstanter Geschwindigkeit. Ist die Geschwindigkeit nicht konstant, so ist sie am Anfang des Intervalls größer/kleiner als die mittlere Geschwindigkeit, am Intervallende dagegen kleiner/größer. Dann muss der Körper von $v_{\mathrm{Anf}}$ auf $v_{\mathrm{End}}$ beschleunigt werden. Da dieser Vorgang stetig (ohne Sprünge) erfolgt, nimmt er dabei irgendwann die zwischen $v_{\mathrm{Anf}}$ und $v_{\mathrm{End}}$ liegende mittlere Geschwindigkeit an.

### 4.2.5 Rechentraining

§ **297** Die Aufgaben in diesem Abschnitt dienen der Übung. Wie viele Sie davon bearbeiten, steht Ihnen frei. Im Gegensatz zum Selbst- und Abschlusstest geben Sie die Lösungen hier nicht zur Online-Überprüfung ein. Durch Anklicken der Schaltfläche `Musterlösung` erhalten Sie eine Musterlösung mit vollständigem Lösungsweg.

**Aufgabe 109** Bestimmen sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 5$ mit Hilfe des Differenzenquotienten. Musterlösung in § 550

**Aufgabe 110** Bestimmen sie die Ableitung der Funktion $f(x) = (x^2 + 2)/x$ mit Hilfe des Differenzenquotienten. Musterlösung in § 551

## 4.3 Elementare Ableitungen

§ **298** Effizientes Differenzieren setzt zwei Fertigkeiten voraus: (a) die Kenntnis der Ableitungen einiger wichtiger Funktionen (Potenzen, Exponentialfunktion, Logarithmus, Sinus und Kosinus), sowie (b) die Kenntnis von Grundregeln (Summenregel, Produktregel, Kettenregel), die es erlaubt, die Ableitung einer komplizierteren Funktion so zu zerlegen, dass sie mit Hilfe der 'Grundableitungen' bestimmt werden kann.

§ **299** Im Beispiel in § 279ff haben wir bereits einmal abgeleitet, und zwar einen Ausdruck, der aus eine Summe von Potenzen bestand. Das Repertoire an grundlegenden Funktionen in der Physik ist relativ begrenzt (vgl. Lernfeld 3), daher ist auch die Zahl der Ableitungsregeln, die es sich zu merken gilt, eingeschränkt:

1. Potenzen: eine Potenz wird abgeleitet, in dem man den Exponenten um Eins erniedrigt und als Vorfaktor vor die Potenz schreibt:

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n \cdot x^{n-1} \qquad \text{mit} \qquad n \in \mathbb{R}\,.$$

   Eine Konstante $c$ kann geschrieben werden als $cx^0$, da $x^0 = 1$. Anwenden dieser Ableitungsregel liefert

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} c = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cx^0) = 0 \cdot cx^{-1} = 0\,,$$

   d.h. eine Konstante fällt beim Ableiten weg. Dies ist eine formale Argumentation. Sie können auch anschaulich argumentieren: eine Konstante liefert eine waagerechte Gerade. Und deren Steigung ist Null, also muss auch die Ableitung verschwinden.

2. die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus werden beim Ableiten ineinander überführt, allerdings muss bei der Ableitung des Kosinus ein Minus berücksichtigt werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x) \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x)\ .$$

3. die Ableitung des Tangens kann man sich merken oder mit Hilfe der Produktregel aus denen für Sinus und Kosinus herleiten (letzteres werden wir in § 311 tun):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\ .$$

4. die Ableitung der Exponentialfunktion ist wieder die Exponentialfunktion:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\ ,$$

bei einem Vorfaktor im Exponenten steht dieser auf Grund der inneren Ableitung als Vorfaktor vor der Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\alpha x} = \alpha\mathrm{e}^{\alpha x}\ .$$

Die Ableitung einer Exponentialfunktion mit einer anderen Basis $a > 0$ als e ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = a^x\ \ln(a)\ .$$

Die Begründung mit Hilfe der Ableitungsregel für die Exponentialfunktion zur Basis e unter Berücksichtigung der inneren Ableitung werden wir uns in § 318 klar machen.

5. die Ableitung des natürlichen Logarithmus ist $1/x$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x) = \frac{1}{x}\ .$$

Der Ausdruck $1/x = x^{-1}$ ist die einzige Potenz, die sich nicht mit Hilfe der Ableitungsregel (1) für Potenzen erzeugen lässt!

§ **300** Höhere Ableitungen ergeben sich durch wiederholte Anwendung dieser Grundableitungen.

§ **301** Die Kenntnis der Ableitungen dieser elementaren Funktionen ist schon fast ausreichend für das Differenzieren in der Physik. Das Problem liegt jedoch darin, dass wir es häufig nicht mit der Funktion $\sin(x)$ zu tun haben sondern eine Funktion der Form $\sin(ax + b)$ zu differenzieren ist. Dies ist eine Funktion, deren Argument $ax + b$ selbst wieder eine Funktion ist, d.h. die Funktion einer Funktion. Dann müssen wir die Kettenregel anwenden. Außer der Kettenregel gibt es noch einige weitere Grundregeln des Differenzierens. Diese fassen wir hier erst zusammen, anschließend werden wir Beispiele betrachten.

§ **302** Vorher können wir jedoch noch die Lösung zu Aufg. 107 nachreichen. Die Maxima der Funktion $x(t) = (t - 2)^3 - 3t + 2$ sind die Nullstellen der ersten Ableitung dieser Funktion, d.h. wir fordern

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((t-2)^3 - 3t + 2) = 3(t-2)^2 - 3 \stackrel{!}{=} 0\ .$$

Die sich daraus ergebende quadratische Gleichung

$$(t-2)^2 = 1$$

hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ mit den Funktionswerten $x(t_1) = -2$ und $x(t_2) = -6$.

### 4.3.1 Rechentraining

§ **303** Die Aufgaben in diesem Abschnitt dienen der Übung. Wie viele Sie davon bearbeiten, steht Ihnen frei. Im Gegensatz zum Selbst- und Abschlusstest geben Sie die Lösungen hier nicht zur Online-Überprüfung ein. Durch Anklicken der Schaltfläche `Musterlösung` erhalten Sie eine Musterlösung mit vollständigem Lösungsweg, sonst erhalten Sie über die Schaltfläche `Lösung` eine nicht weiter kommentierte Lösung.

**Aufgabe 111** Bestimmen sie die ersten drei Ableitungen der bereits aus Aufg. 109 bekannten Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 5$. Musterlösung in § 552

**Aufgabe 112** Bestimmen sie die ersten fünf Ableitungen der Funktion $f(x) = 12x^7 + 4x^5 + 5x^3 + x^2 - 6$. Musterlösung in § 553

**Aufgabe 113** Bestimmen sie die ersten vier Ableitungen der Funktion $f(x) = 5x^{-2}$. Musterlösung in § 554

**Aufgabe 114** Bestimmen sie die ersten vier Ableitungen der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-5x} + \sin(x) - \cos(x) + \ln(x)$. Musterlösung in § 555

**Aufgabe 115** Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$. Musterlösung in § 556

## 4.4 Ableitungsregeln im Überblick

§ **304** Die Grundregeln des Differenzierens sind:

- die Faktorregel: wir betrachten eine Funktion $f(x)$, die mit einem konstanten Faktor $c$ multipliziert ist. Wenn wir diese Funktion $c\,f(x)$ ableiten, so können wir das $c$ als konstanten Faktor vor die Ableitung ziehen und dann mit der Ableitung von $f(x)$ multiplizieren:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c\,f(x)) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = c\,f'(x)\ .$$
Wir haben diese Regel in § 279 bereits verwendet, als wir (18) abgeleitet haben:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}gt^2\right) = \frac{1}{2}g\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^2 = \frac{1}{2}g\,2t = gt\ .$$
- die Summenregel: lässt sich eine Funktion $f(x)$ als die Summe zweier (oder mehrerer) Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ darstellen, so können die Summanden einzeln abgeleitet und dann addiert werden: ‘die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen’. Formal lässt sich dies schreiben als
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x) + h(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(x) = g'(x) + h'(x)\ .$$
Auch diese Regel haben wir in § 279 bereits verwendet, als wir die Summanden in (18) einzeln abgeleitet haben.
- die Produktregel: lässt sich eine Funktion $f(x)$ als das Produkt zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ darstellen, so gilt für die Ableitung:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x) \cdot h(x)\right) = g(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(x) + h(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) = g(x)h'(x) + g'(x)h(x)\ .$$
- die Quotientenregel ist keine separate Regel sondern nur ein Spezialfall der Produktregel. Wenn Sie sich mit der Quotientenregel recht vertraut fühlen, verwenden Sie sie. Sonst versuchen Sie gar nicht erst, sich diese Regel zu merken sondern wandeln den Quotienten in ein Produkt um
$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot (g(x))^{-1}\ .$$

Auf dieses Produkt kann die Produktregel angewandt werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)\,g(x)^{-1}) = f'(x)g^{-1}(x) - f(x)g^{-2}(x)g'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \ .$$

Der letzte Ausdruck ist die (möglicherweise) bekannte Quotientenregel.

- die Kettenregel: in der Physik hat eine Funktion häufig eine Funktion als Argument. Ein häufig auftretendes Beispiel ist $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$. Dabei kann der Sinus als eine äußere Funktion $g(t)$ aufgefasst werden, das Argument des Sinus als eine innere Funktion $h(t) = \omega t + \varphi$ Die Funktion $f(t)$ lässt sich dann formal schreiben als $f(t) = g(h(t))$. Die Ableitung dieser Funktion erhalten wir, in dem wir erst die Ableitung der äußeren Funktion bilden und anschließend mit der Ableitung der inneren Funktion, kurz als innere Ableitung bezeichnet, multiplizieren:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(h(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} g(h) \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(t) = g'(t)\,h'(t) \ .$$

Angewandt auf unser Beispiel erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega \ .$$

§ **305** Im Rest dieses Abschnitts werden wir schrittweise Beispiele für diese Regeln behandeln. Da die Faktoren- und die Summenregel trivial sind, benötigen wir hier keine weiteren Beispiele als § 279. Für die Quotientenregel werden wir ebenfalls kein Beispiel bearbeiten, allerdings wird in § 311 ein Quotient als Produkt dargestellt und abgeleitet.

## 4.5 Produktregel

§ **306** Die Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \cdot g(x) + f(x) \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \qquad \text{oder kurz} \qquad (fg)' = f'g + g'f$$

kann man sich einfach und systematisch klar machen. Wichtig ist, bei allen Funktionen darauf zu achten, ob auch die inneren Ableitungen berücksichtigt werden müssen. Dann ist eine Kombination aus Produkt- und Kettenregel erforderlich. Derartige Beispiele werden wir weiter unten betrachten.

§ **307** Die Funktion

$$f(x) = x^3 \cdot \sin(x)$$

lässt sich zerlegen in zwei Funktionen $g(x) = x^3$ und $h(x) = \sin(x)$:

$$f(x) = x^3 \cdot \sin(x) = g(x) \cdot h(x) \qquad \text{mit} \qquad g(x) = x^3 \quad \text{und} \quad h(x) = \sin(x) \ .$$

Für beide Funktionen können wir die Ableitungen bilden:

$$g(x) = x^3 \qquad \Rightarrow \qquad g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^3 = 3x^2$$

und

$$h(x) = \sin(x) \qquad \Rightarrow \qquad h'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} h(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x) = \cos(x) \ .$$

Einsetzen in die Produktregel liefert für die Ableitung von $f(x)$:

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x) \ .$$

§ **308** Da der Ausdruck eine Summe aus zwei Produkten ist, können wir daran die Kombination aus Produkt- und Summenregel üben, indem wir die zweite Ableitung bilden. Dazu gehen wir sehr systematisch vor und zerlegen $f'(x)$ in die daran beteiligten vier Funktionen:

$$f'(x) = f_1(x)f_2(x) + f_3(x)f_4(x) \ . \tag{21}$$

Die Funktionen und ihre Ableitungen sind

$$\begin{array}{lcl} f_1(x) = 3x^2 & \Rightarrow & f_1'(x) = 6x \\ f_2(x) = \sin(x) & \Rightarrow & f_2'(x) = \cos(x) \\ f_3(x) = x^3 & \Rightarrow & f_3'(x) = 3x^2 \\ f_4(x) = \cos(x) & \Rightarrow & f_4'(x) = -\sin(x) \,. \end{array}$$

Wenden wir auf die einzelnen Produkte in (21) die Produktregel an, so erhalten wir für die Ableitung von $f'(x)$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'(x) = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x) + f_3'(x) f_4(x) + f_3(x) f_4'(x)$$

und nach Einsetzen der bereits bestimmten Ableitungen

$$\begin{array}{rcl} f''(x) & = & 6x \sin(x) + 3x^2 \cos(x) + 3x^2 \cos(x) + x^3(-\sin(x)) \\ & = & (6x - x^3) \sin(x) + 6x^2 \cos(x) \,. \end{array}$$

Einige der Funktionen $f_1$ bis $f_4$ haben wir bereits, wenn auch unter anderem Namen, bei der ersten Ableitung betrachtet. Daher ist das obige Verfahren für die zweite Ableitung zwar sicher gewesen (keine Verwechslungsmöglichkeiten), aber auch aufwendig.

§ **309** Eine Alternative besteht darin, die bei der Zerlegung von $f(x)$ eingeführten Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ durchgängig zu verwenden. Dann ergibt sich aus

$$f(x) = g(x)\, h(x)$$

die erste Ableitung

$$f'(x) = g(x) h'(x) + g'(x) h(x)$$

und damit nach korrekter Ableitung der entsprechenden Produkte für die zweite Ableitung

$$\begin{array}{rcl} f''(x) & = & g(x) h''(x) + g'(x) h'(x) + g'(x) h'(x) + g''(x) h(x) \\ & = & g(x) h''(x) + 2g'(x) h'(x) + g''(x) h(x) \,. \end{array}$$

Die beiden Funktionen und ihre Ableitungen sind

$$\begin{array}{lclcl} g(x) = x^3 & \Rightarrow & g'(x) = 3x^2 & \Rightarrow & g''(x) = 6x \\ h(x) = \sin(x) & \Rightarrow & h'(x) = \cos(x) & \Rightarrow & h''(x) = -\sin(x) \,. \end{array}$$

und damit nach Einsetzen

$$\begin{array}{rcl} f''(x) & = & x^3(-\sin(x)) + 2 \cdot 3x^2 \cos(x) + 6x \sin(x) \\ & = & (6x - x^3) \sin(x) + 6x^2 \cos(x) \,. \end{array}$$

Das ist das bereits in § 308 gefundene Ergebnis.

§ **310** Ein sehr ähnliches Beispiel gibt die Funktion

$$f(t) = \mathrm{e}^t \cos(t) \,.$$

Die Zerlegung $f(t) = g(t) h(t)$ liefert für die beiden Funktionen und ihre Ableitungen

$$\begin{array}{lcl} g(t) = \mathrm{e}^t & \Rightarrow & g'(t) = \mathrm{e}^t \quad \text{und} \\ h(t) = \cos(t) & \Rightarrow & h'(t) = -\sin(t) \,. \end{array}$$

Damit gilt für die erste Ableitung

$$f'(t) = g(t) h'(t) + g'(t) h(t) = \mathrm{e}^t\,(-\sin(t)) + \mathrm{e}^t \cos(t) = \mathrm{e}^t(\cos(t) - \sin(t)) \,.$$

Dieser Ausdruck ist ein Produkt aus einer Funktion und der Summe zweier Funktionen. Um die zweite Ableitung zu bilden, wenden wir die Produktregel an. Die beiden Teilfunktionen und ihre Ableitungen sind

$$\begin{array}{lcl} f_1(t) = \mathrm{e}^t & \Rightarrow & f_1'(t) = \mathrm{e}^t \qquad \text{und} \\ f_2(t) = \cos(t) - \sin(t) & \Rightarrow & f_2'(t) = -\sin(t) - \cos(t) = -(\sin(t) + \cos(t)) \,. \end{array}$$

Einsetzen liefert als zweite Ableitung

$$\begin{array}{rcl} f''(t) & = & f_1(t) f_2'(t) + f_1'(t) f_2(t) = -\mathrm{e}^t(\sin(t) + \cos(t)) + \mathrm{e}^t(\cos(t) - \sin(t)) \\ & = & -2\mathrm{e}^t \sin(t) \,. \end{array}$$

§ **311** Im Zusammenhang mit den Ableitungen elementarer Funktionen haben wir bereits die Ableitung des Tangens vorgegeben. Hier wollen wir sie uns aus den Ableitungen der anderen elementaren Winkelfunktionen herleiten. Dazu benötigen wir eine Kombination aus Produkt- und Kettenregel. Gemäß Definition des Tangens ist dieser der Quotient aus Sinus und Kosinus:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x)\,\cos^{-1}(x)\ .$$

Um den Ausdruck abzuleiten, benötigen wir die Produktregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x)\,\cos^{-1}(x) = \sin(x)\,(-1)\cos^{-2}(x)\,(-1)\sin(x) + \cos(x)\,\cos^{-1}(x)\ .$$

Dabei ist die Ableitung von $\cos^{-1}(x)$ etwas trickreich, da es sich bei diesem Ausdruck um eine Potenz einer Winkelfunktion handelt. Die äußere Ableitung gibt daher $-\cos^{-2}(x)$, die innere Ableitung bringt ein $-\sin(x)$. Räumen wir die obige Ableitung etwas auf, so erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1 = \tan^2(x) + 1\ .$$

Alternativ können wir im vorletzten Schritt auch den $\sin^2(x)$ ersetzen durch $1-\cos^2(x)$ und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}\ .$$

Beide Ableitungen sind selbstverständlich identisch, es handelt sich nur um unterschiedliche Darstellungsformen.

### 4.5.1 Rechentraining

§ **312** Die Aufgaben in diesem Abschnitt dienen der Übung. Wie viele Sie davon bearbeiten, steht Ihnen frei. Durch Anklicken der Schaltfläche `Hilfe` erhalten Sie einen Hinweis zur Lösung der entsprechenden Aufgabe – gehen Sie sparsam mit dieser Möglichkeit um! Über die Schaltfläche `Musterlösung` erhalten Sie bei einigen der Aufgaben eine Musterlösung mit vollständigem Lösungsweg, sonst erhalten Sie über die Schaltfläche `Lösung` eine nicht weiter kommentierte Lösung.

**Aufgabe 116** Leiten sie die Funktion $f(x) = x^2\,\cos(x)$ ab. Musterlösung in § 557

**Aufgabe 117** Leiten sie die Funktion $f(x) = \tan(x)\,\mathrm{e}^x$ ab. Lösung in § 558

**Aufgabe 118** Leiten Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}\,\sin(x)$ ab. Lösung in § 559

**Aufgabe 119** Leiten Sie die folgende Funktion ab:

$$f(x) = \frac{x+\sin(x)}{x-\cos(x)}\ .$$

Lösung in § 560

## 4.6 Kettenregel

§ **313** Die Kettenregel wird angewendet, wenn die Funktion einer Funktion abzuleiten ist, d.h. die Funktion lässt sich in eine äußere und eine innere Funktion zerlegen.

§ **314** Die Funktion

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x + 9}$$

lässt sich zerlegen in eine äußere Funktion $f(u) = \sqrt{u}$ und eine innere Funktion $u(x) = 2x^2 + 4x + 9$. Die Ableitung dieser Funktion

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x + 9} = \sqrt{u} \qquad \text{mit} \qquad u(x) = 2x^2 + 4x + 9$$

erhalten wir, in dem wir erst die Ableitung der äußeren Funktion nach der inneren Funktion $u$ bilden und anschließend mit der inneren Ableitung multiplizieren:

$$f'(x) = f(u(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} f(u) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (2x^2 + 4x + 9) \; .$$

Für die einzelnen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{array}{lll} f(u) = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} & \Rightarrow & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} f(u) = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \\ u(x) = 2x^2 + 4x + 9 & \Rightarrow & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x^2 + 4x + 9) = 4x + 4 \; . \end{array}$$

Einsetzen in die Kettenregel liefert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sqrt{2x^2 + 4x + 9} = \frac{1}{2(2x^2 + 4x + 9)^{\frac{1}{2}}} \, (4x + 4) = \frac{2x + 2}{\sqrt{2x^2 + 4x + 9}} \; .$$

§ **315** Innere Funktionen sind manchmal so einfach, dass sie übersehen werden. Die Ableitung von $\mathrm{e}^x$ ist wieder $\mathrm{e}^x$, da die Exponentialfunktion abgeleitet stets wieder die Exponentialfunktion ergibt. Die Ableitung der Funktion

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

ergibt auch wieder eine Exponentialfunktion. Jedoch ist in diesem Fall der Exponent selbst eine Funktion $u(t) = -t$ und die Exponentialfunktion ist eine äußere Funktion $\mathrm{e}^u$. Die Ableitung der äußeren Funktion ergibt wieder $\mathrm{e}^u$, die der inneren bringt zusätzlich einen Faktor $u'(t) = -1$, so dass wir als Endergebnis erhalten

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-t} = -\mathrm{e}^{-t} \; .$$

§ **316** Da die innere Funktion wie in obigem Beispiel manchmal eher unauffällig daher kommt, ist es im Zweifelsfall sicherer, von der Existenz einer inneren Funktion auszugehen: Sie machen einen Fehler, wenn Sie eine innere Funktion nicht als solche erkennen und daher auch nicht berücksichtigen. Sie machen jedoch keinen Fehler, wenn Sie eine innere Funktion an einer Stelle annehmen, an der es nicht nötig tut. Betrachten Sie dazu nochmals die Ableitung von $\mathrm{e}^x$. Nehmen wir an, es würde sich um eine Exponentialfunktion mit innerer Funktion handeln, d.h. um $\mathrm{e}^u$ mit $u = x$. Als Ableitung der äußeren Funktion bleibt $\mathrm{e}^u$, die Ableitung der inneren Funktion ergibt $u' = 1$, d.h. wir machen keinen Fehler, wenn wir diese innere Ableitung an die äußere heran multiplizieren.

§ **317** Daraus können Sie auch eine Regel herleiten, nach der Sie auf die Existenz einer inneren Funktion überprüfen können. Nehmen Sie an, dass die Funktion eine innere Funktion enthält. Identifizieren Sie diese und leiten Sie sie ab. Wenn die Ableitung von Eins verschieden ist, hat die Funktion in der Tat eine innere Funktion und sie hätten die Ableitung für die Anwendung der Kettenregel ohnehin bestimmen müssen. Ist die Ableitung dagegen Eins, so sind sie sich zumindest sicher, dass es ausreichend ist, die äußere Funktion abzuleiten.

§ **318** Als Beispiel für die Anwendung der Kettenregel betrachten wir die Regel für die Ableitung einer Exponentialfunktion mit beliebiger Basis $a$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x \, \ln(a) \; .$$

Dazu führen wir die Exponentialfunktion zur Basis $a$ wie in § 214 dargestellt auf eine Exponentialfunktion zur Basis e zurück und differenzieren diese:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( \mathrm{e}^{x \, \ln(a)} \right) \qquad \text{Substitution} : u = x \, \ln(a) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \, \mathrm{e}^u \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \, (x \, \ln(a)) \\ &= \mathrm{e}^u \, \ln(a) = \mathrm{e}^x \, \ln(a) \, \ln(a) = a^x \, \ln(a) \; . \end{aligned}$$

§ **319** Ein in der Physik häufig auftretender Ausdruck ist ein Produkt aus einer Winkelfunktion und einer abfallenden Exponentialfunktion, z.B.

$$A(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) .$$

Die einzelnen Faktoren dieses Produkts haben wir schon betrachtet, d.h. Sie lernen in diesem Beispiel eigentlich nichts Neues sondern müssen nur aufpassen, die Übersicht nicht zu verlieren. Die Ausgangsfunktion wird wieder dargestellt als ein Produkt aus zwei Funktionen. Diese sind, zusammen mit ihren Ableitungen (jeweils Kettenregel beachten!):

$$\begin{array}{lll} g(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} & \Rightarrow & g'(t) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{und} \\ h(t) = \cos(\omega t + \varphi) & \Rightarrow & h'(t) = -\omega \sin(\omega t + \varphi) . \end{array}$$

Zusammensetzen liefert als erste Ableitung

$$\begin{aligned} A'(t) &= g(t)h'(t) + g'(t)h(t) = -\mathrm{e}^{-\lambda t}\omega \sin(\omega t + \varphi) - \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda t}(\omega \sin(\omega t + \varphi) + \lambda \cos(\omega t + \varphi)) . \end{aligned}$$

§ **320** Auch in den meisten Aufgaben im Selbsttest war die Kettenregel zu berücksichtigen. Die Ableitung der Funktion $f(x) = 5x \cos^2(x)$ aus Aufgabe 105 erfordert die gleichzeitige Anwendung von Produkt- und Kettenregel, da der zweite Faktor des Produkts die Funktion (Quadrat) einer anderen Funktion (Kosinus) ist. Systematisches zerlegen liefert $g(x) = 5x$ mit der Ableitung $g'(x) = 5$ und $h(x) = h(u(x)) = u^2$ mit $u = \cos(x)$ und der Ableitung $h'(x) = 2u\,u' = -2\cos(x) \sin(x)$. Damit ergibt sich die Ableitung der Funktion zu

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x \cos^2(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [g(x)\, h(u(x))] = g'(x)\, h(u(x)) + g(x)\, h'(u(x)) \\ &= g'(x)\, h(u(x)) + g(x) \frac{\mathrm{d}h(u)}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\ &= 5 \cos(x) - 10x \cos(x) \sin(x) . \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ergibt sich durch nochmalige Anwendung der Produktregel – eine Kettenregel ist beider zweiten Ableitung nicht mehr erforderlich. Allerdings müssen wir die Produktregel beim zweiten Term sorgfältig anwenden, da dieser aus drei von der unabhängigen Variablen $x$ abhängigen Termen besteht. Dazu zerlegen wir $x \cos(x) \sin(x)$ z.B. in ein Produkt der Funktionen $g(x) = x$ mit der Ableitung $g'(x) = 1$ und $h(x) = \cos(x) \sin(x)$. Für letztere Funktion bestimmen wir die Ableitung wieder mit Hilfe der Produktregel zu $h'(x) = -\sin(x) \sin(x) + \cos(x) \cos(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. Zusammengesetzt erhalten wir für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(5x \cos^2(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [5 \cos(x) - 10x \cos(x) \sin(x)] \\ &= -5\sin(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [g(x)\, h(x)] \\ &= -5\sin(x) + g'(x)\, h(x) + g(x)\, h'(x) \\ &= -5\sin(x) + g'(x)\, h(x) + g(x)\, [i(x)\, j(x)]' \\ &= -5\sin(x) + g'(x)\, h(x) + g(x)\, [i'(x)\, j(x) + i(x)\, j'(x)] \\ &= -5\sin(x) - 10 \left(\cos(x) \sin(x) + x(\cos^2(x) - \sin^2(x))\right) . \end{aligned}$$

§ **321** Bei der Funktion $f(x) = \cos(kx)\, \mathrm{e}^{-kx}$ aus Aufgabe 106 ist die Kettenregel in beiden Faktoren zu berücksichtigen: $g(x) = g(u(x)) = \cos(u)$ mit $u = kx$, $u' = k$ und der Ableitung $g'(x) = -u' \sin(u) = -k \sin(kx)$ sowie $h(x) = h(v(x)) = \mathrm{e}^v$ mit $v = -kx$, $v' = -k$ und der Ableitung $h'(x) = v'\, \mathrm{e}^v = -k\, \mathrm{e}^{-kx}$. Anwendung der Produktregel liefert

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(kx)\, \mathrm{e}^{-kx}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} [g(u(x))\, h(v(x))] \\ &= g'(u(x))\, h(v(x)) + g(u(x))\, h'(v(x)) \\ &= \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} h(v(x)) + g(u(x)) \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}v} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \\ &= -k \sin(kx)\, \mathrm{e}^{-kx} - k \cos(kx)\mathrm{e}^{-kx} = -k\mathrm{e}^{-kx} (\sin(kx) + \cos(kx)) . \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung lässt sich entsprechend bestimmen zu

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\cos(kx)\,\mathrm{e}^{-kx}) = k^2\mathrm{e}^{-kx}(\sin(kx)+\cos(kx)) - k^2\mathrm{e}^{-kx}(\cos(kx)-\sin(kx)) \,.$$

§ **322** Die Funktion $x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi)$ aus Aufgabe 108 ist nur eine physikalische Formulierung für den gleichen mathematischen Sachverhalt. Die Geschwindigkeit des Federpendels erhalten wir als Ableitung des Ortes nach der Zeit zu

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\gamma\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi) - \omega\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t+\varphi)\,,$$

die Beschleunigung ergibt sich durch nochmaliges Ableiten zu

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} \\ &= \gamma^2\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi) + \gamma\omega\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t+\varphi) \\ &\quad +\gamma\omega\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t+\varphi) - \omega^2\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi) \\ &= (\gamma^2-\omega^2)\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t+\varphi) + 2\gamma\omega\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t+\varphi)\,. \end{aligned}$$

### 4.6.1 Rechentraining

§ **323** Die Aufgaben in diesem Abschnitt dienen der Übung. Wie viele Sie davon bearbeiten, steht Ihnen frei. Im Gegensatz zum Selbst- und Abschlusstest geben Sie die Lösungen hier nicht zur Online-Überprüfung ein. Durch Anklicken der Schaltfläche `Lösung` erhalten Sie eine nicht weiter kommentierte Lösung.

**Aufgabe 120** Leiten Sie die folgende Funktion ab:

$$f(u) = \frac{u}{\sin u + \cos u}\,.$$

Lösung in § 561

**Aufgabe 121** Leiten Sie die folgende Funktion ab:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sin(\omega t+\varphi)}\,.$$

Lösung in § 562

**Aufgabe 122** Leiten Sie die folgende Funktion ab:

$$f(x) = \ln\sqrt[4]{\sin^3(x)\,\cos^3(x)}\,.$$

Lösung in § 563

**Aufgabe 123** Leiten Sie die folgende Funktion ab:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}\,.$$

Lösung in § 564

## 4.7 Abschlusstest

§ **324** Die Aufgaben in diesem Abschnitt sind gleichsam die Prüfungsaufgaben. Sie müssen mindestens 4 der ersten 6 Aufgaben korrekt beantwortet haben, um in das nächste Lernfeld zu gelangen. Die Aufgaben 124–126 sind einfache Standardaufgaben; Aufgaben 127–129 haben einen etwas erhöhten Schwierigkeitsgrad. Aufgaben 130–132 sind etwas komplexere Aufgaben, die sich nicht mehr sinnvoll elektronisch abprüfen lassen sondern die Einsendung einer schriftlichen Lösung zur Korrektur erfordern.

**Aufgabe 124** Leiten Sie die folgende Funktion ab

$$f(x) = \left(3x^3 + 4x^2 + 2x + 12\right) \cdot \sin(-3x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\Box x^3 + \Box x^2 + \Box x + \Box\right) \cdot (\Box \sin(\Box x) + \Box \cos(\Box x)) \\ &+ \left(\Box x^3 + \Box x^2 + \Box x + \Box\right) \cdot (\Box \sin(\Box x) + \Box \cos(\Box x)) \end{aligned}$$

**Aufgabe 125** Leiten Sie die folgende Funktion zweimal ab

$$g(x) = 5x \ln(2x)$$

$$g''(x) = \Box x^{\Box} + \Box x^{\Box} \ln(x) + \Box \ln(x)$$

**Aufgabe 126** Leiten Sie die folgende Funktion ab

$$h(x) = 5 \sin^2(x)$$

$$h'(x) = \Box \sin^{\Box}(x) + \Box \sin^{\Box}(x) \cos^{\Box}(x) + \Box cos^{\Box}(x)$$

**Aufgabe 127** Leiten Sie die folgende Funktion ab

$$i(x) = \ln(x^2 + x) \cdot \sin(cos(x))$$

und kreuzen Sie die richtige Lösung an:

- $\Box$ $\dfrac{2x+1}{x^2+x} \sin(\cos(x)) - \ln(x^2+x) \cos(\cos(x)) \cos(x)$ ,
- $\Box$ $\dfrac{x^2+x}{2x+1} \cos(\sin(x)) - \dfrac{\cos(\cos(x)) \sin(x)}{x^2+x}$ ,
- $\Box$ $\ln(2x+1)(x^2+x) \sin(\cos(x)) - \ln(x^2+x) \sin(\cos(x)) \sin(x)$ ,
- $\Box$ $\dfrac{2x+1}{x^2+x} \sin(\cos(x)) - \ln(x^2+x) \cos(\cos(x)) \sin(x)$ ,
- $\Box$ $\ln(2x+1)(x^2+x) \sin(\cos(x)) - \ln(x^2+x) \cos(\cos(x)) \sin(x)$ .

**Aufgabe 128** Leiten Sie die folgende Funktion ab

$$j(x) = \ln(x^2 - 1) \cdot \mathrm{e}^{x^2+1}$$

und kreuzen Sie das korrekte Kästchen an:

- $\Box$ $\dfrac{2x}{x^2-1} e^{x^2+1} + \ln(x^2-1) e^{x^2+1}$ ,
- $\Box$ $(2x^3 - 2x) e^{x^2+1} + 2x \ln(x^2-1) e^{x^2+1}$ ,
- $\Box$ $\dfrac{2x}{x^2-1} e^{x^2+1} + \ln(x^2-1) e^{x^2+1}$ ,
- $\Box$ $2x(\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^2-1}) e^{x^2+1}$ ,
- $\Box$ $2x(\ln(x^2-1) + (x^2-1)^{-1}) e^{x^2+1}$ .

**Aufgabe 129** Leiten Sie die folgende Funktion zweimal ab

$$i(x) = \ln(4x^3 - 2x + 2)$$

$$\begin{aligned} i''(x) &= \frac{\Box x^4 + \Box x^3 + \Box x^2 + \Box x^1 + \Box}{(\Box x^4 + \Box x^3 + \Box x^2 + \Box x + \Box)^{\Box}} \\ &+ \Box \ln(\Box x^4 + \Box x^3 + \Box x^2 + \Box x^1 + \Box) \end{aligned}$$

**Aufgabe 130** Leiten Sie die folgende Funktion zweimal ab:

$$j(x) = x \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

**Aufgabe 131** Ein System ist in einem stabilen Gleichgewicht, wenn jede Veränderung zu einer Erhöhung der potentiellen Energie führen würde. Untersuchen Sie ob, in folgendem Potential ein stabiles Gleichgewicht existiert. Falls ja, geben Sie es an, falls nein, begründen Sie

$$V(x) = (x^2 + 1)\mathrm{e}^x$$

**Aufgabe 132** Ein Auto bewegt sich auf einer geraden Straßen entlang der x-Achse. Seine Position wird für $t > 0$ durch die Gleichung

$$x(t) = x \sin\left(\frac{1}{x+1}\right))$$

beschrieben. Berechnen Sie seine Geschwindigkeit und Beschleunigung.

# 5 Integration

## 5.1 Übersicht und Selbsttest

§ **325** In diesem Lernfeld werden die Grundregeln der Integration wiederholt. Dazu gehören insbesondere die anschauliche Interpretation von unbestimmtem und bestimmtem Integral als Stammfunktion bzw. Fläche unter dem Funktionsgraphen, die Integrale elementarer Funktionen, sowie die wichtigsten Integrationsmethoden, insbesondere die Integration mit Hilfe einer Substitution sowie die partielle Integration. Nach Durcharbeiten dieses Lernfeldes sollte sicheres und schnelles Integrieren kein Problem mehr für sie sein.

§ **326** Der folgende Test dient zur Selbsteinschätzung ihrer Fähigkeiten und Vorkenntnisse in diesem Lernfeld – bei den ersten beiden Aufgaben sollten Sie sich nicht betrügen, in dem Sie die Lösung durch Ableiten der Vorschläge suchen.

**Aufgabe 133** Integrieren Sie die Funktion $f(x) = x\sqrt{5x^2-32}$. Kreuzen Sie die richtige Lösung an:

- □ $\dfrac{x^2\sqrt{5x^2-32}}{2} + x(5x^2-32)^{3/2} + c$
- □ $\dfrac{(5x^2-32)^{3/2}}{15} + c$
- □ $\dfrac{\sqrt{5x^2-32}}{5} + c$
- □ $\dfrac{x^2\sqrt{5x^2-32}}{2} + \dfrac{(5x^2-32)^{3/2}}{5} + c$
- □ $\dfrac{x^2\,(5x^2-32)^{3/2}}{30} + c$

**Aufgabe 134** Integrieren Sie die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x\ \sin(x)$. Kreuzen Sie die richtige Lösung an:

- □ $\mathrm{e}^x\ \sin(x) - \mathrm{e}^x\ \cos(x)$
- □ $\mathrm{e}^x\ \cos(x) - \mathrm{e}^x\ \sin(x)$
- □ $2\,(\mathrm{e}^x\ \sin(x) - \mathrm{e}^x \cos(x))$
- □ $2\,(\mathrm{e}^x\ \cos(x) - \mathrm{e}^x \sin(x))$
- □ $(\mathrm{e}^x\ \cos(x) - \mathrm{e}^x \sin(x))\,/2$
- □ $(\mathrm{e}^x\ \sin(x) - \mathrm{e}^x \cos(x))\,/2$

**Aufgabe 135** Geben Sie die Lösung für das bestimmte Integral (als Bruch, soweit wie möglich gekürzt!)

$$\int\limits_{-3}^{3} (x^2-4)\,\mathrm{d}x = \frac{\square}{\square}\ .$$

**Aufgabe 136** Bestimmen Sie die Fläche zwischen den Funktionen $f(x) = 2x-2$ und $g(x) = x^2/2 - 8$ im Bereich ihrer Schnittpunkte. Geben Sie das Ergebnis als Bruch (so weit wie möglich gekürzt) an.

$$F = \frac{\square}{\square}\ .$$

**Aufgabe 137** Die Parabel $f(x) = 9 - x^2$ rotiert zwischen ihren Nullstellen um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des sich ergebenden Rotationskörpers (auf eine Nachkommastelle angeben, ohne Rundung, einfach hinter der ersten Nachkommastelle abschneiden):

$$V = \square$$

## 5.2 Grundlagen

### 5.2.1 Wozu?

§ **327** Eine Anwendung der Integration einer Funktion ist Ihnen bereits aus der Schule bekannt: die Bestimmung der Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der Abszisse. Historisch ist die Entwicklung von Verfahren zur Ermittlung dieses bestimmten Integrals die Triebfeder in der Entwicklung der mathematischen Konzepte der Integration.

§ **328** Das bestimmte Integral liefert als Ergebnis eine Zahl; eben diese Fläche. Daher ist den frühen, mit der Integration befassten Matematikern der Zusammenhang mit der Differentiation nicht aufgefallen. Letztere befasst sich mit Funktionen; insbesondere ist auch die Ableitung einer Funktion wieder eine Funktion. Erst Newton und Leibniz entdeckten den Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation.

§ **329** Dieses Problem spiegelt sich noch heute in den beiden Möglichkeiten wieder, die Integration einzuführen. Eine Motivation ist die bereits erwähnte Flächenbestimmung, d.h. die Ermittlung des bestimmten Integrals. Die Motivation von Newton und Leibniz dagegen war eine andere: diese wollten aus der bekannten Änderung einer Funktion, eben der Ableitung, die Funktion selbst bestimmen. Bei diesem unbestimmten Integral wird zu einer gegebenen Funktion eine Stammfunktion gesucht, deren Ableitung eben diese gegebene Funktion ist.

§ **330** Diese zweite Interpretation hat vielfältige physikalische Anwendungen. So wird oftmals nicht die interessierende Größe beobachtet sondern nur deren Änderung: beim Zerfall einer radioaktiven Substanz werden die entstehenden $\alpha$-Teilchen nachgewiesen. Jeder zerfallende Kern emittiert ein $\alpha$-Teilchen, d.h. die Zählrate der $\alpha$-Teilchen ist ein Maß dafür, wie sich die Zahl der Kerne innerhalb der Substanz verändert. Nehmen wir die Zählrate der $\alpha$s als Funktion der Zeit auf, so erhalten wir die Information, wie sich in jedem Zeitintervall die Zahl $N$ der vorhandenen Kerne verändert hat. Wir beobachten also nicht die uns eigentlich interessierende Funktion $N(t)$ sondern deren Ableitung $N'(t) = \mathrm{d}N/\mathrm{d}t$. Außerdem wissen wir, dass die Zahl $N'(t)$ der zerfallenden Atome proportional zur Zahl $N(t)$ der vorhandenen Atome ist: $N'(t) = -\lambda N(t)$. Die Zahl $N(t)$ der vorhandenen Kerne bestimmen wir aus dieser Differentialgleichung durch Integration – allerdings nicht im Vorkurs sondern in der Vorlesung im 1. Semester.

§ **331** Aber auch bei unserem einfachen mechanischen Beispiel, der Bewegung $v(t) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, begegnen wir der Integration. Bewegt sich der Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit $v = s/t$, so ergibt sich die innerhalb eines Zeitintervalls $[t_1, t_2]$ zurück gelegte Strecke zu $s = v(t_2 - t_1)$ – das ist genau die Fläche unter dem Funktionsgraphen $v(t) = \text{const}$ (Geschwindigkeits–Zeit-Diagramm) in den Grenzen von $t_1$ bis $t_2$. Ist die Geschwindigkeit jedoch nicht konstant, so lässt sich der im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ zurück gelegte Weg durch Integration bestimmen:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Kennen wir die Geschwindigkeit explizit als Funktion der Zeit, z.B. $v(t) = at$, so lässt sich die Integration mit den bereits aus der Schule bekannten Verfahren durchführen.

§ **332** Der oben für den Weg gegebene Ausdruck ist ein bestimmtes Integral; wir können ihn uns genauso veranschaulichen, wie wir auch ein bestimmtes Integral veranschaulichen würden. Die Funktion $v(t)$ beschreibt die veränderliche Geschwindigkeit des Körpers. Wäre die Geschwindigkeit konstant, so würden wir einfach $v$ mit der Länge des Zeitintervalls multiplizieren: das ist die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der Abszisse bzw. die Fläche unter der Funktion im Geschwindigkeits–Zeit-Diagramm. Bei einer veränderlichen Geschwindigkeit bestimmen wir diese Fläche durch Integration. Anschaulich zerlegen wir das Zeitintervall in kleine Abschnitte $\Delta t$, vgl. Abb. 32. Die Abschnitte sind so klein, dass die

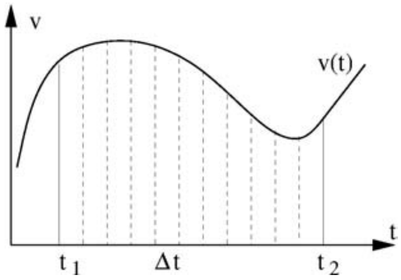



Abbildung 32: Geschwindigkeits–Zeit-Diagramm: der vom Körper in einem Zeitintervall zurück gelegte Weg wird durch die Fläche unter der Funktion $v(t)$ bestimmt, ergibt sich also durch Integration: $s = \int v \, \mathrm{d}t$

Geschwindigkeit innerhalb $\Delta t$ als konstant angenommen werden kann. Der Körper legt dann während $\Delta t$ ein Streckenstückchen $\Delta s = v \, \Delta t$ zurück. Die Gesamtstrecke ergibt sich durch Summation über alle Streckenstückchen:

$$s = \sum_{t_1}^{t_2} \Delta s = \sum_{t_1}^{t_2} v \, \Delta t \; .$$

Im Grenzübergang $\Delta t \to 0$ wird aus der Summe das bereits in § 331 eingeführte bestimmte Integral:

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} v \, \Delta t = \int\limits_{t_1}^{t_2} v \, \mathrm{d}t \; .$$

Damit haben wir uns auch die zweite Interpretation der Integration erarbeitet: Integration ist eine Summation über unendlich viele infinitesimal kleine Elemente.

### 5.2.2 Grundbegriff

§ **333** Die oben dargestellten Überlegungen liefern nicht nur zwei unterschiedliche Interpretation des Integrals sondern entsprechend auch zwei unterschiedliche Definitionen. Diese wollen wir hier etwas genauer formalisieren.

§ **334** Die Integration einer Funktion $f(x)$ als Aufleiten oder Aufsuchen einer Stammfunktion $F(x)$ können wir einführen als

$$F(x) = \int f(x) \, \mathrm{d}x \qquad \text{mit} \qquad F(x) = f(x) \; .$$

Diese Darstellung ist nur dann sinnvoll, wenn wir den Begriff der Stammfunktion definieren:

**Definition**: Eine Funktion $F(x)$ heißt *Stammfunktion* zu $f(x)$, wenn gilt $F'(x) = f(x)$.

§ **335** Die Umkehrung der Ableitung, d.h. die Bestimmung der Stammfunktion, ist nicht eindeutig: die Stammfunktion kann nur bis auf eine Konstante genau bestimmt werden. Betrachten wir dazu eine Funktion $f(x)$. Diese gibt uns die Steigung der gesuchten Funktion $F(x)$. Daher wissen wir, wie wir von einem Punkt $(x, F(x))$ zum nächsten gelangen – dummerweise hat uns niemand das $F(x)$ zu dem $x$ gesagt. Können wir damit aus der Kenntnis der Steigung, d.h. der Ableitung, eine Kurve eindeutig festlegen? Den Verlauf der Kurve ja, aber nicht ihre Lage: wenn Ihnen ein Bergsteiger ganz genau beschreibt, wie wieviele cm er pro Einheitsschritt auf dem Hörnligrat zum Matterhorn hoch gestiegen ist, kriegen wir genau die Form des Matterhorns rekonstruiert – aber wir wissen nicht, ob der Weg auf Meereshöhe begann oder auf 3000 m Höhe. Das gibt auf unserer inneren Landkarte unendlich viele Matterhörner, die alle in der Höhe gegeneinander verschoben sind. Oder für Funktionsgraphen: es ergeben sich unendlich viele Kurven, die sich alle jeweils um eine additive Konstante unterscheiden, siehe Abb. 33. Insbesondere weiß unser Bergsteiger aus dieser Rekonstruktion nicht einmal, ob er einen 2000er, einen 4000er oder gar einen 8000er überschritten hat. Erst

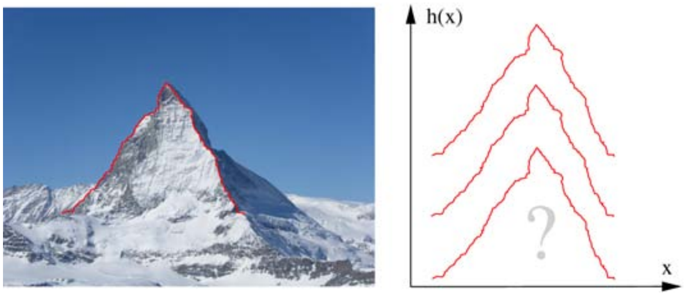



Abbildung 33: Wurde bei einer Überquerung des Matterhorns nur die jeweilige Steigung als Funktion aufgezeichnet (rote Kurve links), so lassen sich unendlich viele Matterhörner gleicher Form aber unterschiedlicher Höhe daraus rekonstruieren (reachts)

das Nachschlagen der Höhe der Hütte am Startpunkt (oder der Höhe der Gipfels oder der Höhe einer beliebigen anderen Stelle) erlaubt es, aus diesen Kurven die richtige auszuwählen, d.h. die Integrationskonstante zu bestimmen.

§ **336** Die formale Begründung für diese Integrationskonstante ist einfach. Eine Konstante fällt beim Ableiten weg. Wenn die Ableitung der Funktion $F(x)$ eine Funktion $f(x)$ ergibt, dann ergibt auch die Ableitung einer Funktion $F(x)+c$ nach Summenregel $f(x)$. Wir können also unendlich viele Funktionen konstruieren, die sich alle nur um eine Konstante unterscheiden, und die alle abgeleitet $f(x)$ ergeben.

§ **337** Die Integrationskonstante können wir beim bestimmten Integral umgehen:

**Definition**: Ist der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to \infty} \sum\limits_{x=a}^{b} f(x)\,\Delta x$ vorhanden, so heißt er *bestimmtes Integral* der Funktion $f(x)$ in den Grenzen von $a$ bis $b$ und wird geschrieben $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{b} f(x)\,\Delta x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

§ **338** Die Bestimmung der Stammfunktion bleibt uns allerdings auch beim bestimmten Integral nicht erspart. Ein bestimmtes Integral wird in zwei Schritten ausgewertet. Als erstes wird die Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x)$ bestimmt. In diese werden dann obere und untere Integrationsgrenze eingesetzt und der Ausdruck mit der unteren Grenze von dem mit der oberen subtrahiert:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

**Verständnisfrage 9** Wieso ist die Integrationskonstante beim bestimmten Integral irrelevant, wenn doch die bis auf die Integrationskonstante bekannte Stammfunktion zur Berechnung benötigt wird? Hinweis in § 565

§ **339** Ein Vertauschen der Integrationsgrenzen bewirkt einen Vorzeichenwechsel des Integrals (Vertauschungsregel):

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{oder} \qquad I(a,b) = -I(a,b)\,.$$

Das ist offensichtlich, da die Differenz zwischen oberer und unterer Grenze nicht kommutativ ist:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

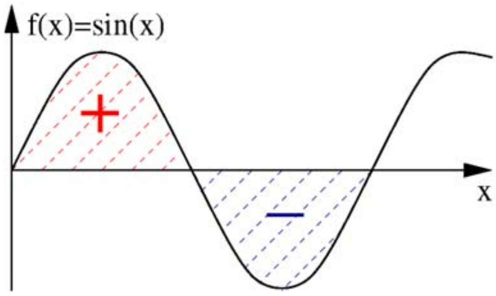



Abbildung 34: Beim bestimmten Integral darf nicht einfach über eine Nullstelle der Funktion hinweg integriert werden: so heben sich beim Integral über den Sinus im Intervall [0,2$\pi$] die Flächen im Intervall [0,$\pi$] und [$\pi$,2$\pi$] genau auf. Addiert man dagegen die Beträge der Teilflächen, so ergibt sich die Gesamtfläche

Fallen die Integrationsgrenzen zusammen, $a = b$, so verschwindet das Integral:

$$\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0 \qquad \text{oder} \qquad I(a,a) = 0\,.$$

Bei Zerlegung des Integrationsintervalls in Teilintervalle addieren sich die Teilintegrale:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit} \qquad a \le c \le b$$

oder

$$I(a,b) = I(a,c) + I(c,b) \qquad \text{mit} \qquad a \le c \le b\,.$$

§ **340** Beim bestimmten Integral bedürfen Nullstellen mit Vorzeichenwechsel der besonderen Aufmerksamkeit. Das bestimmte Integral basiert auf einer Summation über Flächenelemente $f(x)\,\Delta x$. Da $\Delta x$ positiv ist, sind diese Flächenelemente positiv falls $f(x) > 0$ und werden negativ für $f(x) < 0$. Im Extremfall (z.B. Integration von $\sin(x)$ im Intervall von Null bis $2\pi$, vgl. Abb. 34) heben sich positive und negative Beiträge zur Fläche auf und das Integral verschwindet. Um die Gesamtfläche korrekt zu bestimmen, muss das Integral in Teilintegrale von $a$ bis zur Nullstelle $x_\mathrm{N}$ und von der Nullstelle bis $b$ aufgespalten werden. Anschließend werden deren Beträge addiert:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_a^{x_\mathrm{N}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{x_\mathrm{N}}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \qquad \text{oder} \qquad |I(a,b)| = |I(a,x_\mathrm{n})| + |I(x_\mathrm{n},b)|\,.$$

Bei mehreren Nullstellen in $(a,b)$ sind entsprechend mehrere Teilintegrale zu bilden.

**Verständnisfrage 10** Muss die Zerlegung in Teilintegrale auch bei einer Funktion mit Nullstelle aber ohne Vorzeichenwechsel an der Nullstelle vorgenommen werden – also z.B. bei $f(x) = x^2$ im Intervall $[-2,2]$? Begründen Sie. Hinweis in § 566

§ **341** Als Beispiel verwenden wir Aufgabe 135. Die Funktion $f(x) = x^2 - 4$ wird durch eine nach unten verschobene Normalparabel beschrieben mit Nullstellen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$, d.h. beide Nullstellen liegen im Integrationsintervall $[-3,3]$, das Integral ist also in drei Teile zu zerlegen:

$$\int\limits_{-3}^{3} (x^2-4)\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_{-3}^{-2} (x^2-4)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{-2}^{2} (x^2-4)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{2}^{3} (x^2-4)\,\mathrm{d}x\right|\,.$$

Die Stammfunktion zu $f(x)$ ist $F(x) = x^3/3 - 4x$. Einsetzen liefert

$$\int\limits_{-3}^{3} (x^2-4)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \left|\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-3}^{-2}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{2}^{3}\right|$$

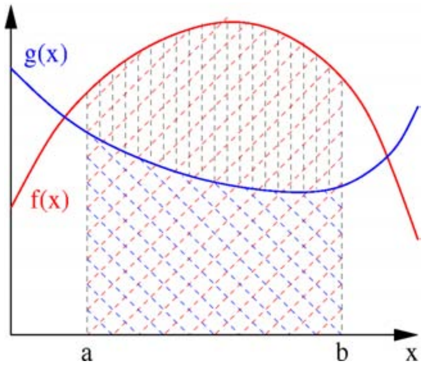



Abbildung 35: Die Fläche zwischen zwei Funktionen (schwarz schraffiert) lässt sich als die Differenz der Flächen zwischen den Funktionen (rot und blau schraffiert) bestimmen

$$
\begin{aligned}
&= \left|\frac{(-2)^3}{3} - 4\cdot(-2) - \frac{(-3)^3}{3} + 4\cdot(-3)\right| \\
&\quad + \left|\frac{(2)^3}{3} - 4\cdot(2) - \frac{(-2)^3}{3} + 4\cdot(-2)\right| \\
&\quad + \left|\frac{(3)^3}{3} - 4\cdot(3) - \frac{(2)^3}{3} + 4\cdot(2)\right| \\
&= \left|\frac{-8+24+27-36}{3}\right| + \left|\frac{8-24+8-24}{3}\right| + \left|\frac{27-36-8+24}{3}\right| \\
&= \frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{46}{3}\,.
\end{aligned}
$$

### 5.2.3 Fläche zwischen zwei Kurven

§ **342** Die Fläche zwischen zwei Kurven, wie z.B. der schwarz schraffierte Bereich in Abb. 35, lässt sich ebenfalls durch Integration bestimmen. Die Abbildung veranschaulicht die Idee: die Flächen unterhalb der beiden Funktionsgraphen $f(x)$ und $g(x)$ werden jeweils separat bestimmt; das entspricht der rot und der blau schraffierten Fläche. Die Fläche unter $f(x)$ ist größer als die gesuchte Fläche: im betrachteten Intervall gilt $f(x) > g(x)$, d.h. $\int f(x)\mathrm{d}x$ liefert einen zu großen Wert für die Fläche. Der Überschuss ist aber genau die Fläche unter dem Graphen von $g(x)$, d.h. die Differenz der beiden Flächen liefert die schraffierte Fläche:

$$A = \int\limits_a^b \{f(x) - g(x)\}\,\mathrm{d}x\,. \tag{22}$$

Die Fläche wird positiv für $f(x) > g(x)$ wie in Abb. 35, sie wird negativ für $f(x) < g(x)$; und, wie zu erwarten, verschwindet sie für $f(x) = g(x)$.

§ **343** Die Bestimmung der Fläche zwischen zwei Kurven ist mit ähnlichen Fallstricken versehen wie die Bestimmung der Fläche zwischen der $x$-Achse und dem Funktionsgraphen. Das ist verständlich, da wir die $x$-Achse auch als Funktion $g(x) = 0$ darstellen können und die allgemeine Gleichung (22) anwenden können. Probleme bei der Bestimmung des Integrals gibt es, wenn eine Nullstelle im Integrationsintervall liegt, d.h. wenn der Funktionsgraph von $f(x)$ die durch die Funktion $g(x)$ beschriebene Bezugsachse schneidet. In diesem Fall erfolgt die Integration von der unteren Grenze des Integrationsintervalls bis zum Schnittpunkt $c$ der beiden Funktion und anschließend in einem zweiten Integral vom Schnittpunkt bis zur Obergrenze des Integrationsintervalls. Die Beträge der beiden Teilintegrale werden addiert:

$$A = \int\limits_a^b \{f(x) - g(x)\}\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Dabei ist es egal, ob Sie den Betrag vor der Integration bilden, wie in der obigen Gleichung vorgeschlagen, oder erst die Teilintegrale ausführen und dann deren Beträge addieren.

§ **344** Als Beispiel betrachten wir die Lösung zu Aufgabe 136. Gesucht ist der Inhalt des Flächenstücks, das zwischen den Funktionen $f(x) = 2x - 2$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8$ im Bereich ihrer Schnittpunkte liegt. Veranschaulichen wir uns die Situation: $f(x)$ ist eine Gerade mit positiver Steigung und negativem Achsenabschnitt auf der $y$-Achse, $g(x)$ ist eine nach oben offene Parabel, die entlang der $y$-Achse nach unten verschoben ist. Die Schnittpunkte der beiden Kurven ergeben sich durch Gleichsetzen der beiden Funktionen:

$$2x_\mathrm{s} - 2 = \frac{1}{2}x_\mathrm{s}^2 - 8 \quad \Rightarrow \quad x_\mathrm{s}^2 - 4x_\mathrm{s} - 12 = (x_\mathrm{s} + 2)(x_\mathrm{s} - 6) = 0$$

und damit

$$x_{\mathrm{s}_1} = -2 \quad \text{und} \quad x_{\mathrm{s}_2} = 6 \,.$$

In diesem Integrationsintervall liegt die Gerade oberhalb der Parabel, d.h. es ist $f(x) > g(x)$. Damit gilt für die Fläche

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{6} \left\{(2x-2) - \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 8\right)\right\} \mathrm{d}x = \int_{-2}^{6} \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 6\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[-\tfrac{1}{6}x^3 + x^2 + 6x\right]_{-2}^{6} = \tfrac{128}{3} \,. \end{aligned}$$

### 5.2.4 Rotationskörper

§ **345** Ein Rotationskörper entsteht bei der Rotation eines Flächenstück um eine Achse. Das Flächenstück sei begrenzt durch die $x$-Achse, die Ordinaten bei $x_1 = \mathrm{const}$ und $x_2 = \mathrm{const}$ sowie die Kurve $f(x)$ und rotiere um die $x$-Achse. Der Flächeninhalt zwischen der $x$-Achse und $f(x)$ kann durch Integration bestimmt werden, d.h. durch die Summation unendlich vieler unendlich schmaler Rechtecke unter der Kurve. Das Volumen eines Rotationskörpers können wir bestimmen, indem wir ihn in unendlich viele unendlich dünne Scheibchen senkrecht zur $x$-Achse zerlegen: der gleiche Prozess, der bei der Integration vorgenommen wird, lediglich mit dem Unterschied, dass man das unendlich schmale Rechteck unter der Kurve um die $x$-Achse rotieren lässt. Dabei entsteht ein unendlich flacher Zylinder mit der Grundfläche $F = \pi[f(x)]^2$ und der Höhe $\mathrm{d}x$. Über diese Zylinder müssen wir dann summieren:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_1}^{x_2} (\pi[f(x)]^2 \, \Delta x) = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x \,.$$

§ **346** Betrachten wir dazu als Beispiel Aufgabe 137. Die Parabel $f(x) = 9 - x^2$ rotiert zwischen ihren Nullstellen um die $x$-Achse. Um das Volumen des Rotationskörpers zu bestimmen, ermitteln wir zuerst die Nullstellen der Funktion $f(x)$, die gleichzeitig die Integrationsgrenzen bilden. Sie liegen bei $x_{1,2} = \pm 3$, d.h. für das Volumen gilt

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-3}^{3} (81 - 18x^2 + x^4) \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \left[81x - \tfrac{18}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5\right]_{-3}^{3} = 814.3 \,. \end{aligned}$$

**Verständnisfrage 11** Muss bei der Bestimmung des durch die Rotation der Funktion $f(x)$ um die $x$-Achse gebildeten Rotationskörpers ebenso wie beim normalen bestimmten Integral auf Nullstellen geachtet werden oder kann über diese einfach hinweg integriert werden? Hinweis in § 567

## 5.3 Integrale einfacher Funktionen

§ **347** Wie bei der Differentiation gibt es bei der Integration einige Grundfunktionen, für die man die Integrale auswendig lernen muss – das heißt häufig nur, dass man die Tabelle der Ableitungen von Grundfunktionen in Gegenrichtung verwendet. Zusätzlich gibt es, ähnlich Produkt- und Kettenregel beim Differenzieren, einige Grundregeln des Integrierens.

Dazugehören insbesondere die Substitution als Umkehrung der Kettenregel und die partielle Integration als Umkehrung der Produktregel.

§ **348** Die elementaren Funktionen sind im wesentlichen die, die wir auch bei der Differentiation betrachtet haben:

- eine Potenzfunktion wird integriert, in dem ihr Exponent um Eins erhöht wird und die Potenz durch den neuen Exponenten geteilt wird:

  $$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad n \neq -1 \, .$$

  Wir können uns die Regel dadurch veranschaulichen, dass wir die rechte Seite ableiten: dann wird der Exponent um Eins erniedrigt (also wieder der ursprüngliche Exponent) und der Ausdruck wird mit dem ursprünglichen Exponenten multipliziert. Dieser Faktor kürzt sich genau gegen den, den die Integration herein gebracht hat.
  Der Spezialfall einer Potenz ist die Konstante $c$. Diese können wir schreiben als Potenz $cx^0$. Anwenden der Integrationsregeln liefert dann

  $$\int c \, \mathrm{d}x = \int cx^0 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{1} cx^1 + C = cx + C \, .$$

- für $n = -1$, also die Funktion $f(x) = x^{-1}$ funktioniert dieses Verfahren nicht: erhöhen wir den Exponenten um Eins, so erhalten wir eine Null. Das wäre noch in Ordnung, jedoch können wir den zweiten Schritt der Integration nicht ausführen, da wir nicht durch Null teilen dürfen. Das Integral dieser speziellen Potenz ist der natürliche Logarithmus:

  $$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C \, .$$

  $|x|$ besagt hier, dass wir den Betrag von $x$ nehmen müssen, da der Logarithmus nur für reelle Zahlen größer Null definiert ist. Die Betragsstriche fallen weg, wenn das Integral wie in § 212 definiert wird.
- die Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus ist die Exponentialfunktion $\mathrm{e}^x$. Aus der Differentiation wissen wir bereits, dass die Ableitung der Exponentialfunktion die Exponentialfunktion ist. Entsprechend ist auch das Integral der Exponentialfunktion die Exponentialfunktion:

  $$\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C \, .$$

- die Integrale der Winkelfunktionen Sinus und Kosinus können wir uns selbst überlegen, in dem wir die Ableitungsregeln 'in Gegenrichtung' verwenden:

  $$\int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + C \qquad \text{und} \qquad \int \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + C \, .$$

### 5.3.1 Rechentraining

§ **349** Die Aufgaben in diesem Abschnitt dienen der Übung. Wie viele Sie davon bearbeiten, steht Ihnen frei. Durch Anklicken der Schaltfläche `Musterlösung` erhalten Sie bei einigen der Aufgaben eine Musterlösung mit vollständigem Lösungsweg, sonst erhalten Sie über die Schaltfläche `Lösung` eine nicht weiter kommentierte Lösung.

**Aufgabe 138** Berechnen Sie die Integrale:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{3}{x^4} \, \mathrm{d}x \, , \\ I_2 &= \int 5x^{-7/2} \, \mathrm{d}x \, , \\ I_3 &= \int \left( 3x^4 - 2x^2 + \frac{4}{7} \right) \mathrm{d}x \, , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int \left( ax^3 + \frac{5}{x^2} - 2a \right) \mathrm{d}x \;, \\
I_5 &= \int (2i^n + ni) \,\mathrm{d}i \;, \\
I_6 &= \int \left( \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x \;, \\
I_7 &= \int \left( \sin r + \frac{\cos r}{4} \right) \mathrm{d}r \;, \\
I_8 &= \int (e^\nu + e^{2\omega}) \,\mathrm{d}\nu \;, \\
I_9 &= \int\limits_{-1}^{2} (-x^2 + 1) \,\mathrm{d}x \;, \\
I_{10} &= \int\limits_{-3}^{-1} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \;, \\
I_{11} &= \int\limits_{-\infty}^{1} e^t \,\mathrm{d}t \;, \\
I_{12} &= \int\limits_{-1}^{1} (x^3 + 1) \,\mathrm{d}x \;, \\
I_{13} &= \int\limits_{0}^{3} (-x^3 + 4x^2 - 3x) \,\mathrm{d}x \;, \\
I_{14} &= \int\limits_{0.5}^{3} \frac{2}{x^2} \,\mathrm{d}x \;, \\
I_{15} &= \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x \;, \\
I_{16} &= \int\limits_{0}^{1} (e^x - 1) \,\mathrm{d}x \;, \\
I_{17} &= \int\limits_{1}^{8} \frac{\mathrm{d}x}{x \sqrt[3]{x}} \;.
\end{aligned}
$$

Lösung in § 578

**Aufgabe 139** Berechnen Sie das bestimmte Integral der Funktion $f = 1/r^2$ in den Grenzen 1 und $\infty$.
Lösung in § 579

**Aufgabe 140** Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve $f(x) = x^2 - x$ und den Ordinaten bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

Hilfe zur Aufgabe in § 568 Musterlösung in § 580

**Aufgabe 141** Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers von $x = 0$ bis $x = 10$, wenn die Gerade $f(x) = x/2$ um die $x$-Achse gedreht wird. Wie groß ist allgemein das Volumen, dass durch die Rotation einer Funktion $f(x) = x^n$ um die $x$-Achse entsteht?
Lösung in § 581

**Aufgabe 142** Es ist das Volumen des Rotationskörpers gesucht, der entsteht, wenn die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ um die $x$-Achse rotiert in den Grenzen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.
Lösung in § 582

**Aufgabe 143** Die Niederschlagsmenge $m$ pro Fläche und Zeit ist beschrieben durch die Funktion $m(t) = m_\text{o}(1 + \frac{1}{2}\sin(2\pi\, t))$. Welchen Gesamtniederschlag erhält man im Intervall [0;10]? Lösung in § 583

## 5.4 Integrationsregeln im Überblick

§ **350** Wie beim Differenzieren reichen die Regeln für wenige Grundfunktionen bereits aus, um die meisten Integrale zu lösen. Allerdings brauchen wir auch bei der Integration wieder einen Satz von Regeln, der uns hilft, auch kompliziertere Funktionen zu integrieren. Die meisten der hier genannten Regeln haben ein Äquivalent in der Differentiation.

- die Faktorregel: wird eine Funktion $f(x)$ mit einem konstanten Faktor $c$ multipliziert, so können wir bei Integration über diesen Ausdruck die Konstante vor das Integral ziehen:

  $$\int c\, f(x)\, \mathrm{d}x = c \int f(x) \mathrm{d}x \, .$$

  Die Regel werden Sie bereits intuitiv angewendet haben und auch weiter anwenden:

  $$\int 6\, x^2\, \mathrm{d}x = 6 \int x^2\, \mathrm{d}x = 6\, \frac{x^3}{3} + C = 2x^3 + C \, .$$

- die Summenregel: lässt sich eine Funktion $f(x)$ als die Summe zweier Funktionen $g(x) + h(x)$ darstellen, so ist es egal, ob man zuerst die Summe bildet und dann integriert oder erst die Integrale der Summanden bestimmt und dann addiert:

  $$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int (g(x) + h(x)) = \int g(x)\, \mathrm{d}x + \int h(x)\, \mathrm{d}x \, .$$

  Oder einfach formuliert: jeder Summand kann einzeln integriert werden.
- die Produktregel hat ihre Umkehrung in der partiellen Integration. Dazu schreiben wir nochmals die Produktregel aus:

  $$f'(x) = (g(x)h(x))' = g(x)h'(x) + g'(x)h(x) \, .$$

  Integrieren wir diese Gleichung einfach einmal:

  $$\int (g(x)h(x))'\, \mathrm{d}x = \int [g(x)h'(x) + g'(x)h(x)]\, \mathrm{d}x \, .$$

  Auf der linken Seite wird der Ausdruck $g(x)h(x)$ erst abgeleitet und dann wieder integriert, d.h. auf der linken Seite steht nur $g(x)h(x)$. Auf der rechten Seite wenden wir die Summenregel an:

  $$g(x)h(x) = \int g(x)h'(x)\, \mathrm{d}x + \int g'(x)h(x)\, \mathrm{d}x \, .$$

  Umstellen der Ausdrücke liefert die Regel für die partielle Integration:

  $$\int g(x)h'(x)\, \mathrm{d}x = g(x)h(x) - \int g'(x)h(x)\, \mathrm{d}x \, .$$

  Sollen wir also eine Funktion $f(x)$ integrieren, die wir als das Produkt zweier Funktionen $g(x)$ und $h'(x)$ darstellen können, so können wir diese Gleichung verwenden. Allerdings bleibt dann auf der rechten Seite weiterhin ein Integral stehen – partielle Integration macht nur dann Sinn, wenn dieses Restintegral einfacher auszuführen ist als das ursprüngliche Integral.
  Auf Grund ihrer Herkunft aus der Produktregel wird die partielle auch als Produktintegration bezeichnet.
- die Kettenregel findet ihre Entsprechung in der Substitutionsmethode. Wieder betrachten wir eine Funktion $f$, die sich in der Form $f(g(x))$ darstellen lässt, d.h. wir haben wieder eine äußere Funktion $f(g)$ und eine inneren Funktion $g(x)$. Um die Integration ausführen zu

können, ersetzen wir diese innere Funktion durch eine Variable $u$ und passen das Differential d$x$ an, in dem wir die Abhängigkeit $u(x)$ verwenden:

$$\int f(g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{u'} \qquad \text{mit} \qquad u = g(x)\,, \;\; u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \;\text{ bzw. }\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u'}\ .$$

Um Vertrauen in die Regel zu gewinnen, leiten wir beide Seiten nach $x$ ab:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(g(x))\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{u'}\ .$$

Auf der linken Seite hebt die Ableitung die Integration genau auf, d.h. wir erhalten $f(g(x))$. Auf der rechten Seite dagegen müssen wir $f(u)$ unter Verwendung der Kettenregel differenzieren, so dass wir erhalten

$$f(g(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(u))\,\frac{\mathrm{d}u}{u'} = \int f(u)\cdot\frac{u'}{u'}\mathrm{d}u = f(u) = f(g(x))\ .$$

§ **351** Von diesen Regeln sind Faktoren- und Summenregel trivial, die Integration durch Substitution ebenso wie die partielle Integration werden in der Physik jedoch häufiger benötigt, so dass wir sie im folgenden etwas genauer trainieren werden.

§ **352** Davor aber eine kurze Warnung: jeder stetige Funktion lässt sich differenzieren. Im Gegenzug lässt sich aber nicht jede stetige Funktion auch Integrieren.

## 5.5 Substitutionsmethode

§ **353** Die Anwendung der Substitutionsregel erfordert, dass wir die zu integrierende Funktion in eine elementare Grundfunktion mit bekanntem Integral und eine passende innere Funktion zerlegen. Das Verfahren kann bei einer gegebenen Funktion erfolgreich sein, muss aber nicht.

§ **354** Beginnen wir mir einem einfachen Beispiel. Gesucht ist das Integral der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2x+5}\ .$$

Die Funktion hat die Form $1/u$, d.h. wir erwarten einen natürlichen Logarithmus. Also substituieren wir $u = 2x+5$. Die Ableitung dieser Funktion $u(x)$ liefert $u' = 2$. Einsetzen in die Substitutionsregel liefert

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\ln|u| + C\ .$$

Damit haben wir ein Integral von $f(x)$ gefunden, allerdings steht da noch nicht die Variable $x$ drin sondern unsere substituierte Variable $u$. Diese müssen wir durch Rücksubstition von $u = 2x+5$ ersetzen und erhalten als Lösung

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\ln|2x+5| + C\ .$$

§ **355** Auch die bereits aus der Differentiation bekannte Winkelfunktion $\cos(\omega t+\varphi)$ lässt sich auf diese Weise integrieren. Die äußere Funktion ist der Kosinus, die innere substituieren wir als $u(t) = \omega t + \varphi$. Die Ableitung dieser Funktion (nach der unabhängigen Variablen $t$) ist $u' = \omega$. Nach Einsetzen in die Substitutionsformel erhalten wir für das Integral

$$\int \cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t = \int \cos(u)\frac{\mathrm{d}u}{\omega} = \frac{1}{\omega}\int\cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\omega}\,\sin(u) + C\ .$$

Auch hier dürfen wir am Ende die Rücksubstitution nicht vergessen:

$$\int \cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\,\sin(\omega t+\varphi) + C\ .$$

Falls Ihnen das etwas Vodoomäßig vorkommt, leiten Sie den Ausdruck einfach ab und überprüfen, ob Sie die zu integrierende Funktion zurück erhalten.

§ **356** Wurzeln sind ein weiteres beliebtes Spielfeld für Integration mit Hilfe der Substitutionsmethode. Betrachten wir dazu das Integral der Funktion

$$f(x) = 24x^2 \sqrt{9 + 4x^3} \; .$$

Die Wurzel ist als eine geeignete äußere Funktion offensichtlich, die zu substituierende innere Funktion ist dann $u(x) = 9 + 4x^3$ mit der Ableitung $u' = +12x^2$. Aber was machen wir mit den $24x^2$? Lassen wir die erst mal stehen, wenden stur das Schema an und gucken, was passiert:

$$\int 24x^2 \sqrt{9 - 4x^3} \, \mathrm{d}x = \int 24x^2 \sqrt{u} \, \frac{\mathrm{d}u}{12x^2} = 2 \int \sqrt{u} \, \mathrm{d}u \; .$$

Hier hat sich unser Problem der $24x^2$ in der Ausgangsfunktion gelöst: die unabhängige Variable $x$ in diesem Ausdruck ließ sich gegen die entsprechende im $u'$ kürzen. Damit enthält das Integral nur eine unabhängige Variable, das $u$, und wir können die Integration ausführen:

$$\int 24x^2 \sqrt{9 - 4x^3} \, \mathrm{d}x = 2 \int \sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{9 + 4x^3}^3 + C \; .$$

§ **357** Beachten Sie, dass dieses Verfahren nicht funktioniert hätte, wenn die Funktion $f(x) = 24x^3 \sqrt{9 + 4x^3}$ gewesen wäre. Wir hätten wieder die Wurzel als die äußere Funktion aufgefasst, die entsprechende Substitution gemacht und erhalten

$$\int 24x^3 \sqrt{9 - 4x^3} \, \mathrm{d}x = \int 24x^3 \sqrt{u} \, \frac{\mathrm{d}u}{12x^2} = 2 \int x\sqrt{u} \, \mathrm{d}u \; .$$

In diesem Fall wäre das Integral nicht lösbar gewesen, da wir es nicht geschafft habe, es auf eine der beiden Variablen $x$ oder $u$ zu reduzieren. Dieses Problem wäre bei allen anderen Potenzen von $x$ als der oben verwendeten 2 aufgetreten! Daran können Sie auch erkennen, dass es zwar schön ist, wenn die Substitutionsmethode funktioniert, dass sie jedoch keine Garantie für ihre Funktion haben.

§ **358** Mit dem Vorfaktor $24x^3$ hätten wir allerdings auch arbeiten können, wenn der Radikand nicht die dritte sondern die vierte Potenz von $x$ enthalten hätte. Dann hätte in $u'$ ein $x^3$ gestanden und sich gegen den obigen Vorfaktor gekürzt, so dass das Integral wieder nur die variable $u$ enthalten hätte.

§ **359** Auch das Integral aus Aufgabe 133 lässt sich mit Hilfe einer Substitution lösen. In der Funktion $f(x) = x \sqrt{5x^2 - 32}$ substituieren wir den Radikanden, d.h. $u = 5x^2 - 32$. Dessen Ableitung gibt $u' = 10x$. Damit wird das Integral

$$\int x \sqrt{5x^2 - 32} \, \mathrm{d}x = \int x \sqrt{u} \, \frac{\mathrm{d}u}{10x} = \frac{1}{10} \int \sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{10} \, u^{3/2} \, \frac{2}{3} + c = \frac{(5x^2 - 32)^{3/2}}{15} + c \; .$$

§ **360** Bisher haben wir nur unbestimmte Integrale betrachtet. Auch bei einem bestimmten Integral lässt sich die Substitutionsmethode anwenden. Dann haben Sie zwei Möglichkeiten: (a) Sie substituieren auch die Integrationsgrenzen und setzen dann direkt nach der Integration (und ohne Rücksubstitution) ein, oder (b) Sie lassen die Integrationsgrenzen einfach stehen, integrieren, machen die Substitution rückgängig und setzen dann erst die Integrationsgrenzen ein.

### 5.5.1 Rechentraining

§ **361** Die Aufgaben in diesem Abschnitt dienen der Übung. Wie viele Sie davon bearbeiten, steht Ihnen frei. Durch Anklicken der Schaltfläche `Hilfe` (bitte sehr sparsam verwenden) erhalten Sie einen Hinweis zur Lösung der entsprechenden Aufgabe; über die Schaltfläche `Musterlösung` erhalten Sie bei einigen der Aufgaben eine Musterlösung mit vollständigem Lösungsweg, sonst erhalten Sie über die Schaltfläche `Lösung` eine nicht weiter kommentierte Lösung.

**Aufgabe 144** Bestimmen Sie $\int \sin(kx+d)\,\mathrm{d}x$.
Hilfe zur Aufgabe in § 569 Musterlösung in § 584

**Aufgabe 145** Bestimmen Sie $\int \frac{1}{2x+9}\,\mathrm{d}x$.
Hilfe zur Aufgabe in § 570 Musterlösung in § 585

**Aufgabe 146** Bestimmen Sie $\int x^2 \sin(3x^3+2a)\,\mathrm{d}x$.
Hilfe zur Aufgabe in § 571 Musterlösung in § 586

**Aufgabe 147** Bestimmen Sie $\int x\mathrm{e}^{x^2}\,Dx$.
Hilfe zur Aufgabe in § 572 Musterlösung in § 587

**Aufgabe 148** Bestimmen Sie $\int x^2\sqrt{x^3-1}\,\mathrm{d}x$.
Hilfe zur Aufgabe in § 573 Musterlösung in § 588

## 5.6 Produktintegration (partielle Integration)

§ **362** Bei der partiellen Integration geht es um die Integration von Funktionen, die sich als Produkt zweier Funktionen darstellen lassen. Technisch muss dabei eine der Funktionen abgeleitet, die andere integriert werden. Außerdem bleibt ein Restintegral übrig, das einfacher werden muss als das ursprüngliche Integral. Sonst macht das ganze Verfahren, außer in einigen Ausnahmefälle, keinen Sinn.

§ **363** Die Funktion $f(x)=x\,\cos(x)$ soll integriert werden. Diese Funktion lässt sich als das Produkt zweier Funktionen $x$ und $\cos(x)$ darstellen. Betrachten wir noch einmal die Formel für die partielle Integration etwas genauer

$$\int g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = g(x)h(x) - \int g'(x)h(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Im Restintegral steht die Ableitung der Funktion $g(x)$ des Ausgangsintegrals sowie das Integral der Funktion $h'(x)$ des Ausgangsintegrals. Die Winkelfunktion im Ausgangsintegral wird wieder eine Winkelfunktion, egal ob wir sie ableiten oder integrieren. Bei der Funktion $x$ sieht das anders aus: integriert erhalten wir $x^2/2$, bei der Ableitung dagegen 1. Dieser Ausdruck ist einfach und würde auch das Restintegral entsprechend vereinfachen. Daher wählen wir unsere Funktionen im Ausgangsintegral als

$$g(x)=x \qquad \text{und} \qquad h'(x)=\cos(x)\ .$$

Die erste Gleichung leiten wir ab, für die zweite geben wir das Integral an

$$g'(x)=1 \qquad \text{und} \qquad h(x)=\sin(x)\ .$$

Einsetzen in die Gleichung für die partielle Integration liefert

$$\int x\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = x\,\sin(x) - \int 1\,\sin(x)\,\mathrm{d}x = x\,\sin(x)+\cos(x)\ .$$

§ **364** Zur Kontrolle (und Übung der Produktregel) leiten wir den Ausdruck ab:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\,\sin(x)+\cos(x)) = x\,\cos(x)+\sin(x)-\sin(x) = x\,\cos(x)\ .$$

§ **365** Betrachten wir zum Vergleich noch die andere Zuordnung der Funktionen in § 363:

$$g(x)=\cos(x) \qquad \text{und} \qquad h'(x)=x\ .$$

Ableitung bzw. Integral sind dann

$$g'(x)=-\sin(x) \qquad \text{und} \qquad h(x)=\frac{1}{2}x^2\ .$$

Einsetzen in die Gleichung für die partielle Integration liefert

$$\int x\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\,\cos(x) - \int \frac{x^2}{2}\,\cos(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

damit ist das Restintegral aber schwieriger als das Ausgangsintegral, d.h. diese Variante hat uns in die falsche Richtung geführt.

§ **366** Ein entsprechendes Verfahren lässt sich auch für das Integral $x\,\mathrm{e}^x$ oder $x\,\sin(x)$ anwenden – auch in diesen Beispielen funktioniert das Verfahren, weil die Ableitung von $g(x) = x$ Eins ist und damit das Restintegral einfach wird.

§ **367** Schwieriger wird es bei der Integration der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2\,\cos(x)$. Zwar ist der Vorteil der Wahl $x^2/2$ als $g(x)$ nicht so offensichtlich, aber immer noch sinnvoller als die andere Variante. Damit erhalten wir

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{und} \qquad h'(x) = \sin(x)$$

sowie

$$g'(x) = x \qquad \text{und} \qquad h(x) = -\cos(x)\ .$$

Einsetzen in die Gleichung für die partielle Integration liefert

$$\int \frac{x^2}{2}\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\cos(x) - \int x(-\cos(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\cos(x) + \int x\,\cos(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Das Restintegral ist jetzt einfacher geworden: es enthält zwar weiterhin ein Produkt aus einer Winkelfunktion und einer Potenz, letztere jedoch von geringerer Ordnung. Nochmalige partielle Integration würde, wie in § 363 gezeigt, auch das Restintegral lösen, d.h. dieses Integral ließe sich durch zweimalige partielle Integration lösen:

$$\int \frac{x^2}{2}\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\cos(x) + \int x\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\cos(x) + x\,\sin(x) + \cos(x)\ .$$

§ **368** Zweimalige partielle Integration ist auch erforderlich, wenn ein Produkt aus Exponentialfunktion und Winkelfunktion wie z.B. in § 319 zu integrieren ist. Ein entsprechendes Beispiel ist durch die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x\,\sin(x)$ aus Aufgabe 134 gegeben. Wir wählen

$$g(x) = \sin(x) \qquad \text{und} \qquad h'(x) = \mathrm{e}^x\ .$$

Dann ist

$$g'(x) = \cos(x) \qquad \text{und} \qquad h(x) = \mathrm{e}^x\ .$$

Einsetzen in die Gleichung für die partielle Integration liefert

$$\int \mathrm{e}^x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\,\sin(x) - \int \mathrm{e}^x\,\cos(x)\mathrm{d}x\ . \tag{23}$$

Das Restintegral ist, ebenso wie das Ausgangsintegral, ein Produkt aus einer Exponential- und einer Winkelfunktion und damit ebenfalls nicht einfach lösbar. Der einzige Unterschied besteht darin, dass das Integral jetzt einen Kosinus an Stelle des Sinus enthält. Ganz schematisch führen wir auch für das Restintegral eine partielle Integration durch mit

$$g(x) = \cos(x) \qquad \text{und} \qquad h'(x) = \mathrm{e}^x$$

und damit

$$g'(x) = -\cos(x) \qquad \text{und} \qquad h(x) = \mathrm{e}^x\ .$$

Einsetzen in das Schema für die partielle Integration liefert für das Restintegral

$$\int \mathrm{e}^x\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = e^x\,\cos x - \int \mathrm{e}^x(-\sin(x))\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\,\cos(x) + \int \mathrm{e}^x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Einsetzen dieses Ausdrucks für das Restintegral in der ersten partiellen Integration (23) liefert

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \sin(x) - \left(\mathrm{e}^x \cos(x) + \int \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \mathrm{e}^x \sin(x) - \mathrm{e}^x \cos(x) - \int \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x\ .\end{aligned}$$

Jetzt steht das Ausgangsintegral auch auf der rechten Seite der Gleichung, allerdings mit negativem Vorzeichen. Addition dieses Terms liefert

$$2\int \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin(x) - \mathrm{e}^x \cos(x)$$

und damit für das gesuchte Integral

$$\int \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x \sin(x) - \mathrm{e}^x \cos(x)\right)\ .$$

Überzeugen Sie sich durch Ableiten davon, dass diese Lösung korrekt ist.

### 5.6.1 Rechentraining

§ **369** Die Aufgaben in diesem Abschnitt dienen der Übung. Wie viele Sie davon bearbeiten, steht Ihnen frei. Durch Anklicken der Schaltfläche `Hilfe` erhalten Sie einen Hinweis zur Lösung der entsprechenden Aufgabe; über die Schaltfläche `Musterlösung` erhalten Sie bei einigen der Aufgaben eine Musterlösung mit vollständigem Lösungsweg. Und wie immer: Hilfe erst benutzen, wenn es nicht anders geht!

**Aufgabe 149** Integrieren Sie $f(x) = ax\,\mathrm{e}^{bx}$.

Hilfe zur Aufgabe in § 574 Musterlösung in § 589

**Aufgabe 150** Integrieren Sie $f(x) = x\,\ln x$.

Hilfe zur Aufgabe in § 575 Musterlösung in § 590

**Aufgabe 151** Integrieren Sie $f(x) = x^2\,\sin(x)$.

Hilfe zur Aufgabe in § 576 Musterlösung in § 591

**Aufgabe 152** Integrieren Sie $f(x) = x^3\,\mathrm{e}^x$.

Hilfe zur Aufgabe in § 577 Musterlösung in § 592

## 5.7 Abschlusstest

§ **370** Die Aufgaben in diesem Abschnitt sind gleichsam die Prüfungsaufgaben. Sie müssen mindestens 4 der ersten 5 Fragen korrekt beantwortet haben, um in das nächste Lernfeld zu gelangen. Aufgaben 153–155 sind einfach, Aufgaben 156 und 157 etwas anspruchsvoller und Aufgaben 158–160 sind nicht online korrigierbar sondern müssen zur Korrektur eingesandt werden.

**Aufgabe 153** Finden Sie eine Stammfunktion $F(x)$ zu

$$f(x) = 2x^2\sin(x)$$

Markieren Sie die entsprechende Lösung:

- ☐ $(4 + 2x^2)\cos(x) - 4x\sin(x)$ ,
- ☐ $4x\sin(x) + (4 - 2x^2)\cos(x)$ ,
- ☐ $4x\cos(x) - (4 - 2x^2)\cos(x)$ ,
- ☐ $4x\sin(x) - (4 - 2x^2)\cos(x)$ ,
- ☐ $4x\cos(x) - (4 - 2x^2)\sin(x)$ ,
- ☐ $(2x^2 - 4x + 4)\cos(x)$ .

**Aufgabe 154** Finden Sie eine Stammfunktion $G(x)$ zu

$$g(x) = \frac{4x}{x^2+1}$$

Markieren Sie die entsprechende Lösung:

- ☐ $2(x^2-1)^{-1}$ ,
- ☐ $2\ln(x^2-1)$ ,
- ☐ $4\ln(\frac{x^3}{3}-x)\frac{x^2}{2}$ ,
- ☐ $2x\ln(x^2-1)$ ,
- ☐ $2\frac{4/3x^2}{x^2-1}$ .

**Aufgabe 155** Finden Sie eine Stammfunktion $H(x)$ zu

$$h(x) = 3\mathrm{e}^{\sin(x)}\cos(x)$$

Markieren Sie die entsprechende Lösung:

- ☐ $3\mathrm{e}^{\sin(x)}$ ,
- ☐ $3\mathrm{e}^{\cos(x)}$ ,
- ☐ $3\mathrm{e}^{\sin(x)}\sin(x)$ ,
- ☐ $3\mathrm{e}^{\cos(x)}\sin(x)$ ,
- ☐ $3\frac{\mathrm{e}^{\sin(x)}}{\arccos(x)}$ .

**Aufgabe 156** Finden Sie eine Stammfunktion $I(x)$ zu

$$i(x) = \frac{\ln(x^2)}{x^5}$$

Markieren Sie die entsprechende Lösung:

- ☐ $\frac{\ln(x^2)+1}{10x^5}$ ,
- ☐ $4x\cos(x)-(4-2x^2)\cos(x)$ ,
- ☐ $-\frac{\ln(x^2)+1}{8x^4}$ ,
- ☐ $-\frac{\ln(x^2)+1}{10x^5}$ ,
- ☐ $-\frac{\ln(x^2)-1}{6x^4}$ ,
- ☐ $-\frac{\ln(x^2)-1}{8x^4}$ .

**Aufgabe 157** Finden Sie eine Stammfunktion $J(x)$ zu

$$j(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}$$

Markieren Sie die entsprechende Lösung:

- ☐ $\mathrm{e}^x + x + \ln(1+\mathrm{e}^x)$ ,
- ☐ $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2(x+\mathrm{e}^x)}$ ,
- ☐ $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}$ ,
- ☐ $1+\mathrm{e}^x-\ln(1+\mathrm{e}^x)$ ,
- ☐ $\mathrm{e}^x - x - \ln(1+\mathrm{e}^x)$ ,
- ☐ $\frac{\mathrm{e}^x+x}{\mathrm{e}^x}+\ln(|1+\mathrm{e}^x|)$ .

**Aufgabe 158** Die Graphen der Funktionen $\phi(x) = 5 * x - 1$ und $\psi(x) = x^2 - 5x + 20$ schließen ein Volumen ein. Berechnen sie analytisch den Flächeninhalt F.

**Aufgabe 159** Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $k(x) = \cos(x) e^x$.

**Aufgabe 160** Die Geschwindigkeit eines Punktes auf der x-Achse wird durch die Funktion $v(t) = x^3 \mathrm{e}^{-x^2/2}$ beschrieben. Er startet bei $t_0 = 4$ bei $x(t_0) = 0$. Berechnen Sie die Funktion $x(t) = \int v(t)\, \mathrm{d}t$, die seinen Ort beschreibt.

# 6 (Komplexe) Zahlen mit Euler und Taylor

## 6.1 Übersicht und einmal kein Selbsttest

§ **371** Das letzte Lernfeld dieses Vorkurses führt ein in den Übergang zwischen aus der Schule bekannter Mathematik und bereits früh im Studium benötigten neuen mathematischen Fertigkeiten. Auch werden viele aus früheren Lernfeldern des Vorkurses bereits bekannte Themen nochmals angesprochen und in ein neues Umfeld eingeordnet.

§ **372** Da ein großer Teil des Stoffes neu ist oder in einem neuen Zusammenhang behandelt wird, ist ein Selbsttest am Eingang des Lernfeldes nicht sinnvoll. Stattdessen erhalten Sie eine Art Fahrplan durch das verbleibende Lernfeld.

§ **373** Imaginäre Zahlen werden eingeführt, um eine Gleichung der Form $x^2 + 4 = 0$ lösen zu können. Während $x^2 - 4 = 0$ die reelle Lösung $x_{1,2} = \pm 2$ hat, hat $x^2 + 4 = 0$ die imaginäre Lösung $x_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}$ mit $\mathrm{i}^2 = -1$ als Definition der imaginären Einheit i. Komplexe Zahlen setzen sich aus einem reellen und einem imaginären Anteil zusammen. Während natürliche oder reelle Zahlen anschaulich auf dem Zahlenstrahl dargestellt werden können, werden komplexe Zahlen in einer aus einer reellen und einer imaginären Achse aufgespannten Gauß'schen Zahlenebene dargestellt. In dieser Ebene kann man die komplexe Zahl auch mit Hilfe eines Betrages (Abstand zum Ursprung) und einem Argument (Winkel gegenüber der $x$-Achse) darstellen. Diese Interpretation einer komplexen Zahl durch einen Betrag und ein Argument bzw. eine Phase erlaubt eine mathematisch einfache Beschreibung periodischer Vorgänge, die um einen Phase verschoben sind, wie z.B. Strom und Spannung an einem Kondensator oder einer Spule im Wechselstromkreis.

§ **374** Mathematisch erlauben die komplexen Zahlen u.a. eine Verknüpfung der Winkelfunktionen und der Exponentialfunktion – ein Zusammenhang, von dem in der Physik ausgiebig Gebrauch gemacht wird.

## 6.2 Zahlensysteme

### 6.2.1 Wozu?

§ **375** Die ersten Zahlen haben nur dem Zählen gedient. Daher war die Beschränkung auf die Menge $\mathbb{N}$ natürlichen Zahlen ausreichend – eine Null war in diesem Konzept nicht erforderlich, da man keine Null Schafe zählen konnte. Aus gleichem Grund waren natürliche Zahlen lange Zeit für praktische Anwendungen ausreichend:

$$2 \text{ Schafe} + 3 \text{ Schafe} = 5 \text{ Schafe} .$$

Auch die Umkehroperation, die Subtraktion, bereitete keine so lange keine Probleme, wie sie an reale Objekte gekoppelt war: von drei Schafen lassen sich maximal drei Schafe wegnehmen. In diesem Fall braucht man nicht mehr zu zählen, da keine Schafe da sind.

§ **376** Buchführung macht alles etwas schwieriger. So musste plötzlich ein Bauer von seinen fünf Schafen auf Grund einer vergessenen Verpflichtung gegenüber seinem Landesherrn sieben Schafe abliefern. Damit die Schuld der fehlenden Schafe nicht in Vergessenheit geriet, wurde die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ eingeführt. Damit ließ sich die Operation

$$5 \text{ Schafe} - 7 \text{ Schafe} = -2 \text{ Schafe} .$$

zwar nicht physikalisch durchführen, aber die Buchführung funktionierte:

$$5 \text{ Schafe} - 7 \text{ Schafe} = -2 \text{ Schafe} .$$

Diese beiden negativen Schafe sind bei nächster Gelegenheit dadurch zu tilgen, dass zwei reale Schafe beim Landesherren abgeliefert werden, d.h. $-2$ Schafe + 2 Schafe = 0 Schafe machen den Bauern zwar nicht reich aber zumindest schuldenfrei.

§ **377** Die Witwe eines anderen Bauern stand vor dem Problem, das fünf Schafe umfassende Erbe gleichmäßig auf die drei Töchter zu verteilen. Zumindest auf dem Papier ließ sich dies durch Einführung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ lösen:

$$5 \text{ Schafe} : 3 \text{ Töchter} = \frac{5 \text{ Schafe}}{3 \text{ Töchter}} = 1\,\frac{2}{3}\,\frac{\text{Schaf}}{\text{Tochter}} .$$

§ **378** Für Buchführung, Steuer, öffentliche Verwaltung und ähnliche Kulturerrungenschaften sind die drei Systeme 'natürliche Zahlen $\mathbb{N}$', 'ganze Zahlen $\mathbb{Z}$' und 'rationale Zahlen $\mathbb{Q}$' ausreichend. Die Erfordernis der reellen Zahlen entwickelte sich in der Antike aus geometrischen Betrachtungen. So führt die recht einfache Frage nach dem Verhältnis zwischen dem Umfang $U$ eines Kreises und seinem Durchmesser $D$ nicht mehr auf eine rationale Zahl sondern eine transzendente Zahl:

$$\frac{\text{Umfang des Kreises}}{\text{Durchmesser des Kreises}} = \frac{U}{D} = \pi .$$

Ein anderes geometrisches Problem betrifft die Länge $x$ der Diagonalen eines Einheitsquadrats oder formal die Lösung der Gleichung $x^2 = 2$:

$$x = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} .$$

Das Ergebnis ist eine algebraische Zahl. Beide, algebraische und transzendente Zahlen werden mit den rationalen Zahlen zur Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zusammen gefasst. Die Unterscheidung zwischen den beiden Mengen können wir auch noch einmal explizit angeben: eine algebraische Zahl ist jede Zahl, die die Lösung eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Eine transzendente Zahl dagegen ist jede reelle Zahl, die nicht algebraisch ist.

§ **379** Pickt man zufällig eine Zahl aus diesem Zahlenstrahl, so wird dies praktisch immer eine transzendente Zahl sein: zwar gibt es unendlich viele natürliche Zahlen, ebenso unendlich viele ganze, rationale und algebraische Zahlen. Zwischen zwei benachbarten algebraischen Zahlen liegen jedoch stets unendlich viele transzendente Zahl.

§ **380** Alle bisher betrachteten Zahlenräume lassen sich graphisch auf einem Zahlenstrahl darstellen. Dieser gibt eindeutig die Relation zwischen zwei Elementen dieser Menge: die eine Zahl kann kleiner, größer oder gleich der anderen sein. Die entsprechenden Mengen von Zahlen werden als geordnete Mengen bezeichnet: zu jedem Paar von Zahlen $x_1$ und $x_2$ mit $x_1 \neq x_2$ lässt sich feststellen ob $x_1 > x_2$ oder $x_1 < x_2$ – die Zahlen lassen sich nach ihrer Größe ordnen.

§ **381** Die bisher betrachteten Zahlenräume bilden ein hierarchisches System: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, d.h. die natürlichen Zahlen sind Teilmenge der ganzen Zahlen, diese sind wiederum Teilmenge der rationalen Zahlen, die ihrerseits wieder Teilmenge der reellen Zahlen sind. Und alle Mengen lassen sich eindimensional mit Hilfe des Zahlenstrahls darstellen und sind geordnet.

§ **382** Und die imaginären und komplexen Zahlen? Die Erweiterung unseres Zahlenraums auf reelle Zahlen erlaubt z.B. die Behandlung einer quadratischen Gleichung wie $x^2 - 4x - 29 = 0$ mit den Lösungen

$$x^2 - 4x - 29 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 29} = 2 \pm \sqrt{33}\ .$$

Vertauschen wir im letzten Term das Vorzeichen, so erhalten wir die Gleichung $x^2 - 4x + 29 = 0$. Die Lösungen

$$x^2 - 4x + 29 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 29} = 2 \pm \sqrt{-25} \tag{24}$$

sind in $\mathbb{R}$ nicht definiert: Quadrate reeller Zahlen sind stets positiv, d.h. die Umkehrfunktion $\sqrt{\ }$ ist nur für Radikanden größer oder gleich Null definiert.

§ **383** Der problematische Teil des Ausdrucks ist die in $\mathbb{R}$ nicht definierte Größe $\sqrt{-25}$. Etwas hemdsärmelig können wir diesen Ausdruck umschreiben als

$$\sqrt{-25} = \sqrt{(-1) \cdot 25} = \sqrt{25}\,\sqrt{-1} = 5\,\sqrt{-1}\ . \tag{25}$$

Den Ausdruck $\sqrt{-1}$ definieren wir als die imaginäre Einheit i. Damit gibt (25) eine imaginäre Zahl, nämlich 5i. Die Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl, wie in (24), bezeichnen wir als komplexe Zahl.

§ **384** Die imaginären Zahlen lassen sich nicht als einfache Erweiterung der reellen Zahlen auf dem Zahlenstrahl darstellen sondern benötigen einen eigenen Zahlenstrahl. Daher kann man die Summe $2 \pm 5\mathrm{i}$ aus (24) nicht zu einer Zahl zusammenfassen sondern muss die komplexe Zahl als Summe aus dem Realteil 2 und dem Imaginärteil 5 stehen lassen. Graphisch werden diese Zahlen in einer Zahlenebene dargestellt mit dem Realteil auf der Abszizze und dem Imaginärteil auf der Ordinate. Daher sind komplexe Zahlen nicht geordnet: zwischen Zwei komplexen Zahlen lässt sich keine Beziehung 'ist größer als' bzw. 'ist kleiner als' herstellen.

**Verständnisfrage 12** Setzt sich die Hierarchie der Zahlensysteme auch zu den komplexen Zahlen fort, d.h. ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$? Hinweis in § 593

### 6.2.2 Grundbegriffe komplexe Zahlen

§ **385** Die formale Grundlage für die Einführung des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen erfolgte 1777 durch Euler. Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung im Reellen, d.h. für $x \in \mathbb{R}$. Euler war bereit, einen neuen Körper $\mathbb{C}$ einzuführen derart, dass es ein $z \in \mathbb{C}$ gibt, dass die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ löst. Diese unbekannte Zahl bezeichnete er als die imaginäre Einheit i, die Lösung seiner Gleichung war damit $z_{1,2} = \pm\mathrm{i}$.

**Definition**: Der Ausdruck i heißt die *imaginäre Einheit*. Er ist definiert als

$$\mathrm{i}^2 = -1\ . \tag{26}$$

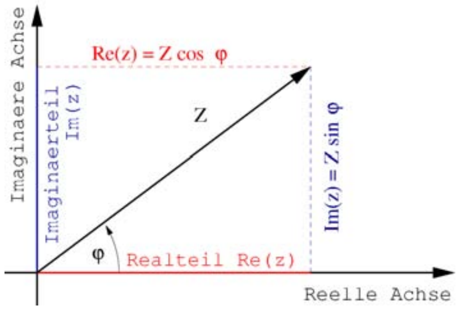



Abbildung 36: Darstellung komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene. Der Realteil wird auf der Abszisse, der Imaginärteil auf der Ordinate abgetragen

§ **386** Was an i so imaginär ist, ist schwer zu verstehen. Die Bezeichnung geht auf die Vorstellung zurück, dass Gleichungen der Form $x^2 = 2$ eine geometrische Bedeutung haben, in dem sie z.B. die Länge der Diagonale eines Einheitsquadrats beschreibt. Einer Gleichung der Form $x^2 = -2$ lässt sich jedoch keine geometrische Bedeutung zuordnen. Daher wurden diese Gleichungen lange Zeit von den Mathematikern als bedeutungslos betrachtet und ignoriert. Auf Grund der fehlenden geometrischen Bedeutung von $x^2 = -1$ ist auch die Lösung dieser Gleichung ein Konstrukt, dass keinen realen Hintergrund hat, eine Imagination. Heutzutage ist es schwer zu verstehen, warum imaginäre Zahlen weniger real sein sollen als reelle.

§ **387** Die in der Motivation verwendete Darstellung in (24) oder (25) suggeriert eine Definition der Form $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Als Merkregel oder Gedächtnisstütze mag das in Ordnung sein. Es handelt sich jedoch nicht um eine mathematisch saubere Definition: so liefert der Ausdruck $(+\sqrt{-1})\,(+\sqrt{-1})$ wegen $(+\sqrt{-1})\,(+\sqrt{-1}) = +\sqrt{(-1)\,(-1)} = +\sqrt{1} = +1$ ein Ergebnis, das im Widerspruch zu (26) steht.

**Definition**: Ein Produkt aus einer reellen Zahl $b$ und der imaginären Einheit wird als *imaginäre Zahl* $b\mathrm{i}$ bezeichnet.

§ **388** Imaginäre Zahlen können, ebenso wie reelle Zahlen, in Form eines Zahlenstrahls dargestellt werden: sie sind geordnet. Allerdings können imaginäre Zahlen nur Gleichungen der Form $z^2 + b^2 = 0$ lösen. Die quadratische Gleichung in allgemeiner Form dagegen kann auf eine komplexe Lösung führen wie in (24).

**Definition**: Die Summe aus einer reellen Zahl $a$ und einer imaginären Zahl $b\mathrm{i}$ ist die *komplexe Zahl* $z = a + b\mathrm{i}$.

§ **389** Eine komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ besteht aus einem Realteil $\Re(z) = a$ und einem Imaginärteil $\Im(z) = b$.

### 6.2.3 Darstellung in der komplexen Ebene

§ **390** Komplexe Zahlen sind, ebenso wie Vektoren, geordnete Paare reeller Zahlen. Der erste Teil des Paares ist der Real-, der zweite der Imaginärteil. Diese Verwandtschaft zu Vektoren zeigt sich auch in der graphischen Darstellung in der Gauß'schen Zahlenebene,[4] siehe Abb. 36. Diese besteht aus zwei reellen Zahlengraden, die auf einander senkrecht stehen. Auf der Abszisse wird der Realteil abgetragen, auf der Ordinate der Imaginärteil. Die komplexe Zahl selbst wird durch einen Zeiger $z$ dargestellt.

§ **391** Die Interpretation der Gauß'schen Ebene in kartesischen Koordinaten erlaubt es, dem Zeiger $a + b\mathrm{i}$ die Koordinaten $(a, b)$ zu zuordnen. Diese Darstellung weist nochmals auf das geordnete Zahlenpaar hin.

[4] Gauß'sche Zahlenebene ist der im deutschsprachigen Raum übliche Begriff. Im englischen Sprachraum wird häufig 'Argand plane' verwendet, korrekter wäre vielleicht sogar Wessel-Ebene: Caspar Wessel veröffentlichte die geometrische Interpretation der komplexen Zahlen 1796, Jean-Robert Argand seine 1806. Gauß dagegen veröffentlichte die geometrische Interpretation erst 1831.

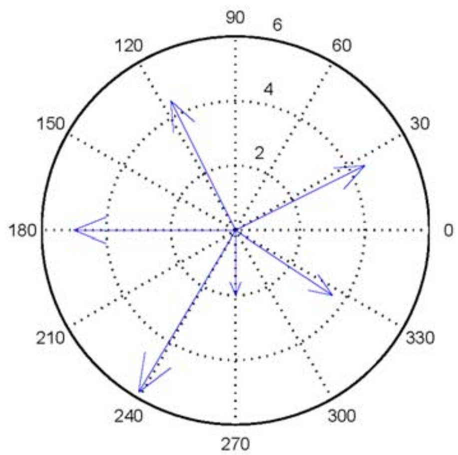



Abbildung 37: Darstellung komplexer Zahlen im Polardiagramm (Kompassplot)

§ **392** Interpretieren wir Abb. 36 in Polarkoordinaten (Abstand vom Ursprung und Winkel gegenüber der $x$-Achse anstelle der Abschnitte entlang reeller und imaginärer Achse), so erhalten wir die trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen:

$$z = a + \mathrm{i}b = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

mit

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{und} \qquad \varphi = \arg z = \arctan\frac{b}{a}\,. \tag{27}$$

Darin ist $|z|$ der Betrag der komplexen Zahl und $\varphi = \arg z$ ihr Argument. Bei der Bestimmung des Arguments ist Vorsicht geboten: üblicherweise ist arctan im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ definiert, $\arg z$ dagegen kann Werte aus dem Intervall $[0, 2\pi]$ annehmen. Daher sollte man sich bei der Bestimmung des Arguments stets vorher überlegen, in welchem Quadranten $z$ liegt.

§ **393** Die trigonometrische Form komplexer Zahlen erlaubt eine alternative Darstellung in einem Polardiagramm statt der Gauß'schen Zahlenebene. Ein Polardiagramm können Sie sich als ein rundes Koordinatensystem vorstellen, vgl. Abb. 37. Die Koordinaten in diesem System sind der Abstand vom Ursprung (Betrag), angedeutet durch die konzentrischen Kreise. sowie der Winkel bzw. das Argument angedeutet durch die radialen Strahlen. Die einzelnen komplexen Zahlen werden hier entsprechend ihrem Betrag und ihrem Argument eingetragen – in Abb. 37 sind die komplexen Zahlen aus Aufgabe 162 eingetragen. Die Gauß'sche Zahlenebene ist natürlich indirekt auch in diesem Polarplot enthalten: die reelle Achse entspricht der horizontalen, die imaginäre der vertikalen. Und die Skalierung dieser Achsen können wir aus den Schnitten mit den Kreisen des Polardiagramms direkt ablesen.

§ **394** Die Darstellung in der komplexen Ebene veranschaulicht einen Unterschied zwischen den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und den bisher betrachteten Zahlensystemen: so lange wir die Zahlen auf einem Zahlenstrahl darstellen konnten, waren sie geordnet. Die Zahlen ließen sich vergleichen: zwei Zahlen $a$ und $b$ waren gleich, $a = b$, oder es galt $a < b$ oder $b < a$, entsprechend der geometrischen Anordnung. In der komplexen Ebene ist eine derartige Ordnung nicht möglich; eine Ordnung nach dem Betrag der komplexen Zahl wäre zwar möglich, würde aber eben nur den Betrag als den Abstand der Zahl vom Ursprung des Koordinatensystems ordnen, nicht die Zahlen selbst. Gleichheit zweier komplexer Zahlen lässt sich aber dennoch feststellen:

**Definition**: Zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1$ und $z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$ sind *gleich*, $z_1 = z_2$, wenn die Real- und Imaginärteile gleich sind, d.h. $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$. Oder in kompakterer Schreibweise

$$z_1 = z_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Re(z_1) = \Re(z_2) \;\wedge\; \Im(z_1) = \Im(z_2)\,.$$

§ **395** Ein Spezialfall der Gleichheit ist die Identität mit Null. Eine komplexe Zahl ist dann gleich Null, wenn ihr Real- und ihr Imaginärteil beide Null sind:

$$z = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Re(z) = 0 \;\wedge\; \Im(z) = 0 \,.$$

### 6.2.4 Addition und Multiplikation: sind komplexe Zahlen Vektoren?

§ **396** NEIN! Die Erinnerung an Vektoren durch die Interpretation komplexer Zahlen als Paare geordneter reeller Zahlen ist für das Verständnis von Gauß'scher Zahlenebene und trigonometrischer Darstellung praktisch und hilfreich. Auch lassen sich auf diese Weise die Regeln für die Addition und Subtraktion leicht verstehen:

**Definition**: Komplexe Zahlen werden *addiert/subtrahiert*, in dem man ihre reellen und imaginären Anteile jeweils getrennt addiert/subtrahiert:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + \mathrm{i}b_1) \pm (a_2 + \mathrm{i}b_2) = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{i}(b_1 \pm b_2) \,. \tag{28}$$

§ **397** Diese Behandlung erinnert an die komponentenweise Addition von Vektoren; auch graphisch werden die Zeiger der beiden komplexen Zahlen in der Gauß'schen Ebene wie Vektoren addiert. Diese Analogie erstreckt sich auch auf die Multiplikation einer komplexen Zahl bzw. eines Vektors mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, da dieses als wiederholte Ausführung der Addition interpretiert werden kann.

§ **398** Bei der Multiplikation der beiden komplexen Zahlen $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1$ und $z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$ jedoch versagt dieses Verfahren. Die geordneten Paare $(a_1, b_1)$ und $(a_2, b_2)$ würden, in Analogie zum Skalarprodukt, das Ergebnis $a_1a_2 + b_1b_2$ liefern. Führen wir die Multiplikation der beiden komplexen Zahlen jedoch unter Berücksichtigung von $\mathrm{i}^2 = -1$ von Hand aus, so erhalten wir (das korrekte Ergebnis)

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + \mathrm{i}b_1)\,(a_2 + \mathrm{i}b_2) = a_1a_2 + \mathrm{i}a_1b_2 + \mathrm{i}b_1a_2 + \mathrm{i}^2 b_1b_2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + \mathrm{i}(a_1b_2 + a_2b_1) \neq a_1a_2 + b_1b_2 \,. \end{aligned} \tag{29}$$

§ **399** Diese Definition der Multiplikation führt bei der Bestimmung des Betrages einer komplexen Zahl zu Schwierigkeiten. Für einen Vektor $\vec{r}$ ist der Betrag über das Skalarprodukt definiert: $r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$. Multiplikation einer komplexen Zahl $z = a + \mathrm{i}b$ mit sich selbst ergibt

$$z\,z = (a + \mathrm{i}b)\,(a + \mathrm{i}b) = (a^2 - b^2) + 2\mathrm{i}ab \,.$$

Dieser Ausdruck kann nicht den Betrag beschreiben, da der Betrag eine reelle Größe ist, d.h. der Imaginärteil muss verschwinden. Dies lässt sich erreichen, in dem man die Zahl $z$ nicht mit sich selbst sondern einer Variante $z^* = a - \mathrm{i}b$ ihrer selbst multipliziert:

$$|z| = \sqrt{z^* z} = \sqrt{(a - \mathrm{i}b)\,(a + \mathrm{i}b)} = \sqrt{a^2 - \mathrm{i}^2 b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \,. \tag{30}$$

Diese Größe $z^*$ wird als das konjugiert Komplexe von $z$ bezeichnet:

**Definition**: Das *konjugiert Komplexe* einer komplexen Zahl $z = a + \mathrm{i}b$ ist die komplexe Zahl $z^*$

$$z^* = \overline{z} = a - \mathrm{i}b \,.$$

§ **400** Graphisch erhält man die konjugiert komplexe Zahl durch Spiegelung an der Abszisse, siehe Abb. 38. In der trigonometrischen Darstellung wird aus dem geordneten Paar $(r, \varphi)$ das Paar $(r, -\varphi)$.

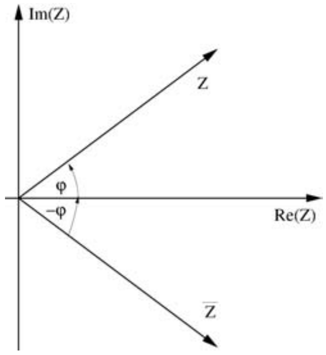



Abbildung 38: Das konjugiert komplexe $\overline{Z}$ einer komplexen Zahl ergibt sich durch (a) Spiegelung an der Abszisse (graphisch), (b) Vertauschen des Vorzeichens vor dem Imaginärteil ($(a \pm \mathrm{i}b) \rightarrow (a \mp \mathrm{i}b)$) oder (c) Vorzeichenwechsel beim Argument ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \rightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$)

§ **401** Die konjugiert komplexe Zahl wird auch für die Umkehroperation zur Multiplikation, die Division von komplexen Zahlen benötigt. Das Inverse zur Addition einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ ergibt sich wie bei den reellen Zahlen durch Multiplikation mit $-1$, d.h. das Inverse ist die komplexe Zahl $-z = -a - b\mathrm{i}$. Die Umkehrung der Multiplikation mit einer Zahl $z$ müsste in Analogie zur Umkehrung der Multiplikation mit reellen Zahlen durch Multiplikation mit dem Kehrwert $z^{-1}$ erfolgen. Dieser Ausdruck hat die Form

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + b\mathrm{i}}$$

und ist nicht definiert, da die Multiplikationsregeln für komplexe Zahlen uns bei diesem Ausdruck nicht weiter helfen und eine Division nicht definiert wurde. Erweitern wir dagegen $z$ mit seinem konjugiert komplexen, so entsteht der Ausdruck

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{a - b\mathrm{i}}{a^2 + b^2} .$$

Da der Nenner reell ist, kann mit diesem Ausdruck entsprechend den Regeln der komplexen Zahlen multipliziert werden. Für die Division zweier komplexer Zahlen gilt also, dass mit dem konjugiert Komplexen des Nenners erweitert werden muss:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1\mathrm{i}}{a_2 + b_2\mathrm{i}} = \frac{(a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 - b_2\mathrm{i})}{(a_2 + b_2\mathrm{i})(a_2 - b_2\mathrm{i})} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + \mathrm{i}(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} .$$

§ **402** Die Eingangsfrage, ob komplexe Zahlen Vektoren sind, haben wir bereits mit Nein beantwortet. Die Umkehrung, d.h. die Frage, ob Vektoren $\vec{r}$ aus komplexen Zahlen bestehen können, müssen wir dagegen bejahen. Der Begriff des Vektors lässt sich von geordneten Paaren reeller Zahlen auf geordnete Paare komplexer Zahlen erweitern: auch $r_i \in \mathbb{C}$ ist mit dem mathematischen Konstrukt Vektor verträglich, auch wenn die Anschauung dann versagt. Für Vektoren mit $r_i \in \mathbb{C}$ gelten die gleichen Rechenregeln wie für Vektoren mit $r_i \in \mathbb{R}$ – mit einer wichtigen Ausnahme: da das Skalarprodukt auch zur Normierung verwendet wird, d.h. den Betrag geben muss, wird es aus dem zweiten Vektor und dem konjugiert komplexen des ersten Vektors gebildet. Die konventionelle Version des Skalarprodukts würde für den Vektor $\vec{r} = (0, 0, \mathrm{i})$ zu $r^2 = -1$ und damit einem imaginären Betrag führen. Das Produkt $\vec{r}^* \cdot \vec{r} = (0, 0, -\mathrm{i}) \cdot (0, 0, \mathrm{i})$ dagegen hat das Ergebnis $-\mathrm{i}^2 = 1$.

### 6.2.5 Rechentraining

**Aufgabe 161** Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(a) \quad x^2 - 9 &= 0 , \\
(b) \quad x^2 + 9 &= 0 , \\
(c) \quad x^2 + 4x + 13 &= 0 , \\
(d) \quad x^2 + 4x - 5 &= 0 , \\
(e) \quad x^2 - 6x &= 0 , \\
(f) \quad x^2 - 6x + 34 &= 0 , .
\end{aligned}$$

Geben Sie bei jeder der Lösungen an, ob es sich um eine reelle, eine imaginäre oder eine komplexe Lösung handelt. Gibt es quadratische Gleichungen, bei denen eine der Lösungen reell, die andere komplex ist?

Hilfe zur Aufgabe in § 594 Musterlösung in § 595

**Aufgabe 162** Wandeln Sie die folgenden komplexen Zahlen aus der kartesischen in die trigonometrische Darstellung um:

$$\begin{aligned} z_1 &= 4+2\mathrm{i}\,, \\ z_2 &= -5\,, \\ z_3 &= 3-2\mathrm{i}\,, \\ z_4 &= -2\mathrm{i}\,, \\ z_5 &= -2+4\mathrm{i}\,, \\ z_6 &= -3-5\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Überprüfen Sie Ihre Lösung auch zeichnerisch! Musterlösung in § 596

**Aufgabe 163** Wandeln Sie die folgenden komplexen Zahlen aus der trigonometrischen in die kartesische Darstellung um:

$$\begin{aligned} |z_1| = 1 \quad &\text{und} \quad \varphi_1 = 45°\,, \\ |z_2| = 2 \quad &\text{und} \quad \varphi_2 = 120°\,, \\ |z_3| = 3 \quad &\text{und} \quad \varphi_3 = 270°\,, \\ |z_4| = 4 \quad &\text{und} \quad \varphi_4 = 30°\,, \\ |z_5| = 5 \quad &\text{und} \quad \varphi_5 = -30°\,, \\ |z_6| = 6 \quad &\text{und} \quad \varphi_6 = 135°\,. \end{aligned}$$

Überprüfen Sie Ihre Lösung auch zeichnerisch! Musterlösung in § 597

**Aufgabe 164** Bestimmen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} z_1 &= (4+3\mathrm{i})-(2-\mathrm{i})\,, \\ z_2 &= (4+3\mathrm{i})\cdot(2-\mathrm{i})\,, \\ z_3 &= 3\,(2-\mathrm{i})+5\,(2+\mathrm{i})\,, \\ z_4 &= 3\,(2-\mathrm{i})\cdot 5\,(2+\mathrm{i})\,, \\ z_5 &= (3+3\mathrm{i})^2\,, \\ z_6 &= (-3-2\mathrm{i})\cdot(-4-3\mathrm{i})\,. \end{aligned}$$

Musterlösung in § 598

**Aufgabe 165** Bilden Sie die folgenden Quotienten komplexer Zahlen:

$$z_1 = \frac{4-2\mathrm{i}}{2-4\mathrm{i}}\,, \quad z_2 = \frac{4+2\mathrm{i}}{2-4\mathrm{i}}\,, \quad z_3 = \frac{4+2\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}} \quad \text{und} \quad z_4 = \frac{4-2\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}}\,.$$

Musterlösung in § 599

## 6.3 Komplexe Zahlen und andere mathematische Objekte

§ **403** Die Verwandtschaft und Verschiedenheit von komplexen Zahlen und Vektoren haben wir bereits am Ende des voran gegangenen Abschnitts betrachtet. In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, ob komplexe Zahlen ebenso wie reelle Zahlen eine Gruppe bezüglich einer Verknüpfung oder gar einen Körper bezüglich zwei Verknüpfungen bilden. Darauf aufbauend werden wir einen ersten vorsichtigen Blick auf Funktionen komplexer Zahlen werfen.

### 6.3.1 Komplexe Zahlen und Körper

§ **404** Wie die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen bildet auch die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen einen Körper. Die folgende Auflistung der Kriterien, die $\mathbb{C}$ zu einem Körper machen, kann gleichzeitig als Zusammenfassung der Rechenregeln für komplexe Zahlen dienen.

§ **405** $\mathbb{C}$ bildet einen Körper, da die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. es existieren zwei Verknüpfungen, die Addition und die Multiplikation, bezüglich derer $\mathbb{C}$ eine Gruppe bildet.
2. $\mathbb{C}$ ist eine Gruppe bezüglich der Addition, da
   (a) die Addition eine interne Verknüpfung ist: $z_1 + z_2 = z \in \mathbb{C}$.
   (b) das Assoziativgesetz gilt: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
   (c) ein neutrales Element existiert: $z + 0 = z$.
   (d) ein negatives Element existiert: $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists -z : \ z + (-z) = 0$.
3. $\mathbb{C}$ ist eine Gruppe bezüglich der Multiplikation, da
   (a) die Multiplikation eine interne Verknüpfung ist: $z_1 z_2 = z \in \mathbb{C}$.
   (b) das Assoziativgesetz gilt: $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$.
   (c) ein neutrales Element existiert: $1z = z$.
   (d) ein inverses Element existiert: $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\ \exists z^{-1} : \ z\, z^{-1} = 1$.
4. die Verknüpfungen sind durch ein Distributivgesetz verbunden: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.
5. es gilt die nicht-triviale Aussage $0 \neq 1$, d.h. die neutralen Elemente der beiden Verknüpfungen unterscheiden sich.

Da $\mathbb{C}$ sowohl bezüglich der Addition als auch bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe bildet, gilt für beide Verknüpfungen auch ein Kommutativgesetz:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad \text{und} \qquad z_1 z_2 = z_2 z_1 \ .$$

§ **406** Auch der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erfüllt alle obigen Kriterien. Der Unterschied zwischen den beiden Körpern betrifft die Möglichkeit der Anordnung der Zahlen: die reellen Zahlen sind geordnet, d.h. zwei beliebige Zahlen lassen sich durch eine der drei Relationen $<$, $>$ oder $=$ ordnen. Die reellen Zahlen bilden daher einen geordneten Körper. Für komplexe Zahlen lässt sich zwar Gleichheit feststellen, die Relationen $<$ und $>$ sind jedoch nicht definiert. $\mathbb{C}$ bildet daher zwar einen Körper jedoch keinen geordneten Körper.

### 6.3.2 Funktionen mit komplexen Argumenten

§ **407** Wir haben Funktionen als eine eindeutige Abbildungen von Elementen eines Definitionsbereichs auf Elemente eines Wertebereichs kennen gelernt. Für die meisten gebräuchlichen Funktionen haben wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder Teilmengen davon als Definitionsbereich verwendet; lediglich bei den Folgen und Reihen war der Definitionsbereich auf die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ beschränkt. Lassen sich auch Funktionen mit komplexen Argumenten konstruieren? Prinzipiell spricht nichts dagegen, da eine Funktion nur eine (eindeutige) Abbildung von Elementen eines Definitionsbereichs auf die eines Wertebereichs. Mit $\mathbb{C}$ als Definitionsbereich wäre es allerdings auch sinnvoll, $\mathbb{C}$ als Wertebereich zu verwenden: die einfachste Funktion $z^2$ haben wir bereits für ein Beispiel in der vorletzten Teilaufgabe von Aufgabe 164 verwendet. Dort haben wir als Ergebnis eine imaginäre Zahl erhalten – $\mathbb{R}$ wäre also nicht ausreichend als Wertebereich.

§ **408** Eine Darstellungsmöglichkeit für Funktionen in $\mathbb{R}$ ist der Funktionsgraph; bei einer Funktion $f(x)$ einer Variablen $x$ erhalten wir eine zweidimensionale Darstellung mit der unabhängigen Variablen auf der Abszisse und der abhängigen auf der Ordinate. Der Funktionsgraph gibt uns einen schnellen Überblick über die Eigenschaften der Funktion. Der Funktionsgraph einer Funktion $f(z)$ einer komplexen Variablen $z$ lässt sich nicht in einem zweidimensionalen Koordinatensystem darstellen, da die graphische Darstellung der unabhängigen

Variablen $z$ bereits ein zweidimensionales System benötigt. Da die Funktionswerte einer komplexwertigen Funktion ebenfalls komplexe Zahlen sein können und damit ein zweidimensionales System benötigen, wäre für eine graphische Darstellung ein vierdimensionales Koordinatensystem erforderlich. Allerdings kann es manchmal sinnvoll sein zur Illustration den Betrag des komplexen Funktionswertes gegen die komplexe Ebene aufzutragen. Gelegentlich kann es auch sinnvoll sein, die unabhängige und abhängige Variable in jeweils einer eigenen komplexen Ebene darzustellen.

§ **409** Eine komplexe Funktion ordnet einer unabhängigen komplexen Variablen $z = x + \mathrm{i}y$ durch eine Zuordnungsvorschrift eine oder mehrere komplexe Variablen $w$ zu:

$$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \ .$$

Darin sind $u$ und $v$ reelle Funktionen von $x$ und $y$. Diese Funktionen unterscheiden sich von denen, die wir bisher kennen gelernt haben nur dadurch, dass die Funktionswerte $u$ und $v$ von zwei unabhängigen Variablen $x$ und $y$ abhängen. Graphisch würden wir $u(x, y)$ in einem dreidimensionalen Koordinatensystem darstellen mit $x$ und $y$ als der Ebene der unabhängigen Variablen und jedem Punkt der Ebene zugeordnet auf der dritten Achse der Funktionswert. Eine derartige Darstellung entspricht dem Relief eines Gebirges: die Höhe $h$ wird als Funktion $h(x, y)$ der geographischen Breite $x$ und der geographischen Länge $y$ dargestellt.

§ **410** Die Kombination der beiden reellen Funktionen gemäß der obigen Vorschrift führt jedoch zu einem wichtigen Unterschied zwischen Funktionen reeller und komplexer Variablen: Funktionen reeller Variablen sind eindeutig, Funktionen komplexer Variablen können eindeutige Zuordnungsvorschriften sein, müssen es jedoch nicht. Im Gegensatz zur reellen Funktion verliert damit eine Funktion mit komplexen Argumenten die Eindeutigkeit.

§ **411** Wenn die Eindeutigkeit schon problematisch ist, wie sieht es dann mit den anderen Grundbegriffen zur Beschreibung von Funktionen aus? Der Begriff der Monotonie ist sicherlich nicht auf komplexwertige Funktionen übertragbar: Monotonie überprüft die Anordnung von unabhängigen und abhängigen Variablen. Komplexe Zahlen lassen sich jedoch nicht ordnen.

§ **412** Anders sieht es mit dem Begriff des Grenzwerts aus. Hier lassen sich die Definitionen anpassen: zwar sind Argument und Funktionswert nicht geordnet, jedoch lässt sich ein Abstand zwischen den Argumenten und den Funktionswerten bilden. Statt einer linearen $\varepsilon$-Umgebung entlang des Zahlenstrahls betrachten wir einen Kreis mit Radius $\varepsilon$; entsprechendes auch für $\delta$.

§ **413** Da der Begriff des Grenzwerts auf komplexwertige Funktionen übertragbar ist, ist es der Begriff der Stetigkeit auch. Gemäß Definition ist eine Funktion stetig in einem Punkt, wenn (a) der Grenzwert in diesem Punkt existiert, (b) die Funktion in diesem Punkt definiert ist und (c) Grenzwert und Funktionswert in diesem Punkt übereinstimmen. Punkt (a) ist nach § 412 überprüfbar, die anderen beiden Punkte sind es ebenfalls. Daher kann auch der Begriff der Stetigkeit in einem Punkt übertragen werden. Wie bei reellen Funktionen ist die Stetigkeit der Funktion in einem Gebiet gegeben, wenn die Funktion in allen Punkten dieses Gebiets stetig ist.

§ **414** Diese wenigen Anmerkungen sollen bei Ihnen die Vorstellung wecken, dass komplexwertige Funktionen mit den bereits von reellen Funktionen bekannten Begriffen betrachtet werden können. Technisch sind wir dazu jedoch noch nicht in der Lage – diese Details werden in späteren Vorlesungen geliefert.

## 6.4 Taylor Entwicklung

§ **415** Ein ganz anderer Themenkomplex, der eigentlich nichts mit komplexen Zahlen zu tun hat aber dessen Anwendung an diesen sehr anschaulich gezeigt werden kann, ist die Taylor-Entwicklung. Keine Panik, dieses Thema wird in den Anfangsvorlesungen nochmals behandelt – Sie müssen diesen Abschnitt nicht bis in die letzten Details verstehen, aber Sie sollten ihn gründlich durcharbeiten und Ihre Fragen zusammen stellen, so dass wir in der Präzensphase des Vorkurses darauf eingehen können.

§ **416** Durch eine Taylor-Entwicklung wird eine Funktion durch eine Potenzreihe angenähert. Konvergiert diese Reihe, so ist es ausreichend, die ersten Terme zu berücksichtigen; die höheren Potenzen können vernachlässigt werden. Die Anwendungen einer derartigen Reihenentwicklung in Mathematik und Physik sind vielfältig:

- unbekannte Funktionswerte lassen sich aus bekannten abschätzen (z.B. § 427).
- Näherungen für Funktionen sind möglich. Damit lässt sich z.B. formal begründen, warum in der Physik beim Fadenpendel der Sinus des Auslenkungswinkels durch den Winkel ersetzt werden kann (und abschätzen, bis zu welchen Winkeln dies zulässig ist).
- die Potenzreihenentwicklung erlaubt es, den Zusammenhang zwischen verschiedenen transzendenten Funktionen herzustellen, ein Beispiel ist die Euler Formel (38), die die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus mit der Exponentialfunktion verknüpft.

### 6.4.1 Potenzreihen

§ **417** Potenzreihen lassen sich durch allgemeine Potenzen von $x$ darstellen. Ein Glied einer solchen Potenzreihe hat die Form $a_n(x-x_0)^n$. Damit lässt sich eine Potenzreihe wie folgt definieren:

**Definition**: *Potenzreihen* sind unendliche Reihen der Form

$$\begin{aligned} S(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x-x_0)^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i \ . \end{aligned}$$

Ein einfacher Spezialfall ist die Potenzreihe um $x_0 = 0$:

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \ .$$

§ **418** Ob eine Potenzreihe konvergiert und wenn ja, gegen welchen Wert, hängt von der Variablen $x$ ab. Ist Konvergenz gegeben, so sagt man 'Die Potenzreihe konvergiert gegen die Funktion $S(x)$' oder 'Die Funktion $S(x)$ kann durch eine Potenzreihe dargestellt werden.'

**Satz**: Konvergiert eine Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ für ein beliebiges, von Null verschiedenes $x = x_0$, so konvergiert die Reihe absolut für jedes beliebige $x$ mit $|x| < |x_0|$.

§ **419** Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich ein sehr hilfreiches Konzept, der Konvergenzbereich oder Konvergenzradius, einführen. Wir gehen davon aus, dass die Potenzreihe irgendwo divergent ist. Für $x = 0$ dagegen ist sie in jedem Fall konvergent. Also muss es ein größtes $x_0$ geben, für das die Potenzreihe noch konvergiert. Dieses $x_0$ definiert den Konvergenzradius $x_0$ oder Konvergenzbereich $[-x_0, x_0]$. Die Potenzreihe konvergiert dann an jedem Punkt innerhalb des Konvergenzradius bzw. des Konvergenzgebietes absolut.

§ **420** Der Konvergenzradius lässt sich mit Hilfe des Quotienten-Tests bestimmen:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| \begin{cases} < 1 & \text{konvergent} \\ = 1 & ? \\ > 1 & \text{divergent} \end{cases} \ .$$

Da der Quotient $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ nicht von $x$ abhängt, lässt sich mit seiner Hilfe der Konvergenzradius $R$ definieren als:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

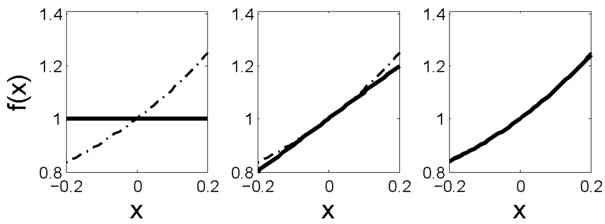



Abbildung 39: Taylor Entwicklung von $f(x) = 1/(1-x)$ (gestrichelt) aus § 425 in nullter (links), erster (Mitte) und zweiter (rechts) Ordnung (jeweils durchgezogen)

unter der Voraussetzung, dass der geforderte Grenzwert existiert und positiv ist. Für einen verschwindenden Quotienten wird der Konvergenzradius als $R = \infty$ definiert, d.h. die Reihe konvergiert unabhängig vom gewählten $x$.

§ **421** Konvergente Potenzreihen können wie Funktionen behandelt werden. Insbesondere gelten die folgenden Rechenregeln:

- eine konvergente Potenzreihe kann gliedweise integriert und differenziert werden. Die so erhaltenen Reihe konvergiert im Konvergenzbereich gegen die Ableitung bzw. das Integral.
- zwei Potenzreihen können addiert oder subtrahiert werden, das Ergebnis konvergiert zumindest im Überlappungsbereich der Konvergenzbereiche beider Funktionen gegen die Summe bzw. Differenz,

Die Rechenregeln werden wir im folgenden Abschnitt ebenso wie bei der Herleitung der Euler Formel verwenden.

### 6.4.2 Taylor Entwicklung

§ **422** Eine konvergierende Potenzreihe konvergiert gegen eine Funktion $f(x) = S(x)$. Umgekehrt lässt sich dann die Funktion $f(x)$ auch als eine Potenzreihe darstellen. Das Taylor Theorem stellt das Regelwerk für diese Entwicklung einer Funktion auf:

**Taylor Theorem**: Stetige Funktionen $f(x)$, für die in einem Bereich $a < x < b$ alle Ableitungen existieren und stetig und beschränkt sind, können als *Taylor Reihe* dargestellt werden:

$$f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^n f(a)}{\mathrm{d}x^n} \frac{(b-a)^n}{n!} \,. \tag{31}$$

§ **423** Die Taylor Entwicklung einer Funktion um einen Punkt, an dem diese nicht definiert ist, ist nicht möglich. Als Beispiel sei die Funktion $f(x) = 1/x$ an der Stelle $x = 0$ betrachtet. Die Ableitungen von $x^{-1}$ ergeben stets Funktionen der Form $x^{-n}$, d.h. diese sind bei $x = 0$ ebenfalls nicht definiert.

§ **424** Um eine Vorstellung von den in der Taylor Entwicklung steckenden Möglichkeiten zu erhalten, schreiben wir die Reihe (31) explizit auf:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots \,.$$

In dieser Darstellung steckt bereits eine wichtige Anwendung: kennen wir den Funktionswert an der Stelle $a$ sowie die Ableitungen an dieser Stelle, so lässt sich daraus der Funktionswert an der Stelle $b$ konstruieren. Diese Idee steckt für kleine Wegstückchen bereits im Differential, die Taylor Entwicklung hat den Vorteil, dass die Berücksichtigung der höheren Ableitungen eine genauere Annäherung auch über größere Strecken erlaubt. Eine weitere Anwendung sind numerische Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen.

§ **425** Als Beispiel für die Taylor Entwicklung betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \; .$$

Der Funktionswert an der Stelle $x = 0$ ist bekannt, $f(0) = 1$; der Verlauf der Funktion in der Nähe dieser Stelle soll mit Hilfe von (31) angenähert werden. Wegen $f(0) = 1$ ergibt sich für kleine $x$ eine erste Abschätzung

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \approx 1 \; .$$

Diese ist nur für sehr kleine $x$ eine sinnvolle Annäherung, vgl. linkes Teilbild in Abb. 39. Eine bessere Abschätzung ergibt sich unter zusätzlicher Berücksichtigung der Steigung der Funktion:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{und damit} \qquad f'(0) = 1 \; ,$$

d.h. die Gleichung der Tangente an die Kurve ist für $x = 0$ gegeben als $y = 1 + x$. $f(x)$ lässt sich daher für kleine $x$ besser annähern durch

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \approx 1 + x \; ,$$

vgl. mittleres Teilbild. Auch diese Annäherung ist noch recht ungenau. Die Annäherung wird besser, wenn auch die Änderung der Tangentensteigung berücksichtigt wird, ausgedrückt durch die zweite Ableitung:

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad \text{und damit} \qquad f''(0) = 2 \; .$$

Die so verbesserte Annäherung

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2$$

ist im rechten Teilbild von Abb. 39 gezeigt.

**Zwischenrechnung 2** Rechnen Sie die Entwicklung mit allen Zwischenschritten noch einmal genau nach!

§ **426** Die Taylor Entwicklung (31) lässt sich auch unter Verwendung einer Abweichung $h$ vom Funktionswert $x$ schreiben als:

$$f(x+h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{h^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + ... + \frac{h^n}{n!} f^n(x) + R_n \; . \tag{32}$$

Hier kann die Entwicklung zur Bestimmung eines unbekannten Funktioneswertes an einer Stelle $x + h$ aus einem bekannten Funktionswert an der Stelle $x$ bestimmt werden. Für $x + h$ soll also der Funktionswert durch die Taylor Reihe bestimmt werden, die Funktion und ihre Ableitungen an der Stelle $x$ sind bekannt. Die sich ergebende Reihe kann irgendwann abgebrochen werden, weil die $h^n$ immer kleiner werden – vorausgesetzt natürlich, dass $x + h$ innerhalb des Konvergenzradius liegt. Der sich durch den Abbruch ergebende Fehler wird durch das Restglied $R_n$ beschrieben.

§ **427** Als Beispiel bestimmen wir mit Hilfe der Taylor Entwicklung $\sqrt{4.003}$. Dazu wählen wir $x = 4$ (mit $f(x) = 2$ als bekanntem Wert) und $h = 0.003$ als kleiner Abweichung. Die in der Taylor Reihe benötigten Ableitungen sind

$$f(x) = x^{1/2} \, , \quad f'(x) = \tfrac{1}{2} x^{-1/2} \, , \quad f''(x) = -\tfrac{1}{4} x^{-3/2} \; , \quad f'''(x) = \tfrac{3}{8} x^{-5/2} \, , ......$$

Einsetzen in (32) ergibt

$$\sqrt{4 + 0.003} = 2 + \tfrac{1}{4} \cdot 3 \cdot 10^{-3} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{32} \cdot 9 \cdot 10^{-6} + ... = 2.000744924 + R$$

Zum Vergleich: Der Rechner liefert 2.000749859, d.h. die Abweichung tritt erst in der sechsten Nachkommastelle auf, obwohl bei der Entwicklung bereits nach dem dritten Glied abgebrochen wurde.

### 6.4.3 MacLaurin Reihe

§ **428** Die MacLaurin Reihe ist ein Spezialfall der Taylor Reihe (31) für $a = 0$, d.h. bei der MacLaurin Reihe betrachten wir die Funktion für kleine Werte von $x$. Aus (31) erhalten wir

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n \tag{33}$$

Die MacLaurin Reihe lässt sich aus einer Potenzreihe mit $x_0 = 0$ herleiten. Dazu gehen wir von der Annahme aus, dass die Funktion durch eine Potenzreihe darstellbar ist. Durch Ableiten lassen sich die Koeffizienten $a_i$ bestimmen:

$$\begin{array}{lll} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots & \Rightarrow \; f(0) = a_0 & \Rightarrow \; a_0 = f(0)/0! \\ f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \ldots & \Rightarrow \; f'(0) = a_1 & \Rightarrow \; a_1 = f'(0)/1! \\ f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 \ldots & \Rightarrow \; f''(0) = 2a_2 & \Rightarrow \; a_2 = f''(0)/2! \end{array}$$

Damit ergibt sich die MacLaurin Reihe zu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ... + \frac{f^n}{n!} x^n(0) + ... \, .$$

### 6.4.4 Exponentialreihe

§ **429** Mit der Exponentialreihe erhalten wir eine Annäherung an die Exponentialfunktion. Die Reihenentwicklung ist in diesem Fall besonders einfach, da die Exponentialfunktion abgeleitet stets wieder die Exponentialfunktion ergibt. Damit ergibt sich für die ersten Glieder der MacLaurin Reihe der Exponentialfunktion

$$\begin{array}{ll} f(x) = \mathrm{e}^x & \Rightarrow \; f(0) = 1 \\ f'(x) = \mathrm{e}^x & \Rightarrow \; f'(0) = 1 \\ f''(x) = \mathrm{e}^x & \Rightarrow \; f''(0) = 1 \, . \end{array}$$

Einsetzen in die Reihenentwicklung liefert

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + .... + \frac{1}{n!} x^n + ... \, . \tag{34}$$

Für kleine $x$ werden die Terme $x^n/n!$ schnell sehr klein und die Reihe liefert bereits nach wenigen Gliedern eine gute Näherung. Bei der Herleitung der Euler Formel (38) werden wir diese und die beiden folgenden Reihenentwicklungen benötigen. Für $x = 1$ ergibt sich aus der Reihentwicklung der Exponentialfunktion die Euler Zahl e, siehe auch § 261.

### 6.4.5 Trigonometrische Funktionen

§ **430** Durch Ableiten der Funktion $f(x) = \sin x$ (mit $x$ im Bogenmaß) ergeben sich die Koeffizienten der MacLaurin Reihe für den Sinus zu

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & \Rightarrow \; f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & \Rightarrow \; f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & \Rightarrow \; f''(0) = 0 \, . \end{array}$$

Damit ergibt sich als Reihenentwicklung des Sinus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + .... \, . \tag{35}$$

Diese Reihe zeigt, warum man den Sinus für kleine Winkel durch den Winkel ersetzen kann: bei kleinem Winkel ist bereits das zweite Glied der Reihe verschwindend klein.

§ **431** Abbildung 40 illustriert dieses Statement auch quantitativ. In der oberen Reihe sind jeweils der Sinus und die Entwicklungen für maximal vier Glieder gezeigt, in der unteren Reihe die relativen Abweichungen (Entwicklung-Exakt)/Exakt vom exakten Wert. Benötigt man nur eine 10%-Annäherung, so ist dies selbst durch Abbruch nach dem ersten Glied der Entwicklung noch bis zu einem Winkel von ca. 0.5 (entsprechend 30°) gegeben. Bei einem

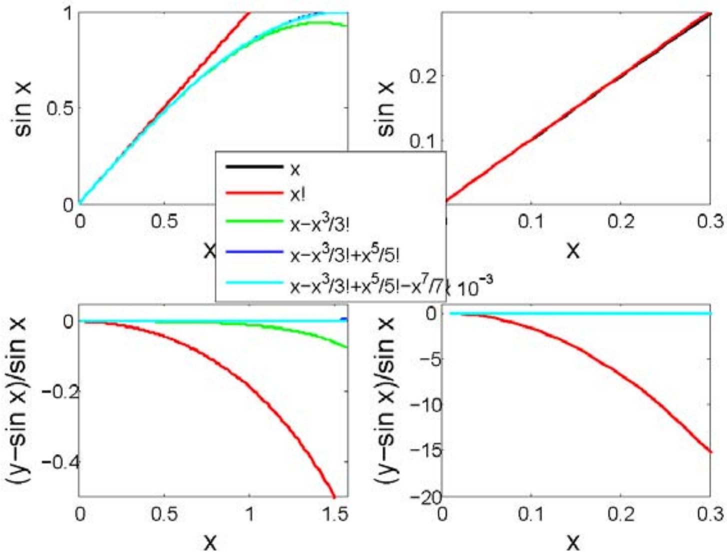



Abbildung 40: Reihenentwicklung des Sinus: die oberen Teilbilder geben die exakten Werte (schwarz) und die Reihenentwicklungen bis zum ersten (rot), zweiten (grün), dritten (blau) bzw. vierten (cyan) Glied. In der unteren Reihe sind die relativen Abweichungen vom exakten Wert gegeben

Winkel von 0.2 (entsprechend ca. 11.5°) beträgt der Fehler bei Abbruch nach dem ersten Glied der Entwicklung noch weniger als 1%. Für ein normales Fadenpendel (vgl. Exkurs im Zusammenhang mit Abb. 14) ist diese Auslenkung realistisch. Bricht man die Entwicklung erst nach dem zweiten Glied ab (grüne Kurve), so erreicht sie den 10%-Fehler erst bei $\pi/2$ (entsprechend 90°).

§ **432** Die Potenzreihenentwicklung des Kosinus ist ähnlich; als Reihe ergibt sich

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + .... \,. \tag{36}$$

Diese Darstellungen der Winkelfunktionen sind konsistent: Ableiten der Reihenentwicklung von $\sin x$ ergibt $\cos x$ und umgekehrt.

**Zwischenrechnung 3** Führen Sie die Reihenentwicklung für den Kosinus selbständig durch.

**Zwischenrechnung 4** Überzeugen Sie sich durch Ableiten beider Reihenentwicklungen, dass diese konsistent sind, d.h. die Ableitung von Sinus ergibt Kosnus und (allerdings mit Vorzeichenwechsel) umgekehrt.

### 6.4.6 Weitere Reihen

§ **433** Weitere gebräuchliche Reihen sind die geometrische Reihe ($-1 < x < 1$):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \,,$$

die logarithmische Reihe ($-1 < x < 1$):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \,,$$

und die binomische Reihe ($\alpha \in \mathbb{N}$), der wir in der Statistik häufig begegnen werden:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 - \ldots \,. \tag{37}$$

**Zwischenrechnung 5** Ist die hier gegebene geometrische Reihe konsistent mit der Entwicklung der Funktion in § 425?

### 6.4.7 Rechentraining

**Aufgabe 166** Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine MacLaurin'sche Reihe:

1. Binomische Reihe $f(x) = (1 \pm x)^n$,
2. die Funktion $f(x) = 1/(1-x)$,
3. die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x/(1-x)$,
4. die hyperbolischen Winkelfunktionen sinh und cosh.

Musterlösung in § 600

**Aufgabe 167** Machen Sie eine Taylor-Entwicklung der folgenden Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x}\,, \qquad g(x) = \sqrt{x}\,, \qquad h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\,, \qquad k(x) = \ln(1+x^2)$$

um $x_0 = 0$ für $f(x)$ und $k(x)$ und um $x_0 = 1$ für $g(x)$ und $h(x)$. Musterlösung in § 601

**Aufgabe 168** Bestimmen Sie die folgenden Größen mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung: $f(x) = \sqrt{1-x}$ für $x = 0.05$, $g(x) = \sin(x)$ für $x = 0.1$ (entspricht 5.73°) und $h(x) = \tan(x)$ für $x = 0.15$ (entspricht 8.6°). Musterlösung in § 602

**Aufgabe 169** Die Potenzreihenentwicklung kann auch als Hilfsmittel zur Integration verwendet werden. Liegt ein nicht elementar lösbares Integral vor, so kann der Integrand in eine Potenzreihe entwickelt werden, die dann einfach integriert werden kann. Bestimmen Sie das Gauß'sche Fehlerintegral (Error-Funktion)

$$F(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

auf diese Weise; ebenso das Integral

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Musterlösung in § 603

## 6.5 Komplexe Zahlen und Zusammenhänge zwischen mathematischen Funktionen: die Euler'sche Formel

§ **434** Tritt in der Physik eine Schwingung oder eine andere periodische Größe auf, so ist die effizienteste Beschreibung die mit komplexen Zahlen. Dazu müssen Sie von komplexen Zahlen eigentlich nur einen Sachverhalt beherrschen, die Euler Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\,. \tag{38}$$

Lesen wir die Gleichung von links nach rechts, so erfahren wir, dass sich eine Exponentialfunktion mit imaginärem Exponenten als Summe aus dem Kosinus des Exponenten auf der reellen Achse und dem Sinus des Exponenten auf der imaginären Achse darstellen lässt. Die Leseweise in umgekehrter Richtung ist vielleicht wichtiger: trigonometrische Funktionen wie Sinus oder Kosinus lassen sich mit Hilfe einer Exponentialfunktion mit imaginärem Exponenten darstellen.

### 6.5.1 Herleitung

§ **435** Die Euler Formel (38) lässt sich mit Hilfe der Taylor Entwicklung(33) herleiten: mit

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}\,f'(0) + \frac{x^2}{2!}\,f''(0) + \frac{x^3}{3!}\,f'''(0) + \ldots$$

haben wir in § 424 bereits die Entwicklung einer Exponentialfunktion mit reellem Exponenten durchgeführt mit dem Ergebnis (34)

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots .$$

§ **436** Die Taylor Entwicklung gilt nicht nur für reelle Funktionen sondern auch für komplexe. Daher lässt sich die Funktion $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ entwickeln als:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 1 + \frac{\mathrm{i}\varphi}{1!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^5}{5!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^6}{6!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^7}{7!} + \ldots .$$

Die geraden Potenzen geben wegen $\mathrm{i}^2 = -1$ jeweils reelle Größen, die ungeraden Potenzen dagegen imaginäre. Sortieren nach reellen und imaginären Termen liefert für die Entwicklung der Exponentialfunktion

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right) .$$

Im ersten Term erkennen wir die Entwicklung des Kosinus aus (36) wieder, im zweiten die des Sinus aus (35). Damit erhalten wir die bereits in (38) gegebene Euler Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi .$$

**Verständnisfrage 13** Darf die Reihenentwicklung für die Exponentialfunktion einfach nach reellen und imaginären Termen umsortiert werden oder müssen dafür bestimmte Voraussetzungen erfüllt sein? Wenn ja, welche?

§ **437** Für den Spezialfall $\varphi = \pi$ gibt die Euler Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$$

einen Zusammenhang zwischen den beiden wichtigsten reellen Zahlen, 0 und 1, und den beiden wichtigsten transzendenten Zahlen e und $\pi$.

### 6.5.2 Darstellung trigonometrischer Funktionen durch die Exponentialfunktion

§ **438** Mit Hilfe der Euler Formel lassen sich die trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion darstellen. Dazu betrachten wir (38) mit positivem und negativem Argument:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi .$$

Addition der beiden Gleichungen liefert als Darstellung für den Kosinus

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} . \tag{39}$$

Entsprechend liefert die Subtraktion der beiden Gleichungen für den Sinus

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}} . \tag{40}$$

§ **439** Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen lassen sich, ebenso wie die der hyperbolischen Funktionen, mit Hilfe der Logarithmen darstellen:

$$\arcsin\varphi = -\mathrm{i}\,\ln\left(\mathrm{i}\varphi + \sqrt{1-\varphi^2}\right) \qquad \text{und} \qquad \arccos\varphi = -\mathrm{i}\,\ln\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 1}\right) .$$

§ **440** Die Darstellungen von Sinus und Kosinus entsprechen denen der hyperbolischen Winkelfunktionen (26) – außer das letztere mit reellem Exponenten dargestellt werden. In der komplexen Ebene sind beide Darstellungen jedoch ähnlich: die hyperbolischen Winkelfunktionen werden in Bezug auf die reelle Achse dargestellt, die trigonometrischen Funktionen dagegen im Bezug auf die imaginäre Achse. Die mathematische Struktur beider Gruppen von Funktionen ist jedoch identisch.

### 6.5.3 Konsequenzen für das Rechnen mit komplexen Zahlen

§ **441** Eine Anwendung der Euler Formel ist die Darstellung komplexer Zahlen in Polarform:

$$z = r\,\cos\varphi + \mathrm{i}\,r\,\sin\varphi = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\ .$$

Im linken Teil haben wir die trigonometrische Darstellung aus § 392 als Ausgangspunkt gewählt.

§ **442** Multiplikation (Division) komplexer Zahlen in Polarform ist besonders einfach, da gemäß der Rechenregeln für die Exponentialfunktion nur das Produkt (der Quotient) der Beträge gebildet werden muss und die Winkel addiert (subtrahiert) werden:

$$z_1\,z_2 = |z_1|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\,|z_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = |z_1|\,|z_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{|z_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}\ .$$

In dieser Darstellung ist die geometrische Interpretation der Multiplikation einfach: die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ bewirkt eine Drehung um einen Winkel $\varphi$ und eine Streckung um den Faktor $|z|$.

§ **443** Die Euler Formel erlaubt es, Winkelfunktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion auszudrücken. Das ist z.B. bei der Integration hilfreich, da die Exponentialfunktion mathematisch einfach zu handhaben ist. Insbesondere ergibt sie sowohl bei Differentiation als auch bei Integration immer wieder die Exponentialfunktion.

§ **444** Betrachten wir dazu nochmals das Integral der Funktion $\mathrm{e}^x\,\sin x$. In § 366 haben wir dies durch doppelte partielle Integration bestimmt. Hier ersetzen wie den Sinus durch (40):

$$I = \int \mathrm{e}^x\,\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int \mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int \left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}\right)\,\mathrm{d}x\ .$$

Das so erhaltenen Integral ist elementar:

$$I = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int \left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}}{1-\mathrm{i}}\right] + C\ .$$

Um darin die in § 366 gefundene Lösung wiedererkennen zu können, nehmen wir einige arithmetische Umformungen vor (und lassen von hier an die Integrationskonstante weg):

$$I = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}}{1-\mathrm{i}}\right] = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,\frac{(1-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} - (1-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$$

$$= \frac{1}{4\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^x\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x\,(\sin x - \cos x)\ .$$

§ **445** Neben dieser eher rechentechnischen Anwendung der Euler Formel hat die Formel von Moivre etwas mehr Substanz. Diese ist gegeben als

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)\ .$$

Mit Hilfe der Euler Formel lässt sich die linke Seite als die $n^{\mathrm{te}}$ Potenz der komplexen Zahl $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ identifizieren:

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\varphi)} = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)\ .$$

Aus der Formel von Moivre wird anschaulich, warum die $n^{\mathrm{ten}}$ Wurzeln einer komplexen Zahl mit Betrag 1 jeweils $n$-Ecke bilden, siehe Abb. 41.

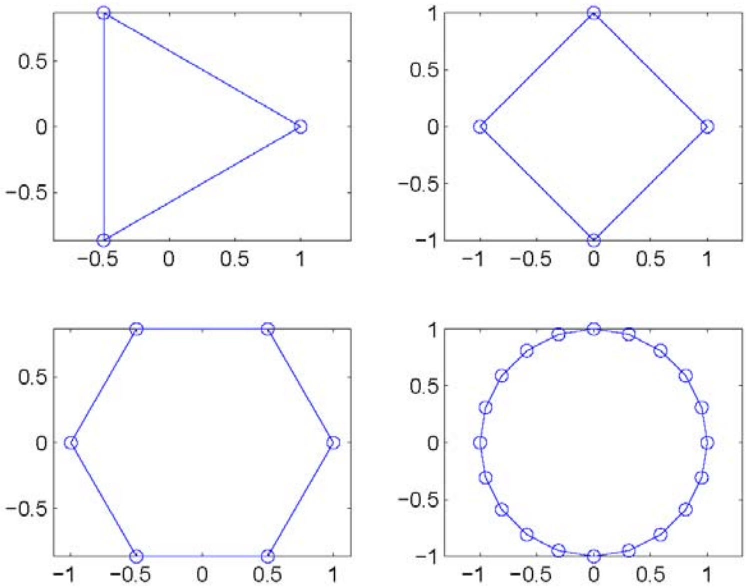



Abbildung 41: Verschiedene Wurzeln aus 1: $\sqrt[3]{1}$ (links oben), $\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{-1}$ (rechts oben), $\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{-1}$ (links unten) und $\sqrt[20]{1} = \sqrt[20]{-1}$ (rechts unten). Die $n$-te Wurzel ergibt jeweils ein regelmäßiges $n$-Eck

### 6.5.4 Rechentraining

**Aufgabe 170** Leiten Sie die folgenden Beziehungen (für $\alpha > 0$) her:

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \, \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha^2 + 1} \qquad \text{und} \qquad \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \, \cos t \, \mathrm{d}t = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \, .$$

Musterlösung in § 604

**Aufgabe 171** Berechnen Sie allgemein die $n$-te Wurzel von

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= -1 \end{aligned}$$

und zeichnen Sie die Ergebnisse für $n = 3$ und $n = 4$ in der Gauß'schen Zahlenebene.

Musterlösung in § **??**

# 7 Hilfen & Musterlösungen

## Lernfeld 1: Elementares

### Hinweis zu Verständnisfragen

§ **446 Hinweis zu Frage 1:** Arg vereinfachend: die einfachste Form der quadratischen Gleichung ist $x^2 = q$ wobei $q$ eine reelle Zahl größer gleich Null ist. Da sowohl das Produkt zweier positiver Zahlen als auch das Produkt zweier negativer Zahlen eine positive Zahl ergibt, ist $x = \pm\sqrt{q}$. Etwas formaler kann man Argumentieren, dass die Quadratwurzel als Umkehrfunktion der quadratischen Funktion nicht eindeutig ist.
Eine quadratische Gleichung kann man auch im Zusammenhang mit der Kurvendiskussion betrachten. Dazu lesen wir die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ als eine Funktionsgleichung $f(x) = x^2 + px + q$. Die quadratische Gleichung definiert dann die Stellen, an denen $f(x) = 0$ wird, d.h. die Nullstellen der Funktion. Eine lineare Funktion ist eine Gerade und hat maximal eine Nullstelle. Eine Funktion, deren höchste Potenz zweiter Ordnung ist, kann maximal zwei Nullstellen haben. Hat sie nur eine Nullstelle, so berührt sie die $x$-Achse in einem Punkt (z.B. bei $x = 0$ im Fall der Normalparabel $f(x) = x^2$). Gibt es keine Schnittpunkte mit der $x$-Achse, z.B. für die Funktion $f(x) = x^2 + 4$, so hat die quadratische Gleichung keine Lösungen im Reellen. Zurück zur Frage 1

§ **447 Hinweis zu Frage 2:** Die einfachste Variante ist die Rückführung auf die pq-Formel:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0\,.$$

Mit $p = b/a$ und $q = c/a$ liefert die pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Alternativ lässt sich die Formel auch mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung herleiten. Dazu gehen wir wieder von der Normalform

$$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

aus, ergänzen $(b/(2a))^2$ und bringen $c/a$ auf die rechte Seite:

$$x^2 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Links steht ein Binom

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,.$$

Quadratwurzel auf beiden Seiten und anschließendes Umformen liefert die gegebene Gleichung

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{b}{2a} + \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\,.$$

Zurück zur Frage 2

### Hilfe zu den Aufgaben aus dem Rechentraining

§ **448** Hinweis zu Aufgabe 5: in der Klammer steht $x$ nur in der ersten Potenz, d.h. als $x^1$. Quadrieren kann als höchste Potenz nur $x^2$ ergeben, d.h. die ersten beiden Koeffizienten werden Null. Zum Rechnen erst das Binom ausführen, dann mit dem Vorfaktor multiplizieren. Zurück zu Aufgabe 5

§ **449** Hinweis zu Aufgabe 6: Terme innerhalb der Klammern vertauschen (Vorzeichen beim Vertauschen in der zweiten Klammer mitnehmen!), dann hat der Ausdruck die Form des dritten Binoms. Weiter wie in Aufgabe 5. Zurück zu Aufgabe 6

§ **450** Hinweis zu Aufgabe 7: die Darstellungsform suggeriert direkte Anwendung der ersten beiden Binome und anschließende Multiplikation der aus jeweils drei Termen bestehenden Ergebnisse. Mit dem dritten Binom geht es schneller – Sie müssen es nur finden.
Zurück zu Aufgabe 7

§ **451** Hinweis zu Aufgabe 8: eine wirklich ökonomische Variante gibt es nicht. Stehen nur die Binome zur Verfügung, so funktioniert nur eine Zerlegung der Art

$$5(a+b)^5 = 5((a+b)^2(a+b)^2(a+b)) \, .$$

Zurück zu Aufgabe 8

§ **452** Hinweise zu Aufgabe 9: es mag zwar verlockend sein, erst das äußere Binom zu lösen – aber schauen Sie sich die Differenz der beiden inneren Binome genau an, bevor Sie vorschnell losrechnen. Zurück zu Aufgabe 9

§ **453** Hinweise zu Aufgabe 16: Sie können die Gleichung stur nach Schema lösen (Normalform und pq-Formel oder erweiterte Lösungsformel). Oder Sie stutzen darüber, dass der erste und letzte Term offenbar Quadrate sind und meditieren kurz über Binome oder quadratische Ergänzungen. Zurück zu Aufgabe 16

§ **454** Hinweise zu Aufgabe 17: Gleichung umstellen, die pq-Formel lässt sich dann direkt anwenden. Zurück zu Aufgabe 17

§ **455** Hinweise zu Aufgabe 18: die Gleichung ist vierter Ordnung, da $x$ in der vierten Potenz auftritt. Überlegen Sie sich, wie Sie das Problem auf die Lösung einer quadratischen Gleichung zurück führen können und lösen Sie diese dann. Zurück zu Aufgabe 18

§ **456** Hinweise zu Aufgabe 20: Gleichung vereinfachen, d.h. in Normalform bringen. Ist es eine Gleichung dritter Ordnung oder lässt sich die Gleichung auf eine quadratische Gleichung reduzieren? Zurück zu Aufgabe 20

§ **457** Hinweise zu Aufgabe 26: Beachten Sie (a) der Zähler des ersten Bruches enthält ein Binom und (b) durch einen Bruch dividiert man, indem man mit dem Kehrwert multipliziert.
Zurück zu Aufgabe 26

§ **458** Hinweis zu Aufgabe 33: Lösungsverfahren beliebig, da Gleichungssystem sehr einfach.
Zurück zu Aufgabe 33

§ **459** Hinweis zu Aufgabe 34: Für eine schnelle Lösung bietet sich die sukzessive Elimination an, da sich die untere Gleichung einfach nach $z$ auflösen und in die beiden oberen Gleichungen einsetzen lässt, so dass ein System aus zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten $x$ und $y$ entsteht. Sie sollten zum Vergleich und Training aber zusätzlich das Verfahren mit der Normalform oder die Cramer'sche Regel verwenden. Zurück zu Aufgabe 34

§ **460** Hinweis zu Aufgabe 41: lassen Sie sich nicht vom Umfang des Gleichungssystems verwirren sondern gehen Sie ganz systematisch vor, wie Sie es auch in den voran gegangenen Aufgaben gemacht haben. Zurück zu Aufgabe 41

§ **461** Hinweis zu Aufgabe 42: Sehen Sie sich das Gleichungssystem noch einmal genau an. Um was für einen Typ von Gleichungssystem handelt es sich? Erfüllt es die Voraussetzungen zur Anwendung aller bisher beschriebenen Verfahren? Zurück zu Aufgabe 42

§ **462** Hinweis zu Aufgabe 43: konzentrieren Sie sich auf die linke Seite der Gleichungen!
Zurück zu Aufgabe 43

§ **463** Hinweis zu Aufgabe 44: entsprechend Aufgabe 43 Zurück zu Aufgabe 44

**Musterlösungen zu den Aufgaben aus dem Rechentraining**

§ **464** Musterlösung zu Aufgabe 5: Schrittweise ergibt sich

$$\begin{aligned} 5(8-2x)^2 &= 5(8^2 + 2\cdot 8\cdot[-2x] + [-2x]^2) \\ &= 5(64 - 42x + 4x^2) \\ &= 320 - 210x + 20x^2 \ . \end{aligned}$$

Beim mittleren Term auf das Minus achten! Zurück zu Aufgabe 5

§ **465** Musterlösung zu Aufgabe 6:

$$\begin{aligned} 5xy(2x+5y)(-2x+5y) &= 5xy(5y+2x)(5y-2x) \\ &= 5xy([5y]^2 - [2x]^2) \\ &= 5xy(25y^2 - 4x^2) \\ &= 125xy^3 - 20x^3y \ . \end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 6

§ **466** Musterlösung zu Aufgabe 7: die langsame (und Fehler anfällige) Variante ist

$$\begin{aligned} (a+b)^2(a-b)^2 &= (a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2) \\ &= a^2(a^2-2ab+b^2) + 2ab(a^2-2ab+b^2) + b^2(a^2-2ab+b^2) \\ &= a^4 - 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 + b^2a^2 - 2ab^3 + b^4 \\ &= a^4 - 2a^3b + 2a^3b + a^2b^2 - 4a^2b^2 + b^2a^2 + 2ab^3 - 2ab^3 + b^4 \\ &= a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \ . \end{aligned}$$

Die schnellere und weniger Fehler anfällige Variante berücksichtigt, dass sich ein Produkt von zwei Quadraten auch als Quadrat des Produktes schreiben lässt: $x^2y^2 = (xy)^2$:

$$\begin{aligned} (a+b)^2(a-b)^2 &= ((a+b)(a-b))^2 \\ &= (a^2-b^2)^2 \\ &= (a^2)^2 + 2a^2(-b^2) + (-b^2)^2 \\ &= a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \ . \end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 7

§ **467** Musterlösung zu Aufgabe 8: für $n = 5$ liefert das Pascal'sche Dreieck in Abb. 1 als Koeffizienten 1, 5, 10, 10, 5, 1. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 5(a+b)^5 &= 5(a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5) \\ &= 5a^5 + 25a^4b + 50a^3b^2 + 50a^2b^3 + 25ab^4 + 5b^5 \ . \end{aligned}$$

Ohne Pascal'sches Dreieck wird es mühsam:

$$\begin{aligned} 5(a+b)^5 &= 5\{(a+b)^2(a+b)^2(a+b)\} \\ &= 5\{(a^2+2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)(a+b)\} \\ &= 5\{[a^2(a^2+2ab+b^2) + 2ab(a^2+2ab+b^2) + b^2(a^2+2ab+b^2)](a+b)\} \\ &= 5\{[a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4](a+b)\} \\ &= 5\{[a^4 + (2+2)a^3b + 1 + 4 + 1a^2b^2 + (2+2)ab^3 + b^4](a+b)\} \\ &= 5\{[a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4](a+b)\} \\ &= 5\{a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 + a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5\} \\ &= 5\{a^5 + (4+1)a^4b + (6+4)a^3b^2 + (4+6)a^2b^3 + (1+4)ab^4 + b^4\} \\ &= 5(a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5) \\ &= 5a^5 + 25a^4b + 50a^3b^2 + 50a^2b^3 + 25ab^4 + 5b^5 \ . \end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 8

§ **468** Musterlösung zu Aufgabe 9: die verlockende Variante, erst das äußere Binom zu berechnen, wird aufwendig und erfordert das Pascal'sche Dreieck und die Lösung von Aufgabe 7:

$$\begin{aligned} ((2+x)^2 + (2-x)^2)^2 &= (2+x)^4 + 2(2+x)^2(2-x)^2 + (2-x)^4 \\ &= 1\cdot 2^4 + 4\cdot 2^3\cdot x + 6\cdot 2^2\cdot x^2 + 4\cdot 2\cdot x^3 + x^4 \end{aligned}$$

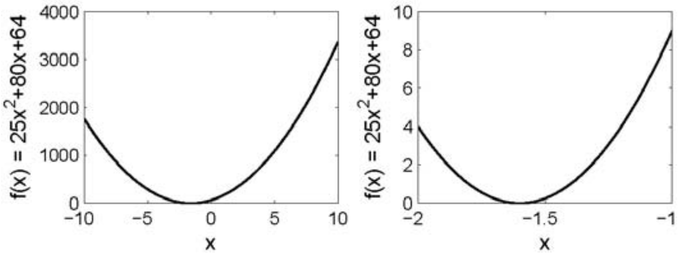



Abbildung 42: Funktionsgraph zu Aufgabe 16: Übersicht (links) und Details um Nullstelle (rechts)

$$
\begin{aligned}
& +2(2^4 - 2 \cdot 2^2 x^2 + x^4) \\
& +1 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 \cdot x + 6 \cdot 2^2 \cdot x^2 - 4 \cdot 2 \cdot x^3 + x^4 \\
= \; & 2 \cdot 2^4 + 2 \cdot 6 \cdot 2^2 \cdot x^2 + 4x^4 + 2 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2 \cdot 2^2 x^2 \\
= \; & 2^5 + 3 \cdot 2^4 \cdot x^2 + 4x^4 + 2^5 - 2^4 x^2 \\
= \; & 2^6 + 2 \cdot 2^4 \cdot x^2 + 4x^4 \\
= \; & 64 + 32x^2 + 4x^4 \; .
\end{aligned}
$$

Die Aufgabe wird übersichtlicher, wenn wir mit den inneren Binomen beginnen:

$$
\begin{aligned}
((2+x)^2 + (2-x)^2)^2 &= (2^2 + 4x + x^2 + 2^2 - 4x + x^2)^2 \\
&= (2[2^2 + x^2])^2 \\
&= (2[4 + x^2])^2 \\
&= 2^2[4 + x^2]^2 \\
&= 4(16 + 8x^2 + x^4)) \\
&= 64 + 32x^2 + 4x^4 \; .
\end{aligned}
$$

Zurück zu Aufgabe 9

§ **469** Musterlösung zu Aufgabe 16: (a) Gleichung auf Normalform bringen

$$25x^2 + 80x + 64 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + \frac{80}{25}x + \frac{64}{25} = 0$$

und pq-Formel anwenden

$$x_{1,2} = -\frac{80}{2 \cdot 25} \pm \sqrt{\left(\frac{40}{25}\right)^2 - \frac{64}{25}} = -\frac{8}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 - \frac{64}{25}} = -\frac{8}{5} \pm \sqrt{\frac{64}{25} - \frac{64}{25}} = -\frac{8}{5} \; ,$$

die pq-Formel liefert also nur eine Lösung! (b) Die Lösung mit der allgemeineren Formel sieht auch nicht anders aus, wir ersparen uns lediglich den Zwischenschritt mit der Normalform. (c) Ein genauer Blick auf die beiden Quadrate im ersten und letzten Term erlaubt ein Umschreiben der Gleichung

$$0 = 25x^2 + 80x + 64 = (5x)^2 + 80x + 8^2 \; .$$

Bevor wir mit der quadratischen Ergänzung anfangen, zerlegen wir den mittleren Term in ein Produkt aus den Wurzeln der beiden äußeren Terme:

$$0 = (5x)^2 + 80x + 8^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 8 \cdot (5x) + 8^2 \; .$$

Das ist ein Binom

$$0 = (5x + 8)^2 \qquad \Rightarrow \qquad 5x + 8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{8}{5} \; .$$

Eine anschauliche Interpretation für die Existenz nur einer Lösung gibt Abb. 42: die Funktion $f(x) = 25x^2 + 80x + 64$ schneidet die $x$-Achse nur in einem Punkt, bzw. genauer sie berührt die $x$-Achse nur einmal in einem Punkt. Und die quadratische Gleichung $25x^2 + 80x + 64 = 0$ heißt ja nur, dass wir die Nullstellen dieser Funktion bestimmen sollen.

Zurück zu Aufgabe 16

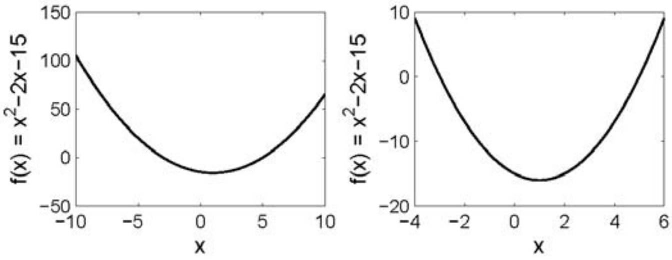



Abbildung 43: Funktionsgraph zu Aufgabe 17: Übersicht (links) und Details um die Nullstellen (rechts)

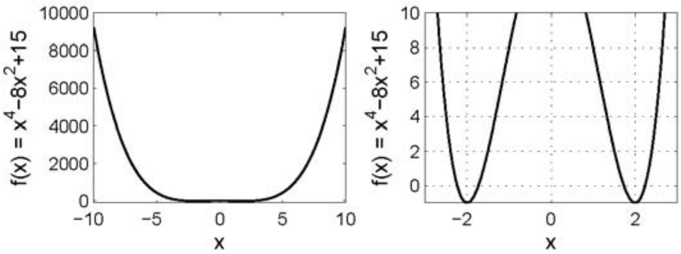



Abbildung 44: Funktionsgraph zu Aufgabe 18: Übersicht (links) und Details um die Nullstellen (rechts)

§ **470** Musterlösung zu Aufgabe 17: auf die umgestellte Gleichung kann die pq-Formel direkt angewendet werden

$$x^2 = 2x + 15 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+15} = 1 \pm \sqrt{16} = 1 \pm 4$$

und damit

$$x_1 = -3 \qquad \text{und} \qquad x_2 = 5\;.$$

Quadratische Ergänzung ist in diesem Fall ebenfalls einfach, da der Koeffizient vor dem $x$ eine -2 ist, also auf ein Binom $(x-1)^2$ zu ergänzen ist:

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 1 + 15 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 = 16 \quad x - 1 = \pm 4$$

und damit wieder $x_1 = -3$ und $x_2 = 5$. Die zugehörige graphische Darstellung der Funktion finden Sie in Abb. 43. Zurück zu Aufgabe 17

§ **471** Musterlösung zu Aufgabe 18: mit $y = x^2$ lässt sich die Gleichung umschreiben

$$x^4 - 8x^2 + 15 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 - 8y + 15 = 0\;.$$

Quadratischer Ergänzung für ein Binom $(x-4)^2$ liefert

$$(y-4)^2 = y^2 - 8y + 16 = -15 + 16 \quad \Rightarrow \quad y - 4 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad y = 4 \pm 1\;.$$

Damit erhalten wir $y_1 = 3$ und $y_2 = 5$. Da gilt $y = x^2$ erhalten wir insgesamt 4 Lösungen:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1} = \pm\sqrt{3} \qquad \text{und} \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2} = \pm\sqrt{5}\;.$$

Überprüfen Sie die Lösungen durch Einsetzen in die Gleichung! Da es sich um eine Gleichung vierter Ordnung handelt, können bis zu vier verschiedene Lösungen auftreten. In diesem Fall waren alle vier Lösungen reell. Ein Blick auf den Funktionsplot in Abb. 44 bestätigt diese Lösungen.
Hätten wir die Gleichung aus Aufgabe 17 als $x^4 = 2x^2 + 14$ geschrieben, so hätten sich mit dem gleichen Verfahren $y_1 = -3$ und $y_2 = 5$ ergeben. Die $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}$ wären in diesem Fall imaginär, nur die $x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$ sind reell, d.h. es ergeben sich bei dieser Gleichung vierter Ordnung nur zwei reelle Lösungen. Zurück zu Aufgabe 18

§ **472** Musterlösung zu Aufgabe 19: die Ergänzung ist offensichtlich,

$$x^2 - 17x = 200 \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{17}{2}\right)^2 = 200 + \left(\frac{17}{2}\right)^2 = \frac{800 + 289}{4}\;.$$

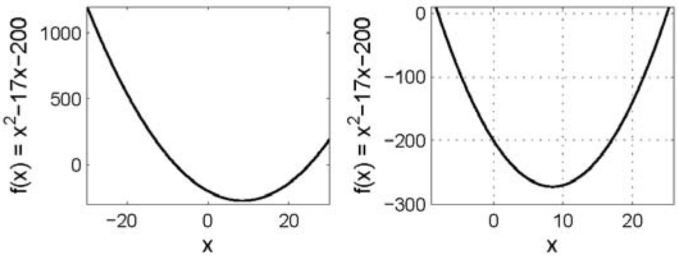



Abbildung 45: Funktionsgraph zu Aufgabe 19: Übersicht (links) und Details um die Nullstellen (rechts)

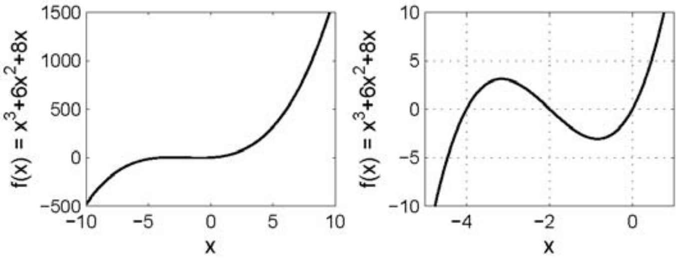



Abbildung 46: Funktionsgraph zu Aufgabe 20: Übersicht (links) und Details um die Nullstellen (rechts)

Wurzelziehen liefert

$$x - \frac{17}{2} = \pm\sqrt{\frac{1089}{4}} = \pm\frac{33}{2}$$

und damit die Lösungen

$$x_1 = \frac{17}{2} - \frac{33}{2} = -\frac{16}{2} = -8 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{17}{2} + \frac{33}{2} = \frac{50}{2} = 25\,.$$

Die graphische Lösung können Sie dem Funktionsplot in Abb. 45 entnehmen.

Zurück zu Aufgabe 19

§ **473** Musterlösung zu Aufgabe 20: Umschreiben liefert Normalform

$$5x^3 + 30x^2 + 46x = 6x \qquad \Rightarrow \qquad x^3 + 6x^2 + 8x = 0\,.$$

Ein Faktor $x$ lässt sich ausklammern:

$$x^3 + 6x^2 + 8x = x(x^2 + 6x + 8) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 + 6x + 8 = 0 \end{cases},$$

d.h. die Gleichung ist erfüllt, wenn $x$ Null wird oder wenn der Term in der Klammer verschwindet. Letzterer ist eine quadratische Gleichung, die wir mit Hilfe der quadratischen Ergänzung lösen können:

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 9 = 9 - 8 \quad \Rightarrow \quad (x+3)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{2,3} + 3 = \pm 1$$

und damit insgesamt die drei Lösungen

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = -4 \quad \text{und} \quad x_3 = -2\,.$$

Die zugehörige graphische Darstellung finden Sie in Abb. 46.

Zurück zu Aufgabe 20

§ **474** Lösung zu Aufgabe 26:

$$\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^3} \div \frac{a-b}{(a+b)^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^3} \cdot \frac{(a+b)^2}{(a-b)} = 1$$

Zurück zu Aufgabe 26

§ **475** Lösung zu Aufgabe 27:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{-2} = \frac{y^3}{x^3} \cdot \frac{x^2}{y^2} = \frac{y}{x}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 27

§ **476** Lösung zu Aufgabe 28:

$$\sqrt{\sqrt{a}} \cdot \left( \left( \frac{a+b}{b} \right)^2 - \frac{2a+b}{b} \right) = a^{1/4} \left( \frac{a^2+2ab+b^2}{b^2} - \frac{2ab+b^2}{b} \right) = a^{1/4} \cdot a^2 = a^{9/4} \, .$$

Zurück zu Aufgabe 28

§ **477** Lösung zu Aufgabe 29:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(\mathrm{e}^{x^2} \cdot \mathrm{e}^{(2\sqrt{x})^2})}{\mathrm{e}^{-5x} \cdot \ln \mathrm{e}^{4(x+\sqrt{x})}} &= \frac{\mathrm{e}^{5x}}{4x} \cdot \ln(\mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}) = \frac{\mathrm{e}^{5x}}{4(x+\sqrt{x})} \cdot \ln(\mathrm{e}^{2(x+\sqrt{x})} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{5x}}{4(x+\sqrt{x})} \cdot 2(x+\sqrt{x}) = \frac{\mathrm{e}^{5x}}{2} \, . \end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 29

§ **478** Musterlösung zu Aufgabe 33: Zweite Gleichung nach $y$ auflösen liefert $y = -3 - 4x$, anschließendes Einsetzen in die erste Gleichung liefert $2x - 3(-3 - 4x) = -5$ und damit $14x = -14$ bzw. $x = -1$. Einsetzten in die Gleichung für $y$ liefert $y = 1$. Alternativ Lösung über die Normalform (erweiterte Matrixform):

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -5 \\ 4 & 1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 7 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$
$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) .$$

Daraus lässt sich direkt ablesen $x = -1$ und $y = 1$. Zurück zu Aufgabe 33

§ **479** Musterlösung zu Aufgabe 34: Die Lösung über die Normalform (erweiterte Matrixform) ist

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 3 & 19 \\ 2 & 4 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & -1 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 3 & 19 \\ 2 & 4 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -14 & 9 & 55 \\ 2 & 4 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow$$
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & -12 \\ 0 & -14 & 9 & 55 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & -14 & 9 & 55 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & -14 & 9 & 55 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) .$$

Aus der unteren Zeile dieser Dreieckform ergibt sich unmittelbar $2z = 6$ und damit $z = 3$. Einsetzen in die zweite Zeile liefert $-14y + 27 = 55$ und damit $y = -2$. Einsetzen dieser beiden Lösungen in die erste Zeile liefert $x - 4 - 3 = -6$ und damit $x = 1$.
Zum Vergleich liefert die Cramer'sche Regel mit der Koeffizientenmatrix $\mathtt{A}$ und dem konstanten Vektor $\vec{b}$ gemäß

$$\mathtt{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 19 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

für die verschiedenen Determinanten

$$|\mathtt{A}| = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 \, , \qquad D_x = \begin{vmatrix} 19 & -2 & 3 \\ -12 & 4 & -2 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6 & 19 & 3 \\ 2 & -12 & -2 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 16 \qquad \text{und} \qquad D_z = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 19 \\ 2 & 4 & -12 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -24 \, .$$

Daraus ergibt sich für die Variablen:

$$x = \frac{D_x}{|\mathtt{A}|} = \frac{-8}{-8} = 1 \, , \quad y = \frac{D_y}{|\mathtt{A}|} = \frac{16}{-8} = -2 \quad \text{und} \quad z = \frac{D_z}{|\mathtt{A}|} = \frac{-24}{-8} = 3 \, .$$

Zurück zu Aufgabe 34

§ **480** Musterlösung zu Aufgabe 35: Lösung mit Hilfe der erweiterten Matrixform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right) .$$

Daraus lassen sich die Lösungen $x = 3$ und $y = -4$ direkt ablesen. Zum Vergleich die Lösung mit der Cramer'schen Regel. Dazu bestimmen wir wieder die Determinanten

$$|\mathtt{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad \text{und} \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

und damit wieder als Lösungen

$$x = \frac{D_x}{|\mathtt{A}|} = \frac{3}{1} = 3 \qquad \text{und} \qquad y = \frac{D_y}{|\mathtt{A}|} = \frac{-4}{1} = -4 .$$

Zurück zu Aufgabe 35

§ **481** Musterlösung zu Aufgabe 36: Lösung mit Normalform (erweiterte Matrixform)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & -18 \\ 3 & -2 & 1 & 22 \\ 1 & 3 & -4 & -29 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -29 \\ 2 & 1 & -4 & -18 \\ 3 & -2 & 1 & 22 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -29 \\ 0 & -5 & 4 & 40 \\ 0 & -11 & 13 & 109 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -29 \\ 0 & 1 & -4/5 & -8 \\ 0 & -11 & 13 & 109 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -29 \\ 0 & 1 & -4/5 & -8 \\ 0 & 0 & 21/5 & 21 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -29 \\ 0 & 1 & -4/5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Als Lösung ergibt sich aus der letzten Zeile $z = 5$; Einsetzen in die zweite Zeile liefert $y - 4 = -8$ und damit $y = -4$; Einsetzen der beiden Ergebnisse in die erste Zeile ergibt $x = 3$. Zum Vergleich Cramer'sche Regel mit den Determinanten

$$|\mathtt{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -21 , \qquad D_x = \begin{vmatrix} -18 & 1 & -4 \\ 22 & -2 & 1 \\ -29 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -63 ,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -18 & -4 \\ 3 & 22 & 1 \\ 1 & -29 & -4 \end{vmatrix} = 84 \qquad \text{und} \qquad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -18 \\ 3 & -2 & 22 \\ 1 & 3 & -29 \end{vmatrix} = -105 ,$$

und damit

$$x = \frac{D_x}{|\mathtt{A}|} = \frac{-63}{-21} = 3 , \quad y = \frac{D_y}{|\mathtt{A}|} = \frac{84}{-21} = -4 , \quad z = \frac{D_z}{|\mathtt{A}|} = \frac{-105}{-21} = 5 .$$

Zurück zu Aufgabe 36

§ **482** Lösung zu Aufgabe 37: $x = -1$, $y = -3$, $z = 5$. Zurück zu Aufgabe 37

§ **483** Lösung zu Aufgabe 38: $x = 2$, $y = -2$, $z = 1$ Zurück zu Aufgabe 38

§ **484** Lösung zu Aufgabe 39: $x = -3/31$, $y = -44/31$, $z = -104/31$ Zurück zu Aufgabe 39

§ **485** Lösung zu Aufgabe 40: $x = 215/53$, $y = -73/53$, $z = 82/53$ Zurück zu Aufgabe 40

§ **486** Musterlösung zu Aufgabe 41: die erweiterte Matrixform des Gleichungssystems ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & -8 & 5 & -10 & -10 \\ 0 & -12 & 3 & -11 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -8 & 5 & -10 & -10 \\ 0 & -12 & 3 & -11 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -8 & 5 & -10 & -10 \\ 0 & -12 & 3 & -11 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 30 & 22 \\ 0 & 0 & 3 & 49 & 41 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 22/5 \\ 0 & 0 & 3 & 49 & 41 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 22/5 \\ 0 & 0 & 0 & 31 & 139/5 \end{array}\right)$$

Aus der letzten Zeile können wir ablesen $z = 139/155$. Einsetzen in die vorletzte Zeile liefert $y = -152/155$; einsetzen dieser beiden Werte in die zweite Zeile liefert $x = -75/155$ und einsetzen aller Werte in die erste Zeile liefert $w = -109/155$.
Lösung mit Cramer'scher Regel: mit den Determinanten

$$|\mathtt{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 155\,, \qquad D_w = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -109\,,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -75\,, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -4 & -1 \\ 4 & -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -152 \qquad \text{und}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 139\,.$$

ergibt sich

$$w = \frac{D_w}{|\mathtt{A}|} = \frac{-109}{155}\,, \quad x = \frac{D_x}{|\mathtt{A}|} = \frac{-75}{155}\,, \quad y = \frac{D_y}{|\mathtt{A}|} = \frac{-152}{155} \quad \text{und} \quad z = \frac{D_z}{|\mathtt{A}|} = \frac{139}{155}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 41

§ **487** Musterlösung zu Aufgabe 42: Dieses Gleichungssystem ist nicht-linear, da in der dritten Gleichung der Term $y/x$ auftritt. Damit lassen sich weder die erweiterte Matrixform noch die Cramer'sche Regel anwenden – beide Verfahren sind nur für lineare Gleichungssysteme geeignet. Allerdings lassen sich einige nicht-lineare Gleichungssysteme mit den Standardverfahren wie Einsetzen oder sukzessive Elimination der Variablen lösen. In diesem Beispiel können wir die mittlere Gleichung zur ersten und letzten Gleichung addieren und erhalten ein reduziertes Systems aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$3x = 3 \qquad \text{sowie} \qquad 2x - y + y/x = 2\,.$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich unmittelbar $x = 1$, das $y$ in der zweiten Gleichung fällt damit ebenfalls weg, kann also beliebig gewählt werden. Das Gleichungssystem ist also nicht nur nicht-linear sondern auch nicht vollständig bestimmt. Zurück zu Aufgabe 42

§ **488** Musterlösung zu Aufgabe 43: ein erster Blick auf die linken Seiten der beiden Gleichungen zeigt, dass diese nicht linear unabhängig sind: die untere Gleichung ist das Doppelte der oberen. Als Konsequenz verschwindet die Determinante der Koeffizientenmatrix

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Gemäß § 65 bedeutet dies, dass das Gleichungssystem nicht vollständig bestimmt ist.

Zurück zu Aufgabe 43

§ **489** Musterlösung zu Aufgabe 44: auch in diesem Beispiel sind zwei Gleichungen nicht linear unabhängig: die linke Seite der letzten Gleichung ist identisch mit der mit -3 multiplizierten linken Seite der ersten Gleichung. Damit wird die Determinante der Koeffizientenmatrix wieder Null. Betrachten wir das System in erweiterter Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 16 \\ -6 & -3 & 3 & 27 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die letzte Zeile ist zwar wahr, aber auch trivial, d.h. wir können ihr keine Information bezüglich einer der Variablen entnehmen. Aus der mittleren Zeile können wir unmittelbar ablesen $z = -6$. Damit erhalten wir aus der ersten Zeile $2x + y + 6 = 9$ oder aufgelöst nach $y$: $y = 3 - 2x$.

Zurück zu Aufgabe 44

## Lernfeld 2: Vektoren

### Hinweis zu den Verständnisfragen

§ **490 Hinweis zu Frage 3:** Die natürlichen Zahlen bilden weder bezüglich der Multiplikation noch bezüglich der Addition eine Gruppe, da es für beide Operationen in der Regel kein inverses Element in den natürlichen Zahlen gibt. Für die Subtraktion wäre das inverse Element eine negative Zahl – entsprechend bilden die ganzen Zahlen eine Gruppe bezüglich der Addition, da (a) die Addition ganzer Zahlen wieder eine ganze Zahl ergibt, (b) das Assoziativgesetz gilt, (c) die Null als neutrales Element existiert und (d) zu jedem $z \in \mathbb{Z}$ ein inverses Element $-z \in \mathbb{Z}$ existiert. Diese Gruppe ist abelsch, da das Kommutativgesetz gilt. Die ganzen Zahlen bilden jedoch keine Gruppe bezüglich der Multiplikation, da in der Regel kein inverses Element $1/z$ in $\mathbb{Z}$ existiert. Dies ist erst bei den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ der Fall – diese bilden eine abelsche Gruppe sowohl bezüglich der Addition als auch bezüglich der Multiplikation. Gleiches gilt für die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Zurück zu Frage 3

§ **491 Hinweis zu Frage 4:** ein Korper ist eine Menge mathematischer Objekte für die zwei Operationen definiert sind, die die Eigenschaften einer Gruppe erfüllen. Wir können auf die Antworten aus Frage 3 zurückgreifen: (a) die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen bildet weder bezüglich Addition noch bezüglich der Multiplikation eine Gruppe und damit auch keinen Körper; (b) die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen bildet zwar bezüglich der Addition eine Gruppe, nicht jedoch bezüglich der Multiplikation – daher bildet sie ebenfalls keinen Körper. (c) die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen bildet ebenso wie die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen eine Gruppe bezüglich der Addition ebenso wie bezüglich der Multiplikation. Damit bilden beide jeweils einen Körper.

Zurück zu Frage 4

§ **492 Hinweis zu Frage 5:** das Skalarprodukt zweier senkrecht aufeinander stehender Vektoren verschwindet, d.h. wenn das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ wirklich senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht, muss gelten

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{b} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0 \,.$$

Dies lässt sich in kartesischen Koordinaten leicht überprüfen:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \\ &= a_x(a_y b_z - a_z b_y) + a_y(a_z b_x - a_x b_z) + a_z(a_x b_y - a_y b_x) \\ &= a_x a_y b_z - a_x a_z b_y + a_y a_z b_x - a_y a_x b_z + a_z a_x b_y - a_z a_y b_x = 0 \,, \end{aligned}$$

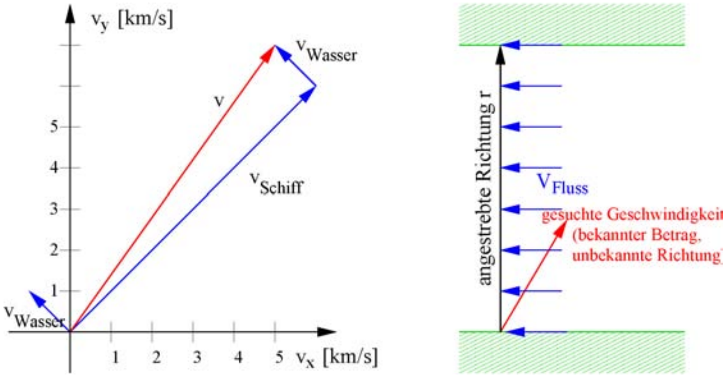



Abbildung 47: Lösungshinweise Aufgaben 56 (links) und 57 (rechts)

d.h. $\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$. Das Verfahren für $\vec{b}$ ist entsprechend.

Zurück zu Frage 5

§ **493 Hinweis zu Frage 6:** eine Kraft $\vec{F}$ bewirkt gemäß zweitem Newton'schen Axiom $\vec{F} = m\vec{a}$ eine Beschleunigung $\vec{a}$, die wiederum zu einer Änderung der Geschwindigkeit $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ führt. Ändert sich nur die Richtung, nicht aber der Betrag der Geschwindigkeit, so ändert sich die kinetische Energie $mv^2/2$ des Teilchens nicht und die Kraft verrichtet keine Arbeit. Ändert sich dagegen der Betrag der Geschwindigkeit, so bewirkt die Beschleunigung eine Änderung der kinetischen Energie, d.h. es muss eine Arbeit verrichtet werden.
Die Arbeit ist $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$, d.h. die Arbeit verschwindet dann, wenn die Kraft $\vec{F}$ senkrecht auf der Bewegungsrichtung $\vec{s}$ steht. Die Bewegungsrichtung $\vec{s}$ ist parallel zur Geschwindigkeit $\vec{v}$. Aus der Definition der Lorentzkraft als Kreuzprodukt aus Geschwindigkeit $\vec{v}$ und magnetischer Flussdichte $\vec{B}$ folgt, dass die Lorentz-Kraft senkrecht auf der Bewegung steht – das ist auch anschaulich einleuchtend, da bei einer Kreisbewegung eine Zentralkraft wirkt, die senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht. Also ist $\vec{F} \perp \vec{s}$ und damit $W = 0$, d.h. die Lorentz-Kraft verrichtet keine Arbeit. Die formale Argumentation haben wir bereits in Frage 5 durchgeführt.
Allgemein können wir aus dieser Frage lernen: bei einer Kreisbewegung wirkt eine Zentralkraft; da diese jedoch senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht, verrichtet sie keine Arbeit.

Zurück zu Frage 6

### Hilfe zu den Aufgaben aus dem Rechentraining

§ **494** Hinweis zu Aufgabe 56: Sie können die Geschwindigkeiten zu einer resultierenden Geschwindigkeit addieren und anschließend gemäß $\vec{r} = \vec{v}t$ den Ort des Schiffes bestimmen. Die graphische Lösung für die resultierende Geschwindigkeit ist im linken Teil von Abb. 47 gegeben. Oder Sie bestimmen erst den durch die Eigenbewegung des Schiffes zurück zu legenden Weg $\vec{r}_{\text{Schiff}} = \vec{v}_{\text{Schiff}}t$ sowie den durch die Strömung bewirkten Versatz $\vec{r}_{\text{Wasser}} = \vec{v}_{\text{Wasser}}t$ und addieren dann beide zu $\vec{r} = \vec{r}_{\text{Schiff}} + \vec{r}_{\text{Wasser}}$.

Zurück zu Aufgabe 56

§ **495** Hinweis zu Aufgabe 57: die Situation ist im rechten Teil von Abb. 47 angedeutet. Bekannt ist die zurückzulegende Strecke, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ebenso wie die Strecke, um die das Boot während der 30 min dauernden Überfahrt durch die Strömung versetzt wird.

Zurück zu Aufgabe 57

§ **496** Hinweis zu Aufgabe 58: falls Sie sich völlig verloren fühlen sollten, machen Sie sich eine 2D-Skizze, in dem Sie die $z$-Komponente gleich Null setzen. Das ist legitim, da für alle Punkte $z = 2$ ist, d.h. das Dreieck liegt in einer Ebene parallel zur $xy$-Ebene durch $z = 2$. Bei der Bestimmung der Vektoren müssen Sie die Richtung beachten.

Zurück zu Aufgabe 58

§ **497** Hinweis zu Aufgabe 59: ein Vektor wird durch seine Komponenten entlang der Einheitsvektoren des Koordinatensystems bestimmt derart, dass die Summe aus den Produkten der Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ mit der entsprechenden Komponente $r_i$ gebildet werden. Für das konventionelle kartesische Koordinatensystem ist dies in (5) angegeben.

Zurück zu Aufgabe 59

§ **498** Hinweis zu Aufgabe 63: die resultierende Kraft ergibt sich als die Summe der Kräfte. Laut erstem Newton'schen Axiom verharrt ein Körper im Zustand der Ruhe bzw. der gleichförmigen Bewegung, wenn keine Kräfte auf ihn wirken bzw. die Summe der auf ihn wirkenden Kräfte gleich Null ist. Laut zweitem Newton'schen Axiom gilt für die Beschleunigung $\vec{a}$ einer Masse $m$ durch eine Kraft $\vec{F}$: $\vec{F} = m\vec{a}$. Die Beschleunigung gibt die Richtung und Stärke der Bewegungsänderung und damit bei einem ruhenden Körper auch die Richtung, in die sich dieser Körper unter Einwirkung der Kraft in Bewegung setzt. Zurück zu Aufgabe 63

§ **499** Hinweis zu Aufgabe 64: wichtig ist wieder das erste Newton'sche Axiom: ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn die Summe der auf ihn wirkenden Kräfte Null ist. Zurück zu Aufgabe 64

§ **500** Hinweis zu Aufgabe 65: die wichtigen physikalischen Hinweise sind bereits in der Aufgabenstellung gegeben. Rechentechnisch können Sie diese direkt umsetzen, sie müssen lediglich die Abstände der Ladungen vom Ursprung bestimmen sowie aus den Ortsvektoren der einzelnen Ladungen die Richtungen des elektrischen Feldes – Achtung, Sie benötigen aus den Ortsvektoren nur die Richtungsinformation, nicht jedoch den Abstand, d.h. die Länge des Vektors. Zurück zu Aufgabe 65

§ **501** Hinweis zu Aufgabe 66: Impulserhaltung bedeutet, dass der Gesamtimpuls vor dem Stoß gleich dem Gesamtimpuls nach dem Stoß ist. Da in diesem Fall die angestoßenen Kugeln vor dem Stoß in Ruhe sind, verschwindet ihr Impuls vor dem Stoß und der Gesamtimpuls vor dem Stoß ist durch den Impuls der anstoßenden Kugel gegeben. Entsprechend ist der Gesamtimpuls nach dem Stoß durch die Impulse der angestoßenen Kugeln gegeben: $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Zurück zu Aufgabe 66

§ **502** Hinweis zu Aufgabe 68: der Winkel geht in das Skalarprodukt ein, also lässt sich mit Hilfe des Skalarprodukts auch der Winkel bestimmen. Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn der Winkel zwischen ihnen ein rechter ist – die Winkelabhängigkeit des Skalarprodukts ist also besonders einfach. Zurück zu Aufgabe 68

§ **503** Hinweis zu Aufgabe 69: Richtungswinkel sind ein spezielles Beispiel für die allgemeine Bestimmung eines Winkels zwischen zwei Vektoren mit Hilfe des Skalarproduktes. Beim Richtungswinkel wird das Skalarprodukt aus dem Vektor und dem Einheitsvektor entlang der entsprechenden Koordinatenachse gebildet. Zurück zu Aufgabe 69

§ **504** Hinweis zu Aufgabe 73: führen Sie das Problem auf die Bestimmung des Flächeninhalts eines Parallelogramms zurück; konsultieren Sie gegebenenfalls Abb. 7.

Zurück zu Aufgabe 73

§ **505** Hinweis zu Aufgabe 74: das Volumen des Parallelepipeds ist durch das Spatprodukt gegeben. Führen Sie dieses ganz formal mit der unbekannten Komponente $t$ aus und setzen den bekannten Wert für das Volumen ein. Das ergibt eine Gleichung mit einer unbekannten.

Zurück zu Aufgabe 74

§ **506** Hinweis zu Aufgabe 75: beide Seiten der Gleichung komponentenweise ausführen und anschließend vergleichen. Zurück zu Aufgabe 75

§ **507** Hinweis zu Aufgabe 76: beide Seiten der Gleichung komponentenweise ausführen und anschließend vergleichen. Zurück zu Aufgabe 76

**(Muster)Lösungen zu den Aufgaben aus dem Rechentraining**

§ **508** Musterlösung zu Aufgabe 56: die resultierende Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Schiffes ist die Summe aus seiner Eigengeschwindigkeit $\vec{v}_{\text{Schiff}}$ und der Geschwindigkeit der Strömung $\vec{v}_{\text{Wasser}}$:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{Schiff}} + \vec{v}_{\text{Wasser}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ km/h} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ km/h} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ km/h} .$$

Der Ort des Schiffes nach einer Stunde ergibt sich daraus durch Multiplikation mit der Zeit zu

$$\vec{r} = \vec{v} \cdot t = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ km} .$$

Der Abstand zum Ausgangspunkt, d.h. zum Ursprung des Koordinatensystems, ist durch den Betrag des Vektors $\vec{r}$ gegeben:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{(5 \text{ km})^2 + (7 \text{ km})^2} = \sqrt{84 \text{ km}^2} = 2\sqrt{21} \text{ km} .$$

Zurück zu Aufgabe 56

§ **509** Lösung zu Aufgabe 57: die Fähre hat die Strecke $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (0, 3)$ km innerhalb von 30 min zurück zu legen. In der gleichen Zeit wird die Fähre durch die Strömung um ein Stückchen $\Delta\vec{r} = \vec{v}_{\text{Fluss}} t = (-1/2, 0)$ km versetzt, d.h. die Fährfrau muss auf einen Punkt $\vec{r}_{\text{Ziel}} = \vec{r} - \Delta\vec{r} = (1/2, 3)$ km zielen. Da dieses angepeilte Ziel in einer halben Stunde erreicht werden soll, muss die Geschwindigkeit der Fähre gegeben sein zu $\vec{v}_{\text{Fähre}} = \vec{r}_{\text{Ziel}}/t = (1, 6)$ km/h.
Eine alternative Darstellung addiert nicht die Wege sondern die Geschwindigkeiten: die Fähre hat die Strecke $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (0, 3)$ km innerhalb von 30 min zurück zu legen, d.h. die resultierende Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Fähre über Grund ist wegen $\vec{v} = \vec{r}/t$ gegeben als $\vec{v} = (0, 6)$ km/h. Diese Geschwindigkeit setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeit $\vec{v}_{\text{Fluss}}$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}_{\text{Fähre}}$ gegenüber dem Wasser, d.h. $\vec{v}_{\text{Fähre}} = \vec{v} - \vec{v}_{\text{Fluss}} = (1, 6)$ km/h.

Zurück zu Aufgabe 57

§ **510** Musterlösung zu Aufgabe 58: wie im Hinweis angegeben, ist die Berücksichtigung der Richtung die einzige Herausforderung in dieser Aufgabe. Exemplarisch betrachten wir dies für die Seite $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, d.h. den Vektor, der vom Punkt $B$ zum Punkt $C$ gerichtet ist. Von $B$ nach $C$ gelangen wir, in dem wir zuerst von $B$ entgegen dem Ortsvektor $\vec{r}_B$ zum Ursprung zurück gehen und von dort entlang der Vektors $\vec{r}_C$ zum Punkt $C$:

$$\vec{a} = -\vec{r}_B + \vec{r}_C = \vec{r}_C - \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Für die Vektoren entlang der beiden anderen Dreiecksseiten ergibt sich entsprechend

$$\vec{b} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_x$$

und

$$\vec{c} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{e}_y .$$

Bei allen drei Vektoren verschwindet die $z$ Komponente, d.h. die drei Dreiecksseiten liegen, wie bereits im Hinweis in § 496 festgestellt, in einer Ebene parallel zur $xy$-Ebene. Außerdem sind die Seiten $\vec{b}$ und $\vec{c}$ parallel zur $x$- bzw. $y$-Achse. Zurück zu Aufgabe 58

§ **511** Musterlösung zu Aufgabe 59: ein Vektor $\vec{r}$ wird durch seine Komponenten entlang der Einheitsvektoren des Koordinatensystems bestimmt derart, dass die Summe aus den Produkten der Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ mit der entsprechenden Komponente $r_i$ gebildet werden

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} a'_i \vec{e}_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+2+3 \\ 1-2+3 \\ 1+2-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zurück zu Aufgabe 59

§ **512** Lösung zu Aufgabe 60: die Beträge ergeben sich als Wurzel aus der Summe der quadrierten Komponenten zu

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} \qquad \text{und} \qquad b = |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}\,.$$

Da ein Vektor sich über seine Länge und seine Richtung definiert, kann er als das Produkt aus seinem Betrag mit einem Einheitsvektor entlang seiner Richtung dargestellt werden. Oder umgekehrt: der Einheitsvektor in Richtung eines Vektors ist dieser Vektor dividiert durch seinen Betrag

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_{\vec{b}} = \frac{\vec{b}}{b} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 60

§ **513** Lösung zu Aufgabe 61: die Vektoren können direkt eingesetzt und anschließend komponentenweise zusammen gefasst werden:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ -a_y \\ b_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x + 2b_x \\ 2a_y \\ -a_z - b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_x + 3b_x \\ 2a_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \lambda\vec{a} - \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_x \\ -a_y \\ b_z \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} a_x + 2b_x \\ 2a_y \\ -a_z - b_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_x + \mu b_x + \nu a_x + \nu b_x \\ \lambda a_y - \mu a_y + 2\nu a_y \\ \lambda a_z + \mu b_z - \nu a_z - \nu b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \nu) a_z \\ (\lambda - \mu + 2\nu) a_y \\ (\lambda - \nu) a_z + (\mu - \nu) b_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 61

§ **514** Lösung zu Aufgabe 62: Gesucht sind die folgenden Ausdrücke:

$$2(\vec{a} + \vec{b}) = 2 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -10 \end{pmatrix}\,,$$

$$4\vec{a} - 4\vec{b} = 4(\vec{a} - \vec{b}) = 4 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

sowie

$$3\vec{a} + 4\vec{b} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 24 \\ -16 \end{pmatrix}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 62

§ **515** Musterlösung zu Aufgabe 63: die resultierende Kraft ist die Summe der wirkenden Kräfte, d.h. allgemein

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

bzw. in diesem Spezialfall

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{4} F_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ N} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ N} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ N} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ N} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ N} \neq \vec{0} \text{ N} .$$

Die resultierende Kraft ist von Null verschieden, der Körper wird also durch diese Kraft beschleunigt und verharrt nicht in Ruhe. Die Beschleunigung ergibt sich gemäß $\vec{a} = \vec{F}/m$, d.h. sie erfolgt in Richtung von $\vec{a}$. Die Masse des Körpers ist nur ein Vorfaktor, mit dem die Kraft skaliert wird. Da diese nicht gegeben ist, können wir die Beschleunigung angeben als

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ N} = \begin{pmatrix} 3/m \\ 4/m \\ -6/m \end{pmatrix} \text{ N} .$$

Alternativ können wir auch, wie in der Aufgabenstellung vorgeschlagen, die Bewegungsrichtung mit Hilfe des Einheitsvektors entlang der Beschleunigung angeben:

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{61}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} .$$

Beachten Sie, dass die Bewegungsrichtung nur dann entlang der Beschleunigung liegt, wenn der Körper keine Anfangsgeschwindigkeit hat sondern aus der Ruhelage beschleunigt wird.

Zurück zu Aufgabe 63

§ **516** Musterlösung zu Aufgabe 64: damit der Körper in seinem Bewegungszustand bleibt, muss die Summe der auf ihn wirkenden Kräfte verschwinden, d.h. die fünfte Kraft muss so gewählt werden, dass die Summe der Kräfte verschwindet:

$$\sum_{i=1}^{5} \vec{F}_i \stackrel{!}{=} 0$$

oder aufgelöst nach der gesuchten Kraft $\vec{F}_5$:

$$\vec{F}_5 = - \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i .$$

Mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Kräften ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ N} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ N} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ N} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ N} + \vec{F}_5 = \vec{0} \text{ N}$$

oder aufgelöst nach der unbekannten Kraft $\vec{F}_5$:

$$\vec{F}_5 = - \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ N} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ N} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ N} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ N} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N} .$$

Zurück zu Aufgabe 64

§ **517** Musterlösung zu Aufgabe 65: für die Beträge des elektrischen Feldes sind zuerst die Beträge der Ortsvektoren zu bestimmen:

$$r_1 = |\vec{r}_1| = \sqrt{3} \text{ m} , \qquad r_2 = |\vec{r}_2| = \sqrt{2} \text{ m} \qquad \text{und} \qquad r_3 = |\vec{r}_3| = \sqrt{6} \text{ m} .$$

Die Beträge der elektrischen Feldstärken im Ursprung sind $E_i = q_i/r_i^2$ und damit

$$E_1 = \frac{1}{3}\ \mathrm{V/m}\,, \qquad E_2 = \frac{2}{4}\ \mathrm{V/m} = \frac{1}{2}\ \mathrm{V/m} \qquad \text{und} \qquad E_3 = \frac{3}{6}\ \mathrm{V/m} = \frac{1}{2}\ \mathrm{V/m}\,.$$

Dabei haben wir das Vorzeichen der Ladung noch nicht berücksichtigt; dieses werden wir erst bei der Bestimmung der Richtung mit berücksichtigen. Die Richtung des elektrischen Feldes ist jeweils radial, d.h. der Ortsvektor der Ladung ist parallel oder antiparallel zur Richtung und skaliert mit dem Abstand der Ladung vom Ursprung. Für die positiven Ladungen ist das elektrische Feld von der Ladung weg gerichtet, d.h. antiparallel zum Ortsvektor, für eine negative Ladung ist das Feld parallel zum Ortsvektor. Damit ergibt sich für die Richtungen der einzelnen Felder

$$\vec{e}_{\vec{E}_1} = -\frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{-1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\,, \quad \vec{e}_{\vec{E}_2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_{\vec{E}_3} = -\frac{\vec{r}_3}{r_3} = \frac{-1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Für die elektrischen Feldstärken der Felder der einzelnen Ladungen im Ursprung ergibt sich damit

$$\vec{E}_1 = \frac{-1}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\,, \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{E}_3 = \frac{-1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

sowie für das Gesamtfeld

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{3}\vec{E}_i = \frac{-1}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{-1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{6}}\begin{pmatrix}3-2\sqrt{2}\\6+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\\-3-3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\end{pmatrix}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 65

§ **518** Musterlösung zu Aufgabe 66: Der Gesamtimpuls vor und nach dem Stoß ist gleich, d.h. es gilt

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Diesen Impuls hatte die anstoßende Kugel, d.h. bei einer Masse von 200 g muss Sie eine Geschwindigkeit

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{p}_0}{m} = \begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

gehabt haben. Das Ergebnis ist unabhängig von den Massen der angestoßenen Kugeln, da wir nur deren Impulse betrachtet haben. Welche Geschwindigkeiten zu diesen Impulsen gehören hängt dagegen sehr wohl von den jeweiligen Massen ab.

Zurück zu Aufgabe 66

§ **519** Lösung zu Aufgabe 67: alle Produkte können direkt ausgeführt werden.

$$s_1 = \vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = -2+3+4 = 5\,.$$

$$\begin{aligned} s_2 &= \vec{a}\cdot(\vec{c}+2\vec{b}) = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}3\\-1\\-3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\1\\-7\end{pmatrix} \\ &= -7+3+14 = 10\,. \end{aligned}$$

Beim nächsten Skalarprodukt hilft Anwendung der Rechenregeln und Erinnerung an die binomischen Formeln

$$s_3 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}^2 = a^2 - b^2 = 14 - 9 = 5\,.$$

Bei der letzten Aufgabe ist es vom Aufwand her egal, ob man erst die Rechenregeln anwendet und dann die Vektoren einsetzt oder ob man die Vektoren gleich einsetzt. Ich habe die erstere Variante gewählt:

$$\begin{aligned} s_4 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}^2-\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= (-3-3+6)+(6-1+6)-(4+1+4)-(-2+3+4) = 11-9-5 = -3\,. \end{aligned}$$

Da das erste Skalarprodukt, $\vec{a}\cdot\vec{c}$ verschwindet, müssen $\vec{a}$ und $\vec{c}$ senkrecht auf einander stehen.

Zurück zu Aufgabe 67

§ **520** Musterlösung zu Aufgabe 68: zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal, d.h. sie stehen senkrecht auf einander, wenn ihr Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ verschwindet. Daher müssen wir jeweils paarweise die Skalarprodukte der Vektoren betrachten:

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = -2-6-24 = -32 = \vec{b}\cdot\vec{a}\,, \\ \vec{a}\cdot\vec{c} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -6-6+8 = -4 = \vec{c}\cdot\vec{a}\,, \\ \vec{a}\cdot\vec{d} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 3-4+24 = 23 = \vec{d}\cdot\vec{a}\,, \\ \vec{b}\cdot\vec{c} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 12+9-12 = 9 = \vec{c}\cdot\vec{b}\,, \\ \vec{b}\cdot\vec{d} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -6+6-36 = -36 = \vec{d}\cdot\vec{b} \quad \text{und} \\ \vec{c}\cdot\vec{d} &= \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -18+6+12 = 0 = \vec{d}\cdot\vec{c} \quad \Rightarrow \quad \vec{c}\perp\vec{d}\,. \end{aligned}$$

Von den vier Vektoren stehen nur $\vec{c}$ und $\vec{d}$ senkrecht auf einander. Zurück zu Aufgabe 68

§ **521** Musterlösung zu Aufgabe 69: Winkel zwischen dem Vektor $\vec{a}$ und dem Einheitsvektor $\vec{e}_i$ ist in allgemeiner Form

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_i}{|\vec{a}|\,|\vec{e}_i|}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_i}{|\vec{a}|}\right) = \arccos\left(\frac{a_x}{a}\right)\,.$$

Mit $|\vec{a}| = a = \sqrt{70}$ ergibt sich

$$\alpha_{\mathrm{x}} = \arccos\frac{5}{\sqrt{70}} = 53.3^\circ\,, \quad \alpha_{\mathrm{y}} = \arccos\frac{-3}{\sqrt{70}} = 111.0^\circ$$

und

$$\alpha_z = \arccos\frac{-6}{\sqrt{70}} = 135.8^\circ\,.$$

Zurück zu Aufgabe 69

§ **522** Lösung zu Aufgabe 70: die Arbeit ist definiert über das Skalarprodukt aus Kraft und Weg:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\ \mathrm{N}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\ \mathrm{m} = (4+12+6)\ \mathrm{Nm} = 22\ \mathrm{Nm}\,.$$

Aus der Anschauung wissen wir noch, dass

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\,\cos\angle(\vec{F},\vec{s}) = |F_{\vec{s}}|\,|\vec{s}|\,,$$

d.h. wir erhalten für den Betrag der Projektion

$$F_{\vec{s}} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{s}}{|\vec{s}|}\,.$$

Um daraus einen Vektor zu erhalten, benötigen wir noch die Richtung. Da wir die Projektion auf $\vec{s}$ betrachten, muss diese auch die Richtung von $\vec{s}$ haben. Daher multiplizieren wir mit dem Einheitsvektor in Richtung $\vec{s}$ und erhalten

$$\vec{F}_{\vec{s}} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{s}}{|\vec{s}|}\,\vec{e}_{\vec{s}} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{s}}{|\vec{s}|}\,\frac{\vec{s}}{|s|} = \frac{\vec{F}\cdot\vec{s}}{|\vec{s}|^2}\,\vec{s} = \frac{22}{29}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\ \text{N}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 70

§ **523** Lösung zu Aufgabe 71: Das Kreuzprodukt liefert uns automatisch einen Vektor, der senkrecht auf den beiden Ausgangsvektoren steht:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\,.$$

Dieser Vektor ist allerdings kein Einheitsvektor sondern hat den Betrag $\sqrt{2^2+0^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Daher müssen wir noch durch diesen Betrag teilen und erhalten

$$\vec{e}_{\vec{a}\times\vec{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 71

§ **524** Lösung zu Aufgabe 72: der zu projizierende Vektor $\vec{p} = \vec{a}\times\vec{b}$ ergibt sich zu

$$\vec{p} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\,.$$

Für die Projektion bestimmen wir zuerst mit Hilfe des Skalarprodukts den Betrag des projizierten Vektors:

$$|\vec{p}_{\vec{c}}| = \frac{\vec{e}\cdot\vec{c}}{|c|} = \frac{8}{\sqrt{49}} = \frac{8}{7}\,.$$

Die Richtung ist durch den Einheitsvektor in Richtung $\vec{c}$ gegeben, d.h.

$$\vec{e}_{\vec{c}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-6\\3\\-2\end{pmatrix}\,.$$

Damit ergibt sich für die Projection

$$\vec{p}_{\vec{c}} = |\vec{p}_{\vec{c}}|\vec{e}_{\vec{c}} = \frac{8}{49}\begin{pmatrix}-6\\3\\-2\end{pmatrix}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 72

§ **525** Musterlösung zu Aufgabe 73: der Betrag des Kreuzprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$ gibt den Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms. Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt die Hälfte des Flächeninhalts des Parallelogramms und damit

$$F = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{2} = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \frac{\sqrt{464}}{2} = 10.77\ .$$

Zurück zu Aufgabe 73

§ **526** Musterlösung zu Aufgabe 74: das Volumen des Parallelepipeds ist durch das Spatprodukt bestimmt, $V = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$. Einsetzen der Vektoren liefert eine Gleichung mit einer Unbekannten:

$$\begin{aligned} 112 &= \left|\left(\begin{pmatrix} 5 \\ t \\ -6 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5t+42 \\ 24+20 \\ 35+4t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \\ &= 15t-126+144+150-70-8t = 7t+98\ . \qquad \rightarrow \qquad t=2 \end{aligned}$$

und damit $\vec{a} = (5, 2, -6)$ Zurück zu Aufgabe 74

§ **527** Musterlösung zu Aufgabe 75: ausführen des doppelten Kreuzproduktes (ohne Anwendung der bac-cab-Regel) liefert

$$\begin{aligned} \vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}) &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_yb_z-a_zb_y \\ a_zb_x-a_xb_z \\ a_xb_y-a_yb_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y(a_xb_y-a_yb_x)-a_z(a_zb_x-a_xb_z) \\ a_z(a_yb_z-a_zb_y)-a_x(a_xb_y-a_yb_x) \\ a_x(a_zb_x-a_xb_z)-a_y(a_yb_z-a_zb_y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_xa_yb_y-a_y^2b_x-a_z^2b_x+a_za_xb_z \\ a_za_yb_z-a_z^2b_y-a_x^2b_y+a_xa_yb_x \\ a_xa_zb_x-a_x^2b_z-a_y^2b_z-a_ya_zb_y \end{pmatrix}\ . \end{aligned}$$

Addition des Nullvektors in der Form $\vec{0} = (a_x^2b_x - a_x^2b_x, a_y^2b_y - a_y^2b_y, a_z^2b_z - a_z^2b_z)$ ändert an dem Ausdruck nichts, bringt ihn aber näher an die gesuchte Form:

$$\begin{aligned} \vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b}) &= \begin{pmatrix} a_xa_yb_y-a_y^2b_x-a_z^2b_x+a_za_xb_z \\ a_za_yb_z-a_z^2b_y-a_x^2b_y+a_xa_yb_x \\ a_xa_zb_x-a_x^2b_z-a_y^2b_z+a_ya_zb_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x^2b_x-a_x^2b_x \\ a_y^2b_y-a_y^2b_y \\ a_z^2b_z-a_z^2b_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_xa_yb_y+a_xa_zb_z+a_x^2b_x \\ a_za_yb_z+a_xa_yb_x+a_y^2b_y \\ a_xa_zb_x+a_ya_zb_y+a_z^2b_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x^2b_x+a_y^2b_x+a_z^2b_x \\ a_x^2b_y+a_y^2b_y+a_z^2b_y \\ a_x^2b_z+a_y^2b_z+a_z^2b_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_x(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z) \\ a_y(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z) \\ a_y(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x(a_x^2+a_y^2+a_z^2) \\ b_y(a_x^2+a_y^2+a_z^2) \\ b_z(a_x^2+a_y^2+a_z^2) \end{pmatrix} \\ &= (a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - (a_x^2+a_y^2+a_z^2)\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a} - a^2\vec{b}\ . \end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 75

§ **528** Musterlösung zu Aufgabe 76: ausführen der beiden Seiten der Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \text{LS} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\times\left[\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_yc_z-b_zc_y \\ b_zc_x-b_xc_z \\ b_xc_y-b_yc_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_y(b_xc_y-b_yc_x)-a_z(b_zc_x-b_xc_z) \\ a_z(b_yc_z-b_zc_y)-a_x(b_xc_y-b_yc_x) \\ a_x(b_zc_x-b_xc_z)-a_y(b_yc_z-b_zc_y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_yb_xc_y-a_yb_yc_x-a_zb_zc_x+a_zb_xc_z \\ a_zb_yc_z-a_zb_zc_y-a_xb_xc_y+a_xb_yc_x \\ a_xb_zc_x-a_xbxc_z-a_yb_yc_z+a_yb_zc_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{RS} &= \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \\
&= \begin{pmatrix} b_x a_x c_x + b_x a_y c_y + b_x a_z c_z - c_x a_x b_x - c_x a_y b_y - c_x a_z b_z \\ b_y a_x c_x + b_y a_y c_y + b_y a_z c_z - c_y a_x b_x - c_y a_y b_y - c_y a_z b_z \\ b_z a_x c_x + b_z a_y c_y + b_z a_z c_z - c_z a_x b_x - c_z a_y b_y - c_z a_z b_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_y b_x c_y - a_y b_x c_x + a_z b_x c_z - a_z b_z c_x \\ a_x b_y c_x - a_x b_x c_y + a_z b_y c_z - a_z b_z c_y \\ a_x b_z c_x - a_x b_x c_z + a_y b_z c_y - a_z b_z c_z \end{pmatrix} = \text{LS}
\end{aligned}
$$

Zurück zu Aufgabe 74

## Lernfeld 3: Funktionen

### Hinweis zur Verständnisfrage

§ **529 Hinweis zu Frage 7:** die Darstellungen $y(t)$ und $y(x)$ sind bis auf die Skalierung der Abszisse identisch, da $x$ eine lineare Funktion von $t$ ist, genauer $x = vt$. Die Wurfparabel im rechten Teilbild kann also statt $y(x)$ auch als $y(x) = y(vt)$ geschrieben werden, d.h. die Zeitachse wird einfach mit $v$ skaliert. Nur bei einer linearen Abhängigkeit vom entsprechenden Parameter werden Parameterdarstellung und explizite Darstellung bis auf die Skalierung der Abszisse identisch – bei anderen funktionalen Zusammenhängen wird die Abszisse entsprechend dieses Zusammenhangs skaliert, so dass die graphische Darstellung der Funktion verzerrt wird.

Zurück zu Frage 7

### Hilfe zu den Aufgaben aus dem Rechentraining

§ **530** Hinweis zu Aufgabe 89: verwenden Sie die zeichnerische Lösung, um sich zu veranschaulichen, ob überhaupt eine Umkehrfunktion existieren kann. Denken Sie daran, für eine Funktion ist die Eindeutigkeit der Zuordnung gefordert!

Zurück zu Aufgabe 89

§ **531** Hinweis zu Aufgabe 90: die Umwandlung mit Hilfe der Umkehrfunktion einer Winkelfunktion wäre zwar sehr direkt, liefert aber keine besonders schöne Funktion. Versuchen Sie stattdessen, eine der beiden Parametergleichungen so umzuwandeln, dass diese das Quadrat einer Winkelfunktion enthält. Dieses können Sie dann wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ in die andere Winkelfunktion überführen und in die andere Parametergleichung einsetzen.

Zurück zu Aufgabe 90

§ **532** Hinweis zu Aufgabe 91: Identifizieren Sie zuerst den Parameter. Versuchen Sie dann, sich aus der verbalen (oder formalen) Beschreibung der Funktion eine Skizze zu erstellen. Falls Ihnen das nicht gelingt, wählen Sie für die Konstanten einen beliebigen Wert (im Zweifelsfall tut es auch die 1) und erstellen sich eine Wertetabelle, aus der Sie die Skizze der Funktion entwickeln können.

Zurück zu Aufgabe 91

§ **533** Hinweis zu Aufgabe 92: beginnen Sie mit Definitions- und Wertebereich, wenn es garnicht anders geht, helfen Sie sich mit einer Skizze der Funktion weiter.

Zurück zu Aufgabe 92

§ **534** Hinweis zu Aufgabe 93: einsetzen von $x = 0$ zeigt, dass sowohl Nenner als auch Zähler an dieser Stelle Null werden und damit der Quotient nicht definiert ist. Daher ist die Regel von l'Hôspital anzuwenden.

Zurück zu Aufgabe 93

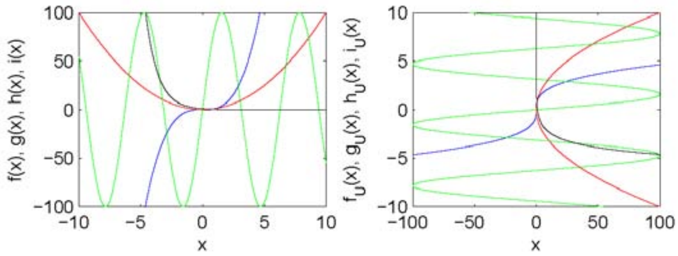



Abbildung 48: Funktionen aus Aufgabe 89 (links) sowie deren Spiegelung an der Winkelhalbierenden als graphische Annäherung an eine mögliche Umkehrfunktion (rechts)

§ **535** Hinweis zu Aufgabe 94: einsetzen von $x = 1$ in die Funktionsgleichung zeigt, dass der Nenner Null wird, d.h. zur Bestimmung des Grenzwerts wird die Regel von l'Hôspital benötigt. Die Ableitung der Nennerfunktion verschwindet jedoch ebenfalls bei $x = 1$, so dass l'Hôspital ein zweites Mal anzuwenden ist.

Zurück zu Aufgabe 94

§ **536** Hinweis zu Aufgabe 95: stellen Sie bei Bedarf die Funktion $I(s)$ graphisch dar, um eine grobe Annäherung an den Funktionsverlauf zu erhalten, z.B. $I(5\text{ m}) = I_0/2$, $I(10\text{ m}) = I_0/4$, ... . In gleichen Tiefenschritten wird jeweils die Intensität halbiert, d.h. bei der Funktion muss es sich um eine Exponentialfunktion mit der Basis 1/2 handeln.

Zurück zu Aufgabe 95

§ **537** Hinweis zu Aufgabe 97: in der Funktion $s(r)$ tritt die unabhängige Variable u.a. als Argument eine transzendenten Funktion auf. Bevor Sie sich an dem Gesamtausdruck die Zähne ausbeißen, versuchen Sie es mit zwei vereinfachten Gleichungen, in dem Sie nur jeweils den ersten bzw. den zweiten Summanden der runden Klammer verwenden.

Zurück zu Aufgabe 97

§ **538** Hinweis zu Aufgabe 99: die Reihe der natürlichen Zahlen geht aus der Folge natürlichen Zahlen

$$a_1 = 1\,,\;\; a_2 = 2\,,\;\; a_3 = 3\;\;\ldots\;\; a_{100} = 100\;\;\ldots\;\; a_n = 0\;\;\ldots$$

durch Bildung der Partialsummen

$$s_i = \sum_{k=1}^{i} i$$

hervor. Für $s_{100}$ sind also alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Überlegen Sie sich ein geschicktes Verfahren.

Zurück zu Aufgabe 99

### (Muster)Lösungen zu den Aufgaben aus dem Rechentraining

§ **539** Musterlösung zu Aufgabe 89: die graphische Lösung zur Annäherung der Umkehrfunktion finden Sie in Abb. 48. Die Funktion $f(x) = x^3$ (blaue Kurve in Abb. 48) hat als Definitions- und Wertebereich $\mathbb{R}$; sie ist streng monoton wachsend, so dass kein Funktionswert mehr als einer unabhängigen Variablen zugeordnet wird. Bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden entsteht daher wieder eine eindeutige Zuordnung und damit eine Funktion. Die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^3$ ist $f_{\rm U} = \sqrt[3]{x}$. Werte- und Definitionsbereich vertauschen sich bei der Umkehrung der Funktion – in diesem Beispiel ist das irrelevant.
Die Funktion $g(x) = x^2$ (rote Kurve in Abb. 48) hat ebenfalls $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich, der Wertbereich ist jedoch auf reelle Zahlen größer gleich Null beschränkt, d.h. $\mathbb{R}^+$. Die Funktion ist streng monoton fallend im negativen Teil des Definitionsbereiches und streng monoton wachsend im positiven Teil. Jedes Element des Wertebereichs (mit Ausnahme $g(x) = 0$) wird durch zwei verschiedene Argumente erzeugt, so dass keine eindeutige Umkehrung der Funktion $g(x)$ möglich ist. In der graphischen Lösung erkennt man dies daran, dass die rote Kurve im rechten Teil keine eindeutige Zuordnung zwischen Argument und Funktionswert bildet.

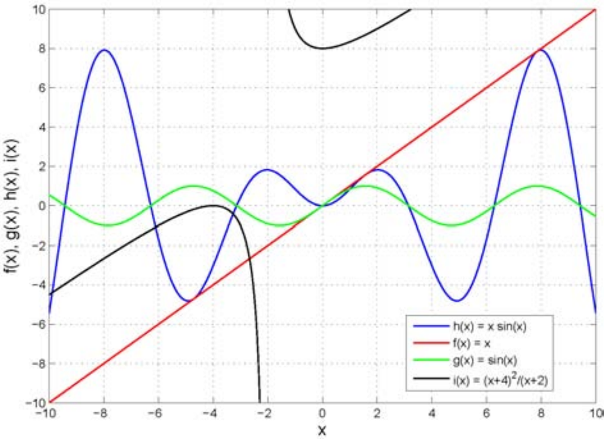


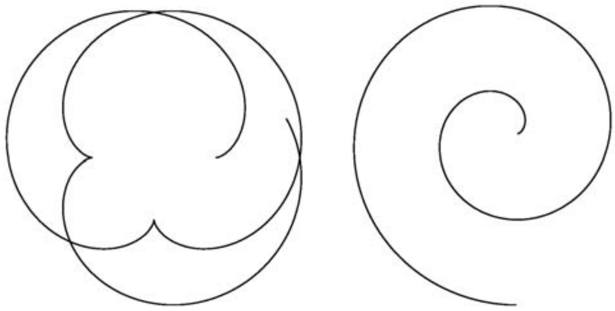

Abbildung 49: Funktionsplots zu Aufgabe 92

Als Umkehrung erhalten wir daher $g_{\mathrm{U}}(x) = \pm\sqrt{x}$. Auch hier haben bei der Umkehrung Definitions- und Wertebereich getauscht, so dass der Definitionsbereich jetzt auf die reellen Zahlen größer Null beschränkt ist: wir können keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ziehen, zumindest nicht, solange der Wertebereich weiterhin auf $\mathbb{R}$ beschränkt bleibt.
Bei der periodischen Funktion $h(x) = \sin(x)$ wird die fehlende Eindeutigkeit bei der graphischen Lösung noch deutlicher. Da der Sinus periodisch ist, löst man das Problem der fehlenden Eindeutigkeit derart, dass die Umkehrfunktion nur auf eine Halbperiode beschränkt wird: $h_{\mathrm{U}} = \arcsin(x)$.
Die letzte Funktion, $i(x) = \mathrm{e}^{-x}$ ist eine streng monoton fallende Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ und und einem auf die positiven reellen Zahlen beschränkten Wertbereich $\mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$. Die Umkehrung ist eindeutig mit $i_{\mathrm{U}} = \ln(x)$ wenn man den Definitionsbereich auf $\mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ beschränkt wie durch die graphische Lösung nahe gelegt. Zurück zu Aufgabe 89

§ **540** Musterlösung zu Aufgabe 90: aus der ersten Parametergleichung machen wir einen Ausdruck, der $\sin\varphi$ in Abhängigkeit von $x$ darstellt. Einsetzen dieses Ausdrucks in die Parametergleichung für $y$ liefert dann die explizite Darstellung der Funktion. Aus $x = \cos^3\varphi$ ergibt sich $\cos^2\varphi = x^{2/3}$ (Achtung, hier tritt die Wurzel mit ihrer Uneindeutigkeit auf!). Unter Verwendung von $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ folgt $1 - \sin^2\varphi = x^{2/3}$ oder aufgelöst nach dem Sinus: $\sin\varphi = (1 - x^{2/3})^{1/2}$. Einsetzen in die zweite Parametergleichung liefert als explizite Darstellung der Funktion $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$. Der Nachteil der expliziten Darstellung ist der gleiche wie beim Kreis: es fällt die eine Hälfte der Kurve (negative Wurzel) weg.

Zurück zu Aufgabe 90

§ **541** Musterlösung zu Aufgabe 91: Skizzen zur Epizykloide (links) und Evolvente (rechts)



Eine sinnvolle Umwandlung in eine explizite Darstellung ist auf Grund der Winkelfunktionen nicht möglich.

Zurück zu Aufgabe 91

§ **542** Musterlösung zu Aufgabe 92: die lineare Funktion $f(x) = x$ ist eine sehr einfache Funktion mit dem Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}$. Daher ist die Funktion nicht

beschränkt. Sie hat weder eine Definitionslücke noch eine Polstelle, die Nullstelle ist bei $x = 0$. Die Funktion ist streng monoton steigend; da sie punktsymmetrisch um den Ursprung ist, handelt es sich bei $f(x)$ um eine ungerade Funktion: $f(x) = -f(-x)$.
Die Funktion $g(x) = \sin(x)$ ist eine periodische Funktion mit einem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und einem Wertebereich $\mathbb{W} = [-1, 1]$. Daher ist die Funktion beschränkt mit der oberen Schranke $+1$ und der unteren Schranke $-1$. Entsprechend gibt es keine Polstelle. Da die Funktion periodisch ist, ist sie nicht eindeutig: jeder Funktionswert wird nach spätestens einer Periode nochmals angenommen, d.h. ein Funktionswert kann von mehr als einem, in diesem Fall von unendlich vielen Argumenten erzeugt werden. Entsprechend ist die Umkehrfunktion arcsin nicht eindeutig. Die Nullstellen sind ebenfalls periodisch, jeweils bei ganzzahligen Vielfachen von $\pi$. Da die Funktion periodisch ist, ist sie nicht monoton. Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, d.h. es handelt sich um eine ungerade Funktion.
Die Funktion $h(x) = x \sin(x)$ ist ein Produkt aus den beiden voran gegangenen Funktionen und daher auch Erbe einiger der Eigenschaften: so gilt für den Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}$, d.h. die Funktion hat weder Definitionslücke noch Polstelle und ist auch nicht beschränkt. Die Zuordnung ist zwar eindeutig, allerdings kann ein Funktionswert auf Grund der Periodizität des Faktors $\sin(x)$ unendlich oft angenommen werden, d.h. es gibt keine eindeutige Umkehrfunktion. Die Funktion ist ferner spiegelsymmetrisch zur Achse $x = 0$, da sie ein Produkt aus zwei punktsymmetrischen Funktionen ist. Die Funktion ist also eine gerade Funktion $h(x) = h(-x)$, vgl. auch Abb. 49.
Die Funktion $i(x) = (x + 4)^2/(x + 2)$ hat eine Polstelle (und damit Definitionslücke) bei $x = -2$, da dort der Nenner verschwindet. Also ist der Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Von links strebt die Funktion bei Annäherung an die Definitionslücke gegen $-\infty$, bei Annäherung von rechts strebt die Funktion gegen $+\infty$. Der Wertebereich der Funktion ist damit $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ und die Funktion ist nicht beschränkt. Die Nullstellen der Funktion ergeben sich dort, wo der Zähler verschwindet, d.h. bei $x = -4$. Die Funktion ist nicht monoton und damit erst recht nicht streng monoton. Sie ist auf Grund der Polstelle nicht stetig in $\mathbb{R}$, sie ist jedoch stetig in den Bereichen links bzw. rechts der Polstelle, d.h. in den Intervallen $[-\infty, -2)$ und $(-2, \infty]$. Die Funktion zeigt keinerlei Symmetrie bezüglich des Ursprungs, ist daher weder eine grade noch eine ungerade Funktion. Zurück zu Aufgabe 92

§ **543** Musterlösung zu Aufgabe 93: beide Funktionen streben für $x \to 0$ gegen Null, so dass l'Hôspital direkt angewandt werden kann. Mit $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$ als der Funktion im Zähler ist $f'(x) = \mathrm{e}^x$. Entsprechend gilt für den Nenner mit $g(x) = x$ für die Ableitung $g'(x) = 1$. Einsetzen in den allgemeinen Ausdruck

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

liefert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{1} = \mathrm{e}^0 = 1 \; .$$

Zurück zu Aufgabe 93

§ **544** Musterlösung zu Aufgabe 94: Für $x \to 1$ geht der Nenner gegen Null. Daher wenden wir die Regel von l'Hospital an:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 5}{2x^3 - 18x^2 + 30x - 14} = \lim_{x\to 1} \frac{6x^2 - 18x + 12}{6x^2 - 36x + 30} \; .$$

auch dieser Nenner geht für $x \to 1$ gegen Null, also nochmals l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 5}{2x^3 - 18x^2 + 30x - 14} = \lim_{x\to 1} \frac{6x^2 - 18x + 12}{6x^2 - 36x + 30} = \lim_{x\to 1} \frac{12x - 18}{12x - 36} = \frac{1}{4} \; .$$

Zurück zu Aufgabe 94

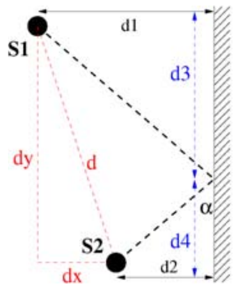



Abbildung 50: Skizze zur Lösung von Aufgabe 96

§ **545** Musterlösung zu Aufgabe 95: wie bereits in der Hilfe in § 536 erläutert, wird der Zusammenhang $I(s)$ durch eine Exponentialfunktion beschrieben:

$$I(s) = I_0 \, \frac{1}{2}^{s/s_0} \qquad \text{mit} \qquad s_0 = 5 \text{ m}$$

Gesucht ist der Wert dieser Funktion an der Stelle $s = 3$ m:

$$I(3 \text{ m}) = I_0 \, \frac{1}{2}^{3/5} \approx 0.66 \, .$$

In einer Wassertiefe von 3 m beträgt die Intensität des Lichtes noch 66% der Intentsität $I_0$ an der Oberfläche, d.h. die Kamera ist zwar bereits gefordert aber noch nicht überfordert und sollte vernünftige Aufnahmen liefern.

Zurück zu Aufgabe 95

§ **546** Musterlösung zu Aufgabe 96: die Aufgabe benötigt nur Elementargeometrie; von den verschiedenen Lösungsansätzen wird hier nur einer betrachtet. Die relevanten geometrischen Größen mit ihren Bezeichnungen sind in Abb. 50 markiert, die Zielgröße ist der Abstand $d$ zwischen den Spielern S1 und S2. Wollen wir diesen Abstand gemäß Pythagoras berechnen (gestricheltes rotes Dreieck), so ist die Strecke $d_x = d_1 - d_2$ bekannt und $d_y = d_3 + d_4$ ist mit Hilfe der gegebenen Strecken $d_1$ und $d_2$ sowie des Winkels $\alpha$ zu bestimmen:

$$\tan\alpha = \frac{d_2}{d_4} = \frac{d_1}{d_3} \qquad \Rightarrow \qquad d_4 = d_2 \, \tan\alpha \quad \text{und} \quad d_3 = d_1 \, \tan\alpha \, .$$

Damit ist

$$d(d_1, d_2, \alpha) = \sqrt{(d_3 + d_4)^2 + (d_1 - d_2)^2} = \sqrt{(d_1 + d_2)^2 \, \tan^2\alpha + (d_1 - d_2)^2}$$

eine Funktion der drei variablen $d_1$, $d_2$ und $\alpha$. Für die in der Aufgabenstellung gegebenen Werte ergibt sich $d = \sqrt{9^2 \, \tan^2 42 + 4^2}$ m $= \sqrt{9.43}$ m. Zurück zu Aufgabe 96

§ **547** Musterlösung zu Aufgabe 97: $s(r)$ ist eine mehrfach geschachtelte Funktion einer Funktion einer Funktion von $r$. Ein auflösen nach $r(s)$ ist nicht möglich.

Zurück zu Aufgabe 97

§ **548** Musterlösung zu Aufgabe 98: (a) inverse Fakultäten: streng monoton fallend, beschränkt mit oberer Schranke $A_\mathrm{o} = 1$ und unterer Schranke $A_\mathrm{u} = 0$, konvergent mit Grenzwert 0. Für die Konvergenz können wir auf verschiedene Weisen argumentieren: (i) da jede streng monoton steigende/fallende und nach oben/unten beschränkte Folge konvergiert, konvergiert die Folge der inversen Fakultäten. (ii) da eine beschränkte Folge mit genau einem Häufungspunkt gegen diesen konvergiert und die Folge der inversen Fakultäten einen Häufungspunkt bei Null hat, konvergiert diese Folge gegen Null. (iii) Ganz formal können wir das Cauchy-Kriterium anwenden oder uns mit Hilfe des bereits geratenen Grenzwerts auf die Definition desselben mit Hilfe einer $\varepsilon$-Umgebung zurück ziehen. In letzterem Fall müssen wir zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ gilt derart, dass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt $|a_n - A_\mathrm{g}| < \varepsilon$ mit $A_\mathrm{g}$ als dem Grenzwert der Folge. Mit $A_\mathrm{g} = 0$ ist $|1/n!| < \varepsilon$, was sicher für alle $n > n_\varepsilon$ gilt mit $n_\varepsilon! = 1/\varepsilon$. Beim Cauchy-Kriterium muss der Grenzwert nicht bekannt sein, daher

ist es universeller einsetzbar. Stattdessen betrachten wir die Differenz zweier Folgeglieder $|a_n - a_m| < \varepsilon$ mit $n, m > n_\varepsilon$. Für diese spezielle Folge ist der Ausdruck unhandlich, da die Differenz $|1/n! - 1/m!|$ zu bilden ist.
(b) echte Brüche: streng monoton steigend, beschränkt mit unterer Schranke $A_\mathrm{u} = 1/2$ und oberer Schranke $A_\mathrm{o} = 1$, konvergent mit Grenzwert 1. Die Begründungen (i) und (ii) für Konvergenz können direkt aus (a) übernommen werden, für die formale Argumentation (iii) müssen wir den Ausdruck $|n/(n+1) - 1| < \varepsilon$ betrachten. Dieser lässt sich umschreiben als $|(n-(n+1))/(n+1)| = |1/(n+1)| < \varepsilon$, was ebenso wie $1/n$ eine Nullfolge ist, d.h. zu jedem $\varepsilon$ findet sich ein $n_\varepsilon > 1/\varepsilon - 1$ derart, dass für all $n > n_\varepsilon$ gilt $|n/(n+1) - 1| < \varepsilon$.
(c) inverse Quadrate: streng monoton fallend, beschränkt mit oberer Schranke $A_\mathrm{o} = 1$ und unterer Schranke $A_\mathrm{u} = 0$, konvergent mit Grenzwert 0. Auch hier können Argumentationen (i) und (ii) direkt übernommen werden, für (iii) muss die Fakultät jeweils durch ein Quadrat ersetzt werden.
(d) alternierend harmonische Folge: nicht monoton, beschränkt mit unterer Schranke $A_\mathrm{u} = -1/2$ und oberer Schranke $A_\mathrm{o} = 1$, konvergent mit Grenzwert 0. Für die Konvergenz ist Argumentation (i) nicht anwendbar, da eine alternierende Folge nicht monoton ist. Allerdings hat die alternierend harmonische Folge genau einen Häufungspunkt und ist beschränkt, so dass Argumentation (ii) anwendbar ist. Für die formale Argumentation (iii) müssen wir den Ausdruck wie bei der harmonischen Folge bilden – da dort nur Beträge betrachtet werden, verschwindet das Minus, d.h. die Betrachtung für die harmonische Folge lässt sich direkt übernehmen.
(e) Exponentialfolge: streng monoton steigend, beschränkt mit unterer Schranke $A_\mathrm{u} = 2$ und oberer Schranke $A_\mathrm{o} = \mathrm{e} = 2.718281828459....$ (Euler Zahl), konvergiert gegen e. Für die Konvergenz sind (i) und (ii) wieder direkt anwendbar, für das formale Kriterium müssen wir (iii) anwenden – wobei hier die Argumentation nicht ganz einfach ist, da zwar der Ausdruck $1/n$ in der Klammer gegen Null konvergiert, gleichzeitig der Exponent $n$ aber gegen Unendlich geht. Die Konvergenz kann man zeigen, in dem man nicht den Grenzwert e verwendet sondern einfach einen etwas höheren Wert (z.B. die 3) und dann (mit etwas mühseligem Umformen) zeigt, dass

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3 \qquad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Dabei wird ausgenutzt, dass eine monoton wachsende beschränkte Folge konvergent ist – und die obere Schranke kann ein beliebiger Wert sein, der größer ist als die Glieder der Folge.

Zurück zu Aufgabe 98

§ **549** Musterlösung zu Aufgabe 99: unter Verwendung des Hinweises in § 538 ist

$$s_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = \frac{100}{2}(1 + 100) = 50 \cdot 101 = 5050 .$$

Zurück zu Aufgabe 99

## Lernfeld 4: Differentiation

### (Muster)Lösungen zu den Aufgaben aus dem Rechentraining

§ **550** Musterlösung zu Aufgabe 109: für den Differenzenquotienten betrachten wir die Funktion an den Stellen $x$ und $\Delta x$ und bilden damit den Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 + 4(x+\Delta x) + 5 - (x^2 + 4x + 5)}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 4x + 4\Delta x + 5 - x^2 - 4x - 5}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 4\Delta x}{\Delta x} \\ &= 2x + 4 + \Delta x . \end{aligned}$$

Die Ableitung bzw. der Differentialquotient ergibt sich aus dem Differenzenquotienten im Grenzwert $\Delta x \to 0$ zu

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + 4 + \Delta x) = 2x + 4 \, .$$

Zurück zu Aufgabe 109

§ **551** Musterlösung zu Aufgabe 110: für den Differenzenquotienten betrachten wir die Funktion an den Stellen $x$ und $\Delta x$ und bilden damit den Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{(x+\Delta x)^2+2}{x+\Delta x} - \frac{x^2+2}{x}}{\Delta x} = \frac{\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+2}{x+\Delta x} - \frac{x^2+2}{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+2)x-(x^2+2)(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{x^3+2x^2\Delta x+x(\Delta x)^2+2x-x^3-x^2\Delta x-2x-2\Delta x}{x^2+x\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2\Delta x + x(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{x^2 + x\Delta x} \, \frac{1}{\Delta x} = \frac{x^2 - 2 + x\Delta x}{x^2 + x\Delta x} = 1 - \frac{2}{x^2 + x\Delta x} \, . \end{aligned}$$

Auch hier ergibt sich der Differentialquotient als der Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 - \frac{2}{x^2 + x\Delta x}\right) = 1 - \frac{2}{x^2} \, .$$

Alternativ hätten Sie die Funktion auch umschreiben können in die Form $f(x) = (x^2+2)/x = x + 2/x$. Dann ergibt sich der Differenzenquotient zu

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x + \frac{2}{x+\Delta x} - (x + \frac{2}{x})}{\Delta x} = \frac{\Delta x + \frac{2x-2x+2\Delta x}{x^2+x\Delta x}}{\Delta x} \\ &= 1 - \frac{2}{x^2 + x\Delta x} \end{aligned}$$

und damit weiter wie in der ersten Variante. Zurück zu Aufgabe 110

§ **552** Musterlösung zu Aufgabe 111: die Funktion $x^2 + 4x + 5$ besteht nur aus Potenzen, d.h. es wird nur die Ableitungsregel für Potenzen benötigt. Als erste Ableitung ergibt sich

$$f'(x) = 2x + 4 \, ,$$

d.h. eine monoton ansteigende lineare Funktion. Die Ableitung stimmt mit der in Aufg. 109 aus dem Differenzenquotienten bestimmten überein. Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = 2 \, ,$$

d.h. die Steigung der ersten Ableitung ist, wie für eine lineare Funktion zu erwarten, konstant. Die dritte Ableitung verschwindet dementsprechend: $f'''(x) = 0$. Zurück zu Aufgabe 111

§ **553** Musterlösung zu Aufgabe 112: ebenfalls alles Potenzen, die Funktion und ihre Ableitungen sind

$$\begin{aligned} f(x) &= 12x^7 + 4x^5 + 5x^3 + x^2 - 6 \, , \\ f'(x) &= 84x^6 + 20x^4 + 15x^2 + 2x \, , \\ f''(x) &= 504x^5 + 80x^3 + 30x + 2 \, , \\ f'''(x) &= 2520x^4 + 240x^2 + 30 \, , \\ f^{\mathrm{iv}}(x) &= 10080x^3 + 480x \, , \\ f^{\mathrm{v}}(x) &= 30240x^2 + 480 \, . \end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 112

§ **554** Musterlösung zu Aufgabe 113: auch für die Funktion $f(x) = 5x^{-2}$ ist die Ableitungsregel für Potenzen anzuwenden. Da der Exponent in diesem Fall negativ ist, ergibt sich jeweils ein negativer Vorfaktor und beim Erniedrigen des Exponenten um 1 sind die Rechenregeln für negative Zahlen zu beachten. Als Ergebnis erhalten wir für die Funktion und ihre Ableitungen

$$f(x) = 5x^{-2} \, ,$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2 \cdot 5x^{-2-1} = -10x^{-3}\,,\\
f''(x) &= -3 \cdot (-10)x^{-3-1} = 30x^{-4}\,,\\
f'''(x) &= -120x^{-5}\,,\\
f^{\mathrm{iv}}(x) &= 600x^{-6}\,.
\end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 113

§ **555** Musterlösung zu Aufgabe 114: alle hier gegebenen Funktionen sind als elementare Funktionen aufgeführt, bei der Ableitung der Exponentialfunktion ist zu beachten, das der negative Vorfaktor des Exponenten auch bei der Ableitung als Vorfaktor auftritt, bei den Winkelfunktionen ist zu beachten, dass die Ableitung des Kosinus den negativen Sinus ergibt, und beim Logarithmus führt die erste Ableitung auf eine Potenz, allerdings wie in Aufgabe 113 mit negativem Exponenten.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{-5x} + \sin(x) - \cos(x) + \ln(x)\,,\\
f'(x) &= -5\mathrm{e}^{-5x} + \cos(x) + \sin(x) + x^{-1}\,,\\
f''(x) &= 25\mathrm{e}^{-5x} - \sin(x) + \cos(x) - x^{-2}\,,\\
f'''(x) &= -125\mathrm{e}^{-5x} - \cos(x) - \sin(x) + 2x^{-3}\,,\\
f^{\mathrm{iv}}(x) &= 625\mathrm{e}^{x} + \sin(x) - \cos(x) - 6x^{-5}\,.
\end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 114

§ **556** Musterlösung zu Aufgabe 115: auch die Quadratwurzel ist eine Potenz, d.h. es wird die Ableitungsregel für Potenzen benötigt. Für die erste Ableitung ergibt sich damit

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Nochmaliges Ableiten liefert für die zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sqrt{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}x^{-1/2} = -\frac{1}{4}x^{-3/2} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 115

§ **557** Musterlösung zu Aufgabe 116: die Faktoren in den Produkten dieser und der folgenden beiden Aufgaben wurden alle bereits abgeleitet, d.h. wir müssen diese einzelnen Ableitungen nur noch zusammen setzen. Die Funktion $f(x) = x^2 \cos(x)$ zerlegen wir in die Faktoren $g(x) = x^2$ und $h(x) = \cos(x)$ mit den Ableitungen $g'(x) = 2x$ und $h'(x) = -\sin(x)$ und erhalten nach Produktregel

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\,\cos(x)) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 2x\,\cos(x) - x^2\,\sin(x)\,.$$

Zurück zu Aufgabe 116

§ **558** Musterlösung zu Aufgabe 117: die Faktoren $g(x) = \tan(x)$ und $h(x) = \mathrm{e}^x$ mit den Ableitungen $g'(x) = \cos^{-2} x$ und $h'(x) = \mathrm{e}^x$ liefern als Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan(x)\,\mathrm{e}^x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\cos^2(x)} + \tan(x)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{\cos^2(x)} + \tan(x)\right)\,.$$

Zurück zu Aufgabe 117

§ **559** Musterlösung zu Aufgabe 118: die Faktoren $g(x) = \sqrt{x}$ und $h(x) = \sin(x)$ mit den Ableitungen $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $h'(x) = \cos(x)$ liefern als Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x}\,\sin(x)) = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,\cos(x)\,.$$

Zurück zu Aufgabe 118

§ **560** Musterlösung zu Aufgabe 119: entweder Quotientenregel direkt anwenden, d.h.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x+\sin(x)}{x-\cos(x)} &= \frac{(x-\cos(x))(1+\cos(x))-(1+\sin(x))(x+\sin(x))}{(x-\cos(x))^2}\\ &= \frac{x-\cos(x)+x\,\cos(x)-\cos^2(x)-x-x\,\sin(x)-\sin(x)-\sin^2(x)}{(x-\cos(x))^2}\\ &= \frac{(x-1)\,\cos(x)-(x+1)\,\sin(x)-(\cos^2(x)+\sin^2(x))}{(x-\cos(x))^2}\\ &= \frac{(x-1)\,\cos(x)-(x+1)\,\sin(x)-1}{(x-\cos(x))^2}\,,\end{aligned}$$

oder umschreiben als Produkt $f(x) = (x+\sin(x))\,(x-\cos(x))^{-1}$ und dann die Produktregel anwenden mit $g(x) = (x+\sin(x))$, $g'(x) = 1+\cos(x)$, $h(x) = (x-\cos(x))^{-1}$ und $h'(x) = -(x-\cos(x))^2(1+\sin(x))$. Ergibt den gleichen Ausdruck.

Zurück zu Aufgabe 119

§ **561** Lösung zu Aufgabe 120:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{u}{\sin u+\cos u} = \frac{1}{\sin u+\cos u} - \frac{u}{\cos u-\sin u}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 120

§ **562** Lösung zu Aufgabe 121:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\sin(\omega t+\varphi)}\right) = \omega\,\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{e}^{\sin(\omega t+\varphi)}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 121

§ **563** Lösung zu Aufgabe 122:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\sqrt[4]{\sin^3(x)\,\cos^3(x)}\right) = \frac{3\sin^2(x)\,\cos^4(x)}{\sin^3(x)\,\cos^3(x)} - 3\cos^2(x)\,\sin^4(x)\,.$$

Zurück zu Aufgabe 122

§ **564** Lösung zu Aufgabe 123:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 123

## Lernfeld 5: Integration

### Hinweis zu den Verständnisfragen

§ **565 Hinweis zu Frage 9:** wenn wir die Integrationskonstante mitschleppen, wird das bestimmte Integral

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)+c]_a^b = F(b)+c-(F(a)+c) = F(b)-F(a)\,,$$

d.h. die Integrationskonstante fällt bei der Differenzbildung zwischen eingesetzter oberer und unterer Grenze wieder heraus. Ist das sinnvoll, wo doch $F(x)$ je nach Wert der Integrationskonstante $C$ einen größeren oder kleineren Abstand von der Abszisse hat? Ja, die durch das bestimmte Integral gegebene Fläche ist die zwischen dem Funktionsgraphen $f(x)$ und der Abszisse, der Funktionsgraph von $F(x)$, bei dem sich die Integrationskonstante als Verschiebung bemerkbar machen würde, geht in die anschauliche Interpretation des bestimmten Integrals nicht ein.

Zurück zu Frage 9

§ **566 Hinweis zu Frage 10:** eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel ist eine Stelle, an der der Funktionsgraph die $x$-Achse berührt ohne sie zu schneiden. Die in das bestimmte Integral eingehenden infinitesimalen Flächenelemente $f(x)\,\mathrm{d}x$ haben also links und rechts dieser Nullstelle gleiches Vorzeichen, da $f(x)$ links und rechts der Nullstelle gleiches Vorzeichen hat. Damit können die Flächenelemente addiert werden, ohne dass wir ihren betrag nehmen müssen. Während bei der Integration von $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ die Nullstelle bei $\pi$ durch Zerlegung des Integrationsintervalls berücksichtigt werden muss, kann die Funktion $f(x) = \sin^2(x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ ohne Zerlegung in Teilintegrale integriert werden: zwar gibt es auch hier eine Nullstelle bei 180°, jedoch ist die Funktion überall positiv, so dass auch die infinitesimalen Flächenelemente alle gleiches Vorzeichen haben.

Zurück zu Frage 10

§ **567 Hinweis zu Frage 11:** die Volumenscheibchen sind durch $f^2(x)\,\mathrm{d}x$ bestimmt, d.h. sie sind unabhängig vom Vorzeichen von $f(x)$ stets positiv. Daher kann, wie in Frage 10 diskutiert, ohne Berücksichtigung der Nullstelle integriert werden. Falls Sie dieser Argumentation nicht ganz trauen, verwenden Sie Aufgabe 142, um sich den Zusammenhang an einem Beispiel klar zu machen.

Zurück zu Frage 11

### Hilfe zu den Aufgaben aus dem Rechentraining

§ **568** Hinweis zu Aufgabe 140: nicht von den Ordinaten verwirren lassen, diese geben nur die Integrationsgrenzen.

Zurück zu Aufgabe 140

§ **569** Hinweis zu Aufgabe 144: Substitution $u = kx + d$ mit $u' = k$.

Zurück zu Aufgabe 144

§ **570** Hinweis zu Aufgabe 145: Substitution $u = 2x + 9$ mit $u' = 2$.

Zurück zu Aufgabe 145

§ **571** Hinweis zu Aufgabe 146: Substitution $u = 3x^3 + 2a$ mit $u' = 9x^2$.

Zurück zu Aufgabe 146

§ **572** Hinweis zu Aufgabe 147: Substitution $u = x^2$ mit $u' = 2x$.

Zurück zu Aufgabe 147

§ **573** Hinweis zu Aufgabe 148: Substitution $u = x^3 - 1$ mit $u' = 3x^2$.

Zurück zu Aufgabe 148

§ **574** Hinweis zu Aufgabe 149: Wählen Sie $g(x) = ax$, da das im Restintegral auftretende $g'(x)$ dann nur noch eine Konstante ist, d.h. das sich ergebende Restintegral ist einfach.

Zurück zu Aufgabe 149

§ **575** Hinweis zu Aufgabe 150: im Gegensatz zu Aufgabe 149 ist die Wahl $g(x) = x$ nicht sinnvoll: zwar würde das Restintegral einfach – allerdings müssten wir dann den Logarithmus integrieren.

Zurück zu Aufgabe 150

§ **576** Hinweis zu Aufgabe 151: $g(x) = x^2$, allerdings ergibt sich dann wegen $g'(x) = 2x$ ein nicht elementares Restintegral, das durch nochmalige partielle Integration gelöst werden kann.

Zurück zu Aufgabe 151

§ **577** Hinweis zu Aufgabe 152: hier ist dreifache partielle Integration erforderlich, um aus $g(x) = x^3$ auf ein einfaches Restintegral zu kommen.

Zurück zu Aufgabe 152

**(Muster)Lösungen zu den Aufgaben aus dem Rechentraining**

§ **578** Lösung zu Aufgabe 138:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{x^3} + c\,, \\
I_2 &= \int 5x^{-7/2}\,\mathrm{d}x = -2x^{-5/2} + c\,, \\
I_3 &= \int \left(3x^4 - 2x^2 + \frac{4}{7}\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{7}x + c\,, \\
I_4 &= \int \left(ax^3 + \frac{5}{x^2} - 2a\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}ax^4 - \frac{5}{x} - 2ax + c\,, \\
I_5 &= \int (2i^n + ni)\,\mathrm{d}i = \frac{2}{n+1}i^{n+1} + \frac{1}{2}ni^2 + c\,, \\
I_6 &= \int \left(\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{-3}{2x^2} + \frac{2}{x} + \ln|x| + c\,, \\
I_7 &= \int \left(\sin r + \frac{\cos r}{4}\right)\mathrm{d}r = -\cos r + \frac{1}{4}\sin r + c\,, \\
I_8 &= \int (\mathrm{e}^\nu + \mathrm{e}^{2\omega})\,\mathrm{d}\nu = \mathrm{e}^\nu + \nu\mathrm{e}^{2\omega} + c\,, \\
I_9 &= \int\limits_{-1}^{2} (-x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = 2\frac{2}{3}\,, \\
I_{10} &= \int\limits_{-3}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1.099\,, \\
I_{11} &= \int\limits_{-\infty}^{1} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}\,, \\
I_{12} &= \int\limits_{-1}^{1} (x^3 + 1)\,\mathrm{d}x\,, \\
I_{13} &= \int\limits_{0}^{3} (-x^3 + 4x^2 - 3x)\,\mathrm{d}x = 2\,, \\
I_{14} &= \int\limits_{0.5}^{3} \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2.25\,, \\
I_{15} &= \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 1\,, \\
I_{16} &= \int\limits_{0}^{1} (\mathrm{e}^x - 1)\,\mathrm{d}x = \,, \\
I_{17} &= \int\limits_{1}^{8} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}} = \,.
\end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 138

§ **579** Lösung zu Aufgabe 139: $f(r) = 1/r^2 = r^{-2}$ ist eine Potenz, die Integration führt auf die Stammfunktion $F(r) = -1/r + c$ – wobei die Integrationskonstante $c$ beim bestimmten Integral weggelassen werden kann. Die Ausgangsfunktion $f(r)$ ist überall größer Null, d.h.

sie hat im Integrationsintervall keine Nullstellen. Mit den Integrationsgrenzen ergibt sich

$$\int_1^\infty \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \left[\frac{-1}{r}\right]_1^\infty = 0 - \frac{-1}{1} = 1\,.$$

Zurück zu Aufgabe 139

§ **580** Musterlösung zu Aufgabe 140: die zu integrierende Funktion $f(x) = x^2 - x$ besteht aus einer Summe von Potenzen, die Integration führt auf die Stammfunktion $F(x) = x^3/3 - x^2/2(+C)$. Die Nullstellen der Funktion ergeben sich für $x^2 = x$, d.h. bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Das sind die Ränder des Integrationsintervalls, im Integrationsintervall selbst liegen keine Nullstellen, so dass die Integration nicht in Teilintervalle aufgespalten werden muss. Mit den Integrationsgrenzen ergibt sich

$$\int_0^1 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x = \left[x^3/3 - x^2/2\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 140

§ **581** Lösung zu Aufgabe 141: die spezielle Lösung ist

$$V = \int_0^{10} \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^{10} \frac{x^2}{4}\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^{10} = \pi\frac{1000}{12} = 26.5\,.$$

Für allgemeine Integrationsgrenzen $a$ und $b$ ergibt sich bei gleicher Funktion

$$V = \int_a^b \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\frac{b^3 - a^3}{12}\,.$$

Nimmt man statt $f(x) = x/2$ eine allgemeine Potenz $f(x) = x^n$, so gilt mit allgemeinen Integrationsgrenzen

$$V = \int_a^b \pi (x^n)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_a^b x^{2n}\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_a^b = \pi\frac{b^{2n+1} - a^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

Zurück zu Aufgabe 141

§ **582** Lösung zu Aufgabe 142: für das Volumen ergibt sich

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{2} \pi (x^2+1)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-2}^{2} (x^4 + 2x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right]_{-2}^{2} \\ &= \pi\left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} + 2 - \left(\frac{(-2)^5}{5} + \frac{(-2)^3}{3} - 2\right)\right) = 2\pi\left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} + 2\right) \\ &= 2\pi\frac{96+40+30}{15} = \pi\frac{332}{15}\,. \end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 142

§ **583** Lösung zu Aufgabe 143:

$$\int_0^{10} m_0 \left(1 + \frac{1}{2}\sin(360^\circ \cdot t)\right)\,\mathrm{d}t = m_0 \left[t - \frac{1}{2}\,\cos(2\pi\,t)\right]_0^{10} = 10m_0$$

Zurück zu Aufgabe 143

§ **584** Musterlösung zu Aufgabe 144: wie in der Hilfe erwähnt Substitution von $u = kx + d$. Dann ist $u' = k$ und das Integral wird

$$\int \sin(kx+d)\,\mathrm{d}x = \int \sin u \,\frac{\mathrm{d}u}{k} = -\frac{1}{k}\,\cos u + c = -\frac{1}{k}\,\cos(kx+d) + c\,.$$

Zurück zu Aufgabe 144

§ **585** Musterlösung zu Aufgabe 145: wie in der Hilfe erwähnt Substitution $u = 2x+9$. Dann ist $u' = 2$ und das Integral wird

$$\int \frac{1}{2x+9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\,\ln|u| + c = \frac{1}{2}\,\ln|(2x+9)| + c\,.$$

Zurück zu Aufgabe 145

§ **586** Musterlösung zu Aufgabe 146: wie in der Hilfe erwähnt Substitution $u = 3x^3 + 2a$. Dann ist $u' = 9x^2$ und das Integral wird

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(3x^3+2a)\,\mathrm{d}x &= \int x^2\,\sin u\,\frac{\mathrm{d}u}{9x^2} = \frac{1}{9}\int \sin u\,\mathrm{d}u\\ &= -\frac{1}{9}\,\cos u + c = -\frac{1}{9}\cos(3x^3+2a) + c\,.\end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 146

§ **587** Musterlösung zu Aufgabe 147: wie in der Hilfe erwähnt Substitution $u = x^2$. Dann ist $u' = 2x$ und das Integral wird

$$\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x e^u\,\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^u + C = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + C\,.$$

Zurück zu Aufgabe 147

§ **588** Musterlösung zu Aufgabe 148: wie in der Hilfe erwähnt Substitution $u = x^3 - 1$. Dann ist $u' = 3x^2$ und das Integral wird

$$\int x^2\sqrt{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \int x^2\sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{3x^2} = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\,\frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{2}{9}\sqrt{(x^2-1)^3} + c\,.$$

Zurück zu Aufgabe 148

§ **589** Musterlösung zu Aufgabe 149: wie in der Hilfe bereits angedeutet ist die Wahl

$$g(x) = ax \qquad \text{und} \qquad h'(x) = \mathrm{e}^{bx}$$

mit

$$g'(x) = a \qquad \text{und} \qquad h(x) = \frac{1}{b}\mathrm{e}^{bx}$$

geeignet, ein einfaches Restintegral zu erzeugen. Einsetzen in die Gleichung für die partielle Integration liefert

$$\int ax\,\mathrm{e}^{bx}\,\mathrm{d}x = \frac{ax}{b}\,\mathrm{e}^{bx} - \int \frac{a}{b}\,\mathrm{e}^{bx} = \frac{ax}{b}\,\mathrm{e}^{bx} - \frac{a}{b^2}\,\mathrm{e}^{bx} + c\,.$$

Zurück zu Aufgabe 149

§ **590** Musterlösung zu Aufgabe 150: wie in der Hilfe bereits angedeutet lässt sich ein einfaches Restintegral erzeugen mit

$$g(x) = \ln x \qquad \text{und} \qquad h'(x) = x$$

mit

$$g'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad h(x) = \frac{x^2}{2}\,.$$

Einsetzen in die Gleichung für die partielle Integration liefert

$$\int x \, \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \, \ln x - \int \frac{1}{x} \, \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \, \ln x - \frac{x^2}{4} + c \,.$$

Zurück zu Aufgabe 150

§ **591** Musterlösung zu Aufgabe 151: wie in der Hilfe erwähnt ist das Ziel, den $x^2$-Term durch zweifaches Ableiten auf eine Konstante zu reduzieren und damit ein einfaches Restintegral zu erhalten. Daher wählen wir die Faktoren unseres Produktes als

$$g(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad h'(x) = \cos(x) \,.$$

Damit ist

$$g'(x) = 2x \qquad \text{und} \qquad h(x) = \sin(x) \,.$$

Einsetzen in die Gleichung für die partielle Integration liefert

$$\int x^2 \, \cos(x) \, \mathrm{d}x = x^2 \, \sin(x) - \int 2x \, \sin(x) \, \mathrm{d}x \,.$$

Für das Restintegral setzen wir

$$g(x) = 2x \qquad \text{und} h'(x) = \sin(x)$$

und damit

$$g'(x) = 2 \qquad \text{und} \qquad h(x) = -\cos(x) \,.$$

Für das Restintegral der ersten partiellen Integration ergibt sich damit

$$\int 2x \, \sin(x) \, \mathrm{d}x = -2x \, \cos(x) - \int 2 \, \cos(x) \, \mathrm{d}x = -2x \, \cos(x) + 2 \, \sin(x) + c \,.$$

Einsetzen in die erste partielle Integration liefert

$$\int x^2 \, \cos(x) \, \mathrm{d}x = (x^2 - 2) \, \sin(x) + 2x \, \cos(x) + c \,.$$

Zurück zu Aufgabe 151

§ **592** Musterlösung zu Aufgabe 152: wie in der Hilfe erwähnt ist das Ziel, den $x^3$-Term durch dreimaliges Ableiten auf eine Konstante zu reduzieren und damit ein einfaches Restintegral zu erhalten. Also ist dreifache Produktintegration erforderlich. Für die erste Produktintegration wählen wir

$$g(x) = x^3 \qquad \text{und} \qquad h'(x) = \mathrm{e}^x$$

mit

$$g'(x) = 3x^2 \qquad \text{und} \qquad h(x) = \mathrm{e}^x \,.$$

Einsetzen ins Schema liefert

$$\int x^3 \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = x^3 \, \mathrm{e}^x - 3 \int x^2 \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \,.$$

Im Restintegral setzen wir

$$g(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad h'(x) = \mathrm{e}^x$$

mit

$$g'(x) = 2x \qquad \text{und} \qquad h(x) = \mathrm{e}^x \,.$$

Einsetzen in das Schema liefert für das Restintegral der ersten partiellen Integration

$$\int x^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = x^2 \, \mathrm{e}^x - 2 \int x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \,.$$

Eingesetzt in die erste partielle Integration ergibt sich

$$\int x^3\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^3\,\mathrm{e}^x - 3\left(x^2\,\mathrm{e}^x - 2\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) = x^3\,\mathrm{e}^x - 3x^2\,\mathrm{e}^x + 6\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,.$$

Dem verbliebenen Restintegral rücken wir mit

$$g(x) = x \qquad \text{und} \qquad h'(x) = \mathrm{e}^x$$

und damit

$$g'(x) = 1 \qquad \text{und} \qquad h(x) = \mathrm{e}^x$$

zu Leibe. Einsetzen in das Schema liefert als Lösung für das Restintegral der zweiten partiellen Integration

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c\,.$$

Einsetzen liefert für das Ausgangsintegral

$$\begin{aligned}\int x^3\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= x^3\,\mathrm{e}^x - 3x^2\,\mathrm{e}^x + 6\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^3\,\mathrm{e}^x - 3x^2\,\mathrm{e}^x + 6(x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x) + c \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 152

## Lernfeld 6: Komplexe Zahlen, Euler und Taylor

### Hinweis zur Verständnisfrage

§ **593** Hinweis zu Frage 12: die Erweiterung von natürlichen zu ganzen zu rationalen und dann zu reellen Zahlen war stets auf einen Zahlenstrahl beschränkt – es wurden nur Lücken zwischen den Zahlen aufgefüllt. Die komplexen Zahlen bilden eine andere Art von Erweiterung, da zu ihrer Darstellung nicht ein eindimensionaler Zahlenstrahl sondern eine zweidimensionale Zahlenebene benötigt wird. Dennoch sind die reellen Zahlen eine Teilmenge der komplexen Zahlen, eben die komplexen Zahlen, deren Imaginärteil Null ist.

Zurück zu Frage 12

### Hilfe zu den Aufgaben aus dem Rechentraining

§ **594** die pq-Formel ist eine sichere Methode zur Lösung (allerdings lassen sich zumindest die ersten beiden Gleichungen auch ohne dieses Hilfsmittel lösen). Die Struktur der pq-Formel gibt Ihnen auch Antwort auf die Frage!

Zurück zu Aufgabe 161

### (Muster)Lösungen zu den Aufgaben aus dem Rechentraining

§ **595** Musterlösung zu Aufgabe 161: die Lösungen für die ersten beiden quadratischen Gleichungen sind offensichtlich:

$$\begin{array}{lllll}(a) & x^2 - 9 = 0 & \rightarrow & x^2 = 9 & \rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ (b) & x^2 + 9 = 0 & \rightarrow & x^2 = -9 & \rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3\mathrm{i}\,.\end{array}$$

In (a) sind beide Lösungen reell, in (b) sind beide Lösungen imaginär (oder genauer komplexe Lösungen mit verschwindendem Realteil). Die beiden folgenden Gleichungen können wir mit quadratischer Ergänzung oder pq-Formel lösen. Hier ist die quadratische Ergänzung verwendet:

$$x^2 + 4x \left\{\begin{array}{c} +13 \\ -5 \end{array}\right\} = 0 \quad\Rightarrow\quad x^2 + 4x = \left\{\begin{array}{c} -13 \\ +5 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad x^2 + 4x + 4 = \left\{\begin{array}{c} -9 \\ 9 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow$$

$$(x+2)^2 = \left\{\begin{array}{c} -9 \\ 9 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \left\{\begin{array}{c} 3\mathrm{i} \\ 3 \end{array}\right\}\,.$$

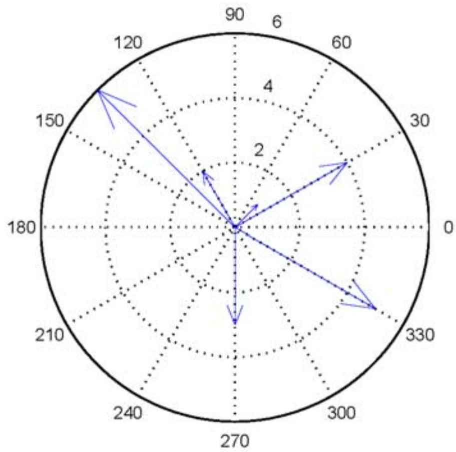



Abbildung 51: Graphische Lösung zu Aufgabe 163

Die Lösung von Aufgabe (c) ist komplex, die von Aufgabe (d) reell. Mit der pq-Formel hätten wir erhalten

$$(c) \quad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3\mathrm{i}$$

und

$$(d) \quad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2 + 5} = -2 \pm \sqrt{9} = -2 \pm 3\,.$$

Bei Aufgabe (e) brauchen wir uns keine Sorgen bezüglich imaginärer oder komplexer Lösungen machen: wir klammern ein $x$ aus, $x^2 - 6x = x(x-6) = 0$, und können die beiden reellen Lösungen $x = 0$ und $x = 6$ unmittelbar ablesen. Für Aufgabe (f) ergibt sich eine komplexe Lösung

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 34} = 3 \pm \sqrt{-25} = 3 \pm 5\mathrm{i}\,.$$

In keiner der Aufgaben gab es eine Mischform aus einer komplexen und einer reellen Lösung; entweder sind beide Lösungen reell oder beide sind komplex. Das gilt nicht nur für diese Beispiele sondern allgemein: der imaginäre Teil der Lösung tritt auf, wenn der Radikant in der pq-Formel negativ ist. Die Uneindeutigkeit der Wurzel ist verantwortlich für die Existenz von zwei Lösungen, daher $\pm\sqrt{\phantom{x}}$ in der pq-Formel. Für beide Vorzeichen wird aber der gleiche Radikant verwendet, d.h. beide Lösungen sind bei negativem Radikanten komplex, bei positivem dagegen reell.

Zurück zu Aufgabe 161

§ **596** Musterlösung zu Aufgabe 162: die trigonometrische Darstellung verwendet die Betrag $z = \sqrt{a^2 + b^2}$ und Argument $\varphi = \arctan(b/a)$:

$$\begin{aligned}
|z_i| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4.47 \quad &\text{und} \quad \varphi = \arctan(2/4) \approx 26.6^\circ\,,\\
|z_2| = \sqrt{(-5)^2} = 5 \quad &\text{und} \quad \varphi = \arctan(0/-5) = 180^\circ\,,\\
|z_3| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \approx 3.61 \quad &\text{und} \quad \varphi = \arctan(-2/3) \approx -33.7\,,\\
|z_4| = \sqrt{(-2)^2} = 2 \quad &\text{und} \quad \varphi = \arctan(-2/0) = -270^\circ\,,\\
|z_5| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} \approx 4.47 \quad &\text{und} \quad \varphi = \arctan(4/-2) \approx 116.6\,,\\
|z_6| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34} \approx 5.83 \quad &\text{und} \quad \varphi = \arctan(-5/-3) \approx -121^\circ\,.
\end{aligned}$$

Für die zeichnerische Lösung können Sie auf Abb. 37 zurück greifen. Zurück zu Aufgabe 162

§ **597** Musterlösung zu Aufgabe 163: die kartesische Darstellung verwendet den Realteil $a = |z|\cos\varphi$ und den Imaginärteil $b = |z|\sin\varphi$ in der Form $z = a + b\mathrm{i}$:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}\,,\\
z_2 &= -1 + 1.73\mathrm{i}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= -3\mathrm{i}\,, \\ z_4 &= 3.46 + 2\mathrm{i}\,, \\ z_5 &= 4.33 - 2.5\mathrm{i}\,, \\ z_6 &= -4.24 + 4.24\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Graphische Lösung in Abb. 51 Zurück zu Aufgabe 163

§ **598** Musterlösung zu Aufgabe 164: bei der Addition werden Realteile und Imaginärteile separat addiert (entsprechend der komponentenweisen Addition bei Vektoren), bei der Multiplikation ist das Distributivgesetz anzuwenden und der Zusammenhang $\mathrm{i}^2 = -1$ zu berücksichtigen.

$$\begin{aligned} z_1 &= (4+3\mathrm{i}) - (2-\mathrm{i}) = (4-2) + (3\,\mathrm{i} - (-\mathrm{i})) = 2 + 4\mathrm{i}\,, \\ z_2 &= (4+3\mathrm{i}) \cdot (2-\mathrm{i}) = 4\cdot 2 + 3\cdot 2\mathrm{i} - 4\mathrm{i} - 3\mathrm{i}\cdot\mathrm{i} = 11 + 2\mathrm{i}\,, \\ z_3 &= 3\,(2-\mathrm{i}) + 5\,(2+\mathrm{i}) = 6 + 10 - 3\mathrm{i} + 5\mathrm{i} = 16 + 2\mathrm{i}\,, \\ z_4 &= 3\,(2-\mathrm{i}) \cdot 5\,(2+\mathrm{i}) = 15(2\cdot 2 + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i} - \mathrm{i}^2) = 15\cdot 5 = 74\,, \\ z_5 &= (3+3\mathrm{i})^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 3\mathrm{i} + (3\mathrm{i})^2 = 9 + 18\mathrm{i} - 9 = 18\mathrm{i}\,, \\ z_6 &= (-3-2\mathrm{i})\cdot(-4-3\mathrm{i}) = (-3)\cdot(-4) + (-3)\cdot -3\mathrm{i} + (-2\mathrm{i})\cdot(-4) + (-2\mathrm{i})\cdot(-3\mathrm{i}) \\ &= 6 + 17\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 164

§ **599** Musterlösung zu Aufgabe 165: es ist mit dem konjugiert Komplexen des Nenners zu erweitern

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{4-2\mathrm{i}}{2-4\mathrm{i}} = \frac{(4-2\mathrm{i})(2+4\mathrm{i})}{2^2+4^2} = \frac{8+8+\mathrm{i}(16-4)}{20} = \frac{4+3\mathrm{i}}{5} \\ z_2 &= \frac{4+2\mathrm{i}}{2-4\mathrm{i}} = \frac{(4+2\mathrm{i})(2+4\mathrm{i})}{2^2+4^2} = \frac{8-8+\mathrm{i}(16+4)}{20} = \mathrm{i} \\ z_3 &= \frac{4+2\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}} = \frac{(4+2\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})}{2^2+4^2} = \frac{8+8-\mathrm{i}(-16+4)}{20} = \frac{4-3\mathrm{i}}{5} \\ z_4 &= \frac{4-2\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}} = \frac{(4-2\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})}{2^2+4^2} = \frac{8-8+\mathrm{i}(-16-4)}{20} = -\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 165

§ **600** Musterlösung zu Aufgabe 166: für die MacLaurin'sche Reihe gilt allgemein

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^4}{4!}f''''(0) + \dots\,. \tag{41}$$

1. bei der binomischen Reihe erhalten wir für das positive Vorzeichen in der Klammer, d.h. $(1+x)^n$, die Ableitungen und die Funktionswerte der Ableitung an der Stelle Null:

   $$\begin{array}{lcl} f(x) = (1+x)^n & \Rightarrow & f(0) = 1 \\ f'(x) = n(1+x)^{n-1} & \Rightarrow & f'(0) = n \\ f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} & \Rightarrow & f''(0) = n(n-1) \\ f'''(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} & \Rightarrow & f'''(0) = n(n-1)(n-2) \\ \vdots & \Rightarrow & \vdots \\ f^k(x) = n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k} & \Rightarrow & f^k(0) = n(n-1)\dots(n-k+1)\,. \end{array}$$

   Einsetzen in (41) liefert

   $$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x^1 + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \dots$$

   Die Koeffizienten dieser Reihe sind die Binominalkoeffizienten

   $$(\,nk\,) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}\,,$$

   mit deren Hilfe sich die binomische Reihe in kompakterer Form schreiben lässt als

   $$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k\,.$$

Die Potenzreihenentwicklung von $(1-x)^n$ erhalten wir daraus, in dem wir $x$ durch $-x$ ersetzen:

$$\begin{aligned}(1-x)^n &= 1 - \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 - \binom{n}{3} x^3 + \ldots + (-1)^k \binom{n}{k} x^k + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} x^k \,. \end{aligned} \tag{42}$$

2. die Funktion $(x-1)^{-1}$ ist der Spezialfall der binomischen Reihe für $n=-1$. Für die Binominalkoeffizienten gilt dabei

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k \,.$$

Damit ergibt sich aus (42) für die Reihenentwicklung

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \,. \tag{43}$$

Achtung: die Reihe konvergiert nur für $|x| < 1$ (geometrische Reihe). Das ist aber kein Problem, da wir bei der MacLaurin'schen Reihe ohnehin um Null entwickeln, d.h. die Voraussetzung für Konvergenz automatisch mit erfüllt wurde.

3. auch bei der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x/(1-x)$ können wir uns die Entwicklung sparen. Diese lässt sich schreiben als Produkt

$$\frac{\mathrm{e}^x}{1-x} = \mathrm{e}^x \, \frac{1}{1-x} \,.$$

Für die Entwicklung der Exponentialfunktion ist bereits bekannt

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \,,$$

die Entwicklung des zweiten Faktors ist gegeben durch (43). Multiplikation der beiden Potenzreihen liefert für die Potenzreihenentwicklung des Produkts:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^x}{1-x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\right) \\ &= 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 + \ldots \,. \end{aligned}$$

4. die Potenzreihenentwicklung der hyperbolischen Winkelfunktionen ist ähnlich der für die trigonometrischen Winkelfunktionen, allerdings tritt kein Vorzeichenwechsel auf, da die Ableitung von cosh den sinh ergibt. Für die Ableitungen und ihre Werte bei Null erhalten wir beim sinh

$$\begin{array}{lcl} f(x) = \sinh x & \Rightarrow & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cosh x & \Rightarrow & f'(0) = 1 \\ f''(x) = \sinh x & \Rightarrow & f''(x) = 0 \,. \end{array}$$

Einsetzen liefert

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots \,,$$

d.h. die Terme, die wir auch von der Reihenentwicklung des sin kennen, allerdings ohne Vorzeichenwechsel, da die Ableitungen keinen Vorzeichenwechsel eingeführt haben. Für cosh finden wir entsprechend die Terme, die aus der Reihenentwicklung des cos bekannt sind, ebenfalls ohne Vorzeichenwechsel:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \,.$$

Zurück zu Aufgabe 166

§ **601** Musterlösung zu Aufgabe 167: für die Taylor-Entwicklung gilt allgemein

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots \,.$$

Eine andere Darstellungsform geht nicht vom Intervall $[a, b]$ aus sondern betrachtet den Funktionswert in einer Umgebung $h$ von $x_0$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots \,. \tag{44}$$

Bei Entwicklung um $x_0 = 0$ ergibt sich die MacLaurin Reihe

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(x) + \frac{x^3}{3!} f'''(x) + \dots \,. \tag{45}$$

(a) Hier ist Entwicklung um $x_0 = 0$ gefordert, d.h. MacLaurin ist ausreichend. Die Funktion und ihre Ableitungen an der Stelle $x = 0$ sind

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x} &\Rightarrow\quad & f(0) = 1 \\ f'(x) &= -\frac{2}{(1+x)^2} &\Rightarrow\quad & f'(0) = 2 \\ f''(x) &= \frac{6}{(1+x)^3} &\Rightarrow\quad & f''(0) = -6 \end{aligned}$$

Einsetzen in (45) liefert

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 \dots \,.$$

(b) Die Funktion $\sqrt{x}$ ist um die Stelle $x = 1$ zu entwickeln, d.h. wir müssen die Taylor-Reihe (44) verwenden. Wieder bestimmen wir zuerst die Funktion und ihre Ableitungen an der Stelle $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} g(x) = \sqrt{x} &= x^{1/2} &\Rightarrow\quad & g(1) = 1 \\ g'(x) &= x^{-1/2}/2 &\Rightarrow\quad & g'(1) = 1/2 \\ g''(x) &= -x^{-3/2}/4 &\Rightarrow\quad & g''(1) = -1/4 \\ g'''(x) &= 3x^{-5/2}/8 &\Rightarrow\quad & g'''(1) = 3/8 \,. \end{aligned}$$

Einsetzen in (44) liefert

$$g(x) = \sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + \dots\dots \,.$$

(c) wie (b), als Zwischenschritte erhalten wir

$$\begin{aligned} h(x) &= x^{-2} - 2x^{-1} &\Rightarrow\quad & h(1) = -1 \\ h'(x) &= -2x^{-3} + 2x^{-2} &\Rightarrow\quad & h'(1) = 0 \\ h''(x) &= 6x^{-4} - 4x^{-3} &\Rightarrow\quad & h''(1) = 2 \\ h'''(x) &= -24x^{-5} + 12x^{-4} &\Rightarrow\quad & h'''(1) = -12 \,. \end{aligned}$$

und damit für das Ergebnis

$$h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = -1 + 1(x-1)^2 - 2(x-1)^3 + 3(x-1)^4 - \dots\, .$$

(d) wie (a), als Zwischenschritte erhalten wir

$$\begin{aligned} k(x) &= \ln(1+x^2) &\Rightarrow\quad & k(0) = 0 \\ k'(x) &= \frac{2x}{(1+x^2)} &\Rightarrow\quad & k'(0) = 0 \\ k''(x) &= -\frac{4x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{2}{1+x^2} &\Rightarrow\quad & k''(0) = 2 \\ k'''(x) &= \frac{16x^3}{(1+x^2)^3} - \frac{12x}{(1+x^2)^2} &\Rightarrow\quad & k'''(0) = 0 \,. \end{aligned}$$

und damit für das Ergebnis

$$k(x) = \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n}$$

Zurück zu Aufgabe 167

§ **602** Musterlösung zu Aufgabe 168: da alle Funktionen für kleine Größen $x$ zu bestimmen sind, ist die MacLaurin Entwicklung ausreichend.
(a) Die Entwicklung der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x}$ kann nicht direkt aus der von $\sqrt{x}$ in Aufgabe 167 übernommen werden, da bei $f(x) = \sqrt{1-x}$ stets noch ein Vorzeichen aus der inneren Ableitung hinzu kommt. Außerdem müssen wir hier um Null entwickeln.

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} \quad &\Rightarrow \quad f(0) = 1 \\ f'(x) = -(1-x)^{-1/2}/2 \quad &\Rightarrow \quad f'(0) = -1/2 \\ f''(x) = -(1-x)^{-3/2}/4 \quad &\Rightarrow \quad f''(0) = -1/4 \\ f'''(x) = -3(1-x)^{-5/2}/8 \quad &\Rightarrow \quad f'''(0) = -3/8 \,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Reihenentwicklung

$$f(x) = \sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \ldots$$

und damit für $x = 0.05$

$$f(0.05) = \sqrt{0.95} = 1 - 0.05 - 0.0003125 - 0.0000078125 + \ldots \approx 0.9496797$$

Zum Vergleich der direkte Wert: $\sqrt{0.95} = 0.9746794$, d.h. das Ergebnis der Reihenentwicklung bis zum dritten Glied ist bereits bis zur sechsten Nachkommastelle genau.
(b) Für die Funktion $g(x) = \sin(x)$ und ihre Ableitungen an der Stelle Null ergibt sich

$$\begin{aligned} g(x) = \sin x \quad &\Rightarrow \quad g(0) = 0 \\ g'(x) = \cos x \quad &\Rightarrow \quad g'(0) = 1 \\ g''(x) = -\sin x \quad &\Rightarrow \quad g''(0) = 0 \\ g'''(x) = -\cos x \quad &\Rightarrow \quad g'''(0) = -1 \,. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Reihenentwicklung

$$g(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{46}$$

und nach Einsetzen von $x = 0.1$:

$$\sin(0.1) = 0.1 - \frac{0.0001}{3!} + \frac{0.000001}{5!} - \frac{0.00000001}{7!} + \ldots \approx 0.099833341664 \,.$$

Der Taschenrechner liefert $\sin(0.1) = 0.09983341664$, d.h. wir hätten die Reihenentwicklung schon früher abbrechen können. Falls Ihr Taschenrechner mein Ergebnis nicht reproduziert, so haben Sie wahrscheinlich vergessen, vorher von Gradmass auf Bogenmass umzustellen.
(c) Die Reihenentwicklung für den Tangens können wir stur nach Schema vornehmen. Für die Funktion und ihre Ableitungen an der Stelle Null ergibt sich:

$$\begin{aligned} h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \, \cos^{-1} x \quad &\Rightarrow \quad h(0) = 0 \\ h'(x) = \cos^{-2} x = 1 + \tan^2 x \quad &\Rightarrow \quad h'(0) = 1 \\ h''(x) = 2\cos^{-3} x \, \sin x \quad &\Rightarrow \quad h'(0) = 0 \\ h'''(x) = 6\sin^2 x \cos^{-4} x + 2\cos^{-2} x \quad &\Rightarrow \quad h'''(0) = 2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Reihenentwicklung

$$h(x) = \tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \ldots$$

Die Reihe ist sehr früh abgebrochen, da die weitere Bildung der Ableitungen recht unhandlich ist. Einsetzen von $x = 0.15$ liefert

$$\tan(0.15) = 0.15 + 0.001125 + \ldots \approx 0.1511$$

Als Alternative zu obiger Entwicklung entwickeln wir Zähler und Nenner getrennt. Die Entwicklung für den Sinus haben wir schon in Teil (b) vorgenommen. Für den Kosinus erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} k(x) &= \cos x & \Rightarrow \quad & k(0) = 1 \\ k'(x) &= -\sin x & \Rightarrow \quad & k'(0) = 0 \\ k''(x) &= -\cos x & \Rightarrow \quad & k''(0) = -1 \\ k'''(x) &= \sin x & \Rightarrow \quad & k'''(0) = 0 \end{aligned}$$

und damit für die Reihenentwicklung des Kosinus

$$k(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots .$$

Zusammen mit (46) lässt sich daraus die Reihenentwicklung des Tangens schreiben als

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots} \approx x \, \frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots} \\ &\approx x \, \frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}} + \ldots \end{aligned}$$

Einsetzen von $x = 0.15$ liefert

$$\tan(0.15) = 0.15 \, \frac{0.9962542165}{0.9887710779} + \ldots \approx 0.151135218 \, ,$$

der Taschenrechner liefert als Vergleichswert $\tan(0.15) = 0.151135218$, d.h. auch hier hätten wir die Reihenentwicklung früher abbrechen können. Zurück zu Aufgabe 168

§ **603** Musterlösung zu Aufgabe 169: Gauß'sches Fehlerintegral: Die MacLaurin'sche Reihe für die Exponentialfunktion ist bekannt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \ldots , \tag{47}$$

Im Fehlerintegral ist der Integrand nicht $x$ sondern $-t^2$. Die Potenzreihenentwicklung für $e^{-t^2}$ erhalten wir, wenn wir in (47) $x$ durch $-t^2$ ersetzen:

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{10}}{5!} + \ldots .$$

Einsetzen in das Integral liefert

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\limits_0^x \left[ 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^10}{5!} + \ldots \right] \mathrm{d}t \\ &= \left[ t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5 \cdot 2!} - \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 4!} - \frac{t^{11}}{11 \cdot 5!} + \ldots \right]_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \ldots \end{aligned}$$

Das Integral kann verwendet werden, um die Fläche unter der Gauß'schen Glockenkurve zu bestimmen. Dies ist für verschiedene Anwendungen in der Statistik von Interesse.
Für die zweite Funktion wird die Potenzreihe des Sinus im Integranden eingesetzt und wir erhalten

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots \right) \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} + \ldots\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \frac{x^9}{9\cdot 9!} + \ldots\right]_0^1 \\
&= x - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \frac{1}{9\cdot 9!} + \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \frac{1}{3265920} + \ldots = 0.936083\,.
\end{aligned}
$$

Zurück zu Aufgabe 169

§ **604** Musterlösung zu Aufgabe 170: beide Integrale haben eine ähnliche Form wie das in § 366 behandelte

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x\,.$$

Auch wenn wir in diesem Fall ein bestimmtes Integral betrachten, müssen wir die Stammfunktion bestimmen. Als Lösungsverfahren stehen daher doppelte partielle Integration oder die Darstellung der Winkelfunktion mit Hilfe der Exponentialfunktion und anschließende einfache Integration zur Auswahl. Wählen wir letzteren Ansatz. Aus der Euler'schen Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

erhalten wir für die Darstellung der Winkelfunktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}\,.$$

Für das erste Integral erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin t \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{(-\alpha+\mathrm{i})t} - \mathrm{e}^{(-\alpha-\mathrm{i})t}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left[\frac{\mathrm{e}^{(-\alpha+\mathrm{i})t}}{-\alpha+\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{e}^{(-\alpha-\mathrm{i})t}}{-\alpha-\mathrm{i}}\right]_0^\infty = -\frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{(-\alpha-\mathrm{i}) - (-\alpha+\mathrm{i})}{(-\alpha+\mathrm{i})(-\alpha-\mathrm{i})} \\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{-2\mathrm{i}}{\alpha^2+1} = \frac{1}{\alpha^2+1}\,.
\end{aligned}
$$

Entsprechend ergibt sich für den zweiten Ausdruck

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos t \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{(-\alpha+\mathrm{i})t} + \mathrm{e}^{(-\alpha-\mathrm{i})t}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\mathrm{e}^{(-\alpha+\mathrm{i})t}}{-\alpha+\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{e}^{(-\alpha-\mathrm{i})t}}{-\alpha-\mathrm{i}}\right]_0^\infty = -\frac{1}{2} \frac{(-\alpha-\mathrm{i}) + (-\alpha+\mathrm{i})}{(-\alpha+\mathrm{i})(-\alpha-\mathrm{i})} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{-2\alpha}{\alpha^2+1} = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}\,.
\end{aligned}
$$

Zurück zu Aufgabe 170

§ **605** Musterlösung zu Aufgabe 171: für die $n$-te Wurzel gilt allgemein (in Umkehrung der Regeln für das Potenzieren)

$$z^{1/n} = (|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^{1/n} = |z|^{1/n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/n}\,.$$

Daraus ergeben sich $n$ komplexe Zahlen der Form

$$y = |y|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi_k} \quad \text{mit} \quad |y| = \sqrt[n]{|z|} \quad \text{und} \quad \Psi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, ..., n-1\,.$$

In Polarform sind die beiden komplexen Zahlen

$$z_1 = 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}$$

$$z_2 = 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$$

und die allgemeine Form für die komplexen Wurzeln wird

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{z_1} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n}\\
\sqrt[n]{z_2} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}\;.
\end{aligned}$$

Für die dritte und vierte Wurzel enthalten wir für $z_1$

$$\begin{aligned}
[\sqrt[3]{z_1}]_1 &= 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1\\
[\sqrt[3]{z_1}]_2 &= 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3} = -0.5 + 0.87\mathrm{i}\\
[\sqrt[3]{z_1}]_3 &= 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3} = -0.5 - 0.87\mathrm{i}\\
[\sqrt[4]{z_1}]_1 &= 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1\\
[\sqrt[4]{z_1}]_2 &= 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/4} = \mathrm{i}\\
[\sqrt[4]{z_1}]_3 &= 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3} = -1\\
[\sqrt[4]{z_1}]_4 &= 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}6\pi/3} = -\mathrm{i}
\end{aligned}$$

und entsprechend für $z_2$:

$$\begin{aligned}
[\sqrt[3]{z_1}]_1 &= 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = 0.5 + 0.87\mathrm{i}\\
[\sqrt[3]{z_1}]_2 &= 1\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/3} = -1\\
[\sqrt[3]{z_1}]_3 &= 1\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/3} = 0.5 - 0.87\mathrm{i}\\
[\sqrt[4]{z_1}]_1 &= 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = 0.71 + 0.71\mathrm{i}\\
[\sqrt[4]{z_1}]_2 &= 1\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4} = -0.71 + 0.71\mathrm{i}\\
[\sqrt[4]{z_1}]_3 &= 1\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/4} = -0.71 - 0.71\mathrm{i}\\
[\sqrt[4]{z_1}]_4 &= 1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = 0.71 - 0.71\mathrm{i}\;.
\end{aligned}$$

Für die Wurzel aus -1 ist das Dreieck gespiegelt (ein Eckpunkt liegt bei -1 auf der reellen Achse), das Quadrat dagegen hat keinen Eckpunkt auf einer der Achsen sondern seine Seiten laufen parallel zu den Achsen (mit dem Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems). Die graphische Darstellung finden Sie in Abb. 41.

Zurück zu Aufgabe 171

# 8 Lösungen Selbsttests

## Lernfeld 1: Zum Aufwärmen

**Aufgabe 1**: (a) 4, 12, 9; (b) 16, -72, 81; (c) 25, -9; (d) 8, 60, 150, 125. Oder vollständig ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}(2a+3b)^2 &= 4\,a^2+12\,ab+9\,b^2\,,\\ (4a-9b)^2 &= 16\,a^2-72\,ab+81\,b^2\,,\\ (5a+3b)(3b-5a) &= 25\,a^2-9\,b^2\,,\\ (2a+5b)^3 &= 8\,a^3+60\,a^2b+150\,ab^2+125\,b^3\;.\end{aligned}$$

**Aufgabe 2**: (a) -5, +5; (b) -3, +8; (c) 5/2, 7/2. Oder vollständig ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}x^2-25=0 &\;\Rightarrow\; x_1=-5 \quad\text{und}\quad x_2=+5\\ x^2-5x-24=0 &\;\Rightarrow\; x_1=-3 \quad\text{und}\quad x_2=+8\\ 4x^2-24x+140=0 &\;\Rightarrow\; x_1=5/2 \quad\text{und}\quad x_2=7/2\;.\end{aligned}$$

**Aufgabe 3**: $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_3=5$. Oder vollständig ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}2x_1-4x_2+3x_3 &= 29\\ -x_1+8x_2-x_3 &= -24\\ 4x_1+x_2-5x_3 &= -15 \qquad x_1=3\,,\quad x_2=-2 \quad x_3=5\;.\end{aligned}$$

**Aufgabe 4**: (a) 1, 2x+2, 2x+2, (b) 9, 0, 0. Oder vollständig ausgeschrieben:

$$\frac{a^{x+1}\cdot b^{x+3}\cdot a^{3x-1}\cdot b^{x+3}}{a^{x-2}\cdot b^{3-x}\cdot a^{x}\cdot b^{x+1}} \;\Rightarrow\; 1\cdot a^{2x+2}\cdot b^{2x+2}=(ab)^{2x+2}$$

$$\frac{(6a-12b)^2\cdot(3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2} \;\Rightarrow\; 9\cdot a^0\cdot b^0=9\;.$$

## Lernfeld 2: Vektoren

**Aufgabe 52:** die Herausforderung besteht darin, Vektor $\vec{a}$ aus den Einheitsvektoren zusammen zu setzen als

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}\;.$$

Damit ergibt sich

$$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+2-3\\2-2-0\\-3+1-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}\,,$$

$$2(\vec{a}-\vec{b})+5\vec{c}=2\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10-4+20\\4+4\\-6-2-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\8\\-13\end{pmatrix}\,,$$

$$-3\vec{a}+2\vec{b}-(\vec{c}-2\vec{b})=-3\vec{a}-\vec{c}=-3\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15-3\\-6\\-9+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18\\-6\\-8\end{pmatrix}\;.$$

**Aufgabe 53:**

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}=1\cdot3+2\cdot0+0\cdot1=6\,,$$

$$(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=4\cdot(-2)+2\cdot1+1\cdot0=-6\,,$$

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} .$$

**Aufgabe 54:**

$$\vec{a}\times\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} ,$$

$$\begin{aligned}(\vec{b}\times 2\vec{a})\times\vec{c} &= 2\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}6\\0\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\\ &= 2\begin{pmatrix}-2\\-10\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-20\\-12\end{pmatrix} ,\end{aligned}$$

$$(\vec{a}\times\vec{c})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\-3\end{pmatrix} = 30 .$$

**Aufgabe 55:** (a) 1, ein Vektor parallel zu $\vec{c}$, wofern nicht der Vorfaktor $\vec{a}\times\vec{b}$ Null wird oder einen zu $\vec{c}$ parallelen Vektor ergibt, so dass das Kreuzprodukt verschwindet; (b) 2, die Skalarprodukte in den Klammern ergeben jeweils einen Skalar, aber aus Skalaren kann man kein Kreuzprodukt bilden; (c) 0, die Kreuzprodukte in den Klammern ergeben jeweils einen Vektor, das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren ergibt dann einen Skalar; (d) 1, wie bei (c) ergeben die Kreuzprodukte in den Klammern jeweils Vektoren, das Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren gibt wieder einen Vektor; (e) 0, da das Kreuzprodukt in der Klammer einen Vektor ergibt, der skalar mit einem anderen Vektor multipliziert wird – da der sich in der Klammer ergebende Vektor senkrecht auf $\vec{d}$ steht, verschwindet das Skalarprodukt, d.h. unabhängig von den konkreten Vektoren ergibt sich stets Null; (f) 1, die Klammer enthält eine Summe aus zwei Vektoren, wobei der zweite Vektor durch ein Kreuzprodukt bestimmt ist. Diese Summe ist ein Vektor, so dass das Kreuzprodukt mit einem weiteren Vektor wieder einen Vektor ergibt; (g) 2, der Ausdruck in der Klammer ist eine Summe aus einem Vektor und einem durch ein Skalarprodukt bestimmten Skalar und damit nicht definiert; (h) 0, $(\vec{a}\cdot\vec{d})(((\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{d}\times\vec{c}))\cdot\vec{c})$ lässt sich zerlegen in einen Skalar (erste Klammer) multipliziert mit einem Skalar (zweite Klammer), der seinerseits durch das Skalarprodukt zweier Vektoren gebildet wird, wobei der erste dieser Vektoren das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist, die jeweils wieder als Kreuzprodukte anderer Vektoren dargestellt sind; (i) 0, beide Klammern enthalten Skalarprodukte und ergeben damit Skalare, die mit einander multipliziert werden können.

## Lernfeld 3: Funktionen

**Aufgabe 84:** $e^x$ ist immer größer Null, $f(x)$ hat also keine Nullstelle. $\ln(x)$ hat eine Nullstelle bei $x = 1$. $\sin(x)$ hat unendlich viele Nullstellen bei allen ganzzahligen Vielfachen von 180° bzw. pi. $\tan(x)$ ist definiert als $\sin(x)/\cos(x)$, übernimmt daher die Nullstellen vom Sinus.

**Aufgabe 85:** 1

**Aufgabe 86:** eindeutig umkehrbar: $f(x)$, $h(x)$, $j(x)$; nicht eindeutig umkehrbar: $g(x)$, $i(x)$, $k(x)$, $l(x)$

**Aufgabe 87:** streng monoton steigend im gesamten Definitionsbereich.

**Aufgabe 88:**

## Lernfeld 4: Differentiation

**Aufgabe 105:** die Ableitungen von $f(x) = 5x\,\cos^2(x)$ sind unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\,\cos^2(x) - 10x\,\cos(x)\,\sin(x) \\ f''(x) &= -20\,\cos(x)\,\sin(x) + 10x\,\sin^2(x) - 10x\,\cos^2(x)\,. \end{aligned}$$

**Aufgabe 106:** die Ableitungen von $f(x) = \cos(kx)\,\mathrm{e}^{-kx}$ ergeben sich unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel zu

$$f'(x) = -k\sin(kx)\,\mathrm{e}^{-kx} - k\cos(kx)\,\mathrm{e}^{-kx} \quad \text{und} \quad f''(x) = 2k^2\,\sin(kx)\,\mathrm{e}^{-kx}$$

**Aufgabe 107:** die Ableitungen der Funktion $x(t) = (t-2)^3 - 3t + 2$ sind

$$x'(t) = 3(t-2)^2 - 3 \quad \text{und} \qquad x''(t) = 6(t-2)\,.$$

Extrema ergeben sich an den Nullstellen der ersten Ableitung, d.h. für

$$0 \stackrel{!}{=} 3(t-2)^2 - 3 \quad \text{bzw.} \quad (t-2)^2 = 1 \quad \text{und damit} t_1 = -1 \quad \text{und} \quad t_2 = 3\,.$$

Die Funktionswerte an diesen Stellen sind $x(t_1) = -2$ und $x(t_2) = -6$.
**Aufgabe 108:** die Ableitungen der Funktion $x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$ sind

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\gamma\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) - \omega\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi)\,, \\ x''(t) &= \gamma^2\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) + \gamma\omega\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi) + \gamma\omega\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi) - \omega^2\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) \\ &= (\gamma^2 - \omega^2)\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) + 2\gamma\omega\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi)\,. \end{aligned}$$

## Lernfeld 5: Integration

**Aufgabe 133:**

$$\int x\,\sqrt{5x^2 - 32}\,\mathrm{d}x = \int x\,\sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{10x} = \frac{1}{10}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{10}\,u^{3/2}\,\frac{2}{3} + c = \frac{(5x^2-32)^{3/2}}{15} + c\,.$$

**Aufgabe 134:**

$$\int \mathrm{e}^x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x\,\sin(x) - \mathrm{e}^x\cos(x)\right)\,.$$

**Aufgabe 135:** 46/3
**Aufgabe 136:** 128/3
**Aufgabe 137:** 814.3

# Abbildungsverzeichnis

# Tabellenverzeichnis

# Index