

---

Das absolutstetige Spektrum eines Matrixoperators  
und eines diskreten kanonischen Systems

---

Dissertation

im Fachbereich Mathematik/Informatik der  
Universität Osnabrück

Andreas Fischer

Ich danke  
Herrn Professor Dr. H. Behncke und Herrn Dr. C. Remling  
für die Anregung zu dieser Arbeit und für die zahlreichen nützlichen und  
motivierenden Diskussionen.

---

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Spektrale Eigenschaften eines Matrixoperators</b>      | <b>3</b>  |
| 1.1      | Einleitung . . . . .                                      | 3         |
| 1.2      | Grundlagen . . . . .                                      | 5         |
| 1.3      | Operator mit konstanten Koeffizienten . . . . .           | 10        |
| 1.4      | Der fast konstante Fall . . . . .                         | 14        |
| 1.5      | Operatoren mit kompakter Resolvente . . . . .             | 23        |
| 1.6      | Unbeschränkte Koeffizienten . . . . .                     | 25        |
| <br>     |   |           |
| <b>2</b> | <b>Absolutstetiges Spektrum eines kanonischen Systems</b> | <b>33</b> |
| 2.1      | Einleitung . . . . .                                      | 33        |
| 2.2      | Spektraltheorie auf endlichen Intervallen . . . . .       | 36        |
| 2.3      | Spektralmaße . . . . .                                    | 44        |
| 2.4      | $M$ Funktionen . . . . .                                  | 47        |
| 2.5      | Spektralmaße des Halbachsenproblems . . . . .             | 52        |
| 2.6      | Symplektische lineare Algebra . . . . .                   | 57        |
| 2.7      | Beweis des Theorems 2.1.1 . . . . .                       | 63        |
| 2.8      | Gleichungen höherer Ordnung . . . . .                     | 65        |

**Literaturverzeichnis**

**73**

# Kapitel 1

## Spektrale Eigenschaften eines Matrixoperators

### 1.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden die spektralen Eigenschaften der selbstadjungierten Realisierungen des Matrixoperators

$$\tau u = \begin{pmatrix} p & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & r \end{pmatrix} u \quad (1.1.1)$$

im Hilbertraum  $\mathcal{L}^2([0, \infty), \omega) \otimes \mathbb{C}^2$  untersucht, wobei  $\mathcal{D}$  der Differentialoperator  $\mathcal{D}y = \frac{1}{\omega}(-(p_1 y')' + qy)$  im Hilbertraum  $\mathcal{L}^2((0, \infty), \omega)$  ist und  $p, q, r, p_1$  reelle und lokal integrierbare Funktionen in  $[0, \infty)$  sind. Ferner sollen  $p_1$  und  $\omega$  positiv und differenzierbar sein. Dies geschieht mithilfe der  $M$ -Matrix des zugehörigen Hamiltonschen Systems erster Ordnung, die aus der asymptotischen Form der Eigenfunktionen berechnet wird. Da die  $M$ -Matrix die Boreltransformierte des Spektralmaßes ist, kann man aus  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} M(\lambda + i\varepsilon)$  auf Eigenschaften des Spektralmaßes schließen. Mithilfe der Liouville-Kummer-Transformation [3] kann man zeigen, dass eine selbstadjungierte Realisierung von  $\tau$  im Hilbertraum  $\mathcal{L}^2([0, \infty), \omega) \otimes \mathbb{C}^2$  unitär äquivalent zu einer selbstadjungierten Realisierung von

$$\tilde{\tau} z = \begin{pmatrix} p_{tr}(t) & -\frac{d^2}{dt^2} + q_{tr}(t) \\ -\frac{d^2}{dt^2} + q_{tr}(t) & r_{tr}(t) \end{pmatrix} z$$

im Hilbertraum  $\mathcal{L}^2([0, \infty)) \otimes \mathbb{C}^2$  ist, wobei  $t = \int_0^x \sqrt{\frac{\omega}{p_1}} ds$ ,  $q_{tr}(t) = q(x)\mu^2\gamma^{-1} - (p_1\mu')' \frac{\mu}{\gamma}$ ,  $p_{tr}(t) = p(x)$ ,  $r_{tr}(t) = r(x)$  ist mit  $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{p_1(x)\omega(x)}}$ ,  $\gamma(x) = \sqrt{\frac{\omega(x)}{p_1(x)}}$ . Deshalb kann im Folgenden angenommen werden, dass  $p_1 = \omega = 1$  sind. Solche Operatoren wurden auf endlichen Intervallen von Chakaravarty [10], [11] untersucht und auf unendlichen Intervallen wurden ihre Defektindizes von Chakaravarty [12] und Eastham [16] für eine stark eingeschränkte Klasse von Koeffizienten bestimmt. Solche Block - Operator - Matrizen wurden ferner von Langer und Tretter [27] untersucht. Ihr Interesse lag in der Konstruktion spektraler invarianter Unterräume. Hier soll aber hauptsächlich das stetige Spektrum einer selbstadjungierten von  $\tau$  untersucht werden und gezeigt werden, dass in vielen Fällen kein singularstetiges Spektrum auftreten kann. Im Abschnitt 1.2 werden die Grundlagen der Asymptotischen Integration und der Theorie der Hamiltonschen Systeme kurz erläutert, insoweit sie benötigt werden. Im Abschnitt 1.3 wird das Spektrum von  $\tau$  für konstante Koeffizienten untersucht, und im Abschnitt 1.4 werden wir sehen, dass im fast konstanten Fall kein singularstetiges Spektrum auftritt und dass der absolutstetige Anteil einer selbstadjungierten Realisierung von  $\tau$  unitär äquivalent zum konstanten Operator  $H_0$  mit Neumann Randbedingungen ist. Es ist allgemein bekannt, dass der Schrödingeroperator  $\mathcal{D} = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$  für  $q(x) \rightarrow \infty$  eine kompakte Resolvente und rein diskretes Spektrum besitzt. Wir werden im Abschnitt 1.5 sehen, dass unter der zusätzlichen Voraussetzung  $D(\mathcal{D}) = D(-\frac{d^2}{dx^2}) \cap D(q)$  im Falle  $p, r = o(q)$  für  $q(x) \rightarrow \infty$  auch rein diskretes Spektrum vorliegt. Für eine Reihe von Fällen werden im Abschnitt 1.6 für unbeschränkte Koeffizienten der Defektindex des zu  $\tau$  gehörenden abgeschlossen minimalen Operators bestimmt, und das stetige Spektrum einer selbstadjungierten Realisierung  $H$  von  $\tau$  untersucht. Die Ergebnisse dieses Kapitels entstammen meiner gemeinsamen Arbeit mit Herrn H. Behncke [8], die bereits erschienen ist.

Die Notationen in diesem Kapitel sind Standard. Mit  $T$  bzw.  $T_0$  bezeichnen wir den maximalen bzw. den abgeschlossen minimalen Operator von  $\tau$  und mit  $H$  bezeichnen wir immer eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_0$ . Das Spektrum von  $H$  bezeichnen wir mit  $\sigma(H)$  und unterscheiden das wesentliche Spektrum  $\sigma_{\text{ess}}(H)$ , das absolutstetige Spektrum  $\sigma_{\text{ac}}(H)$ , das singularstetige Spektrum  $\sigma_{\text{sc}}(H)$  und das diskrete Spektrum  $\sigma_d(H)$ .

## 1.2 Grundlagen

Die zu (1.1.1) gehörende Eigenwertgleichung im Hilbertraum  $\mathcal{L}^2(0, \infty) \otimes \mathbb{C}^2$  lautet

$$\begin{pmatrix} p & -\frac{d^2}{dx^2} + q \\ -\frac{d^2}{dx^2} + q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (1.2.1)$$

Für den symmetrischen abgeschlossenen minimalen Operator gilt  $T_0 = T^*$ . Da die Koeffizienten alle reell sind, hat  $T_0$  gleiche Defektzahlen. Folglich besitzt  $T_0$  selbstadjungierte Erweiterungen, die mit  $H_\alpha$  oder  $H$  bezeichnet werden. Null ist wegen  $p, r, q \in \mathcal{L}_{loc}^1([0, \infty))$  ein regulärer Randpunkt. Mögliche Defektindizes sind also 2, 3 und 4. Da das absolutstetige und wesentliche Spektrum unabhängig von der Randbedingung ist, wird statt  $H_\alpha$  im minimalen Defektfall immer  $H$  geschrieben.

Es ist vom Vorteil, das System (1.2.1) als ein System erster Ordnung zu schreiben

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p - z & q & 0 & 0 \\ q & r - z & 0 & 0 \end{pmatrix} u = Au \quad \text{mit } u = (y_1, y_2, y_2', y_1')^t. \quad (1.2.2)$$

Dies ist ein Hamiltonsches System [23], [24], da mit

$$J = \begin{pmatrix} 0_2 & -E_2 \\ E_2 & 0_2 \end{pmatrix}$$

es in der Form

$$Ju' = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p & -q & 0 & 0 \\ -q & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} u =: (zA_1 + B)u \quad (1.2.3)$$

geschrieben werden kann. Wegen

$$\begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} (Ju' - Bu) = 0 \quad (1.2.4)$$

ist das System (1.2.3) äquivalent zur Gleichung

$$\tau_1 u = zu \quad (1.2.5)$$

mit

$$\tau_1 u := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (Ju' - Bu).$$

Sei nun  $\mathcal{H}$  der Hilbertraum  $P_2 \mathcal{L}_{A_1}^2([0, \infty))$ ; dies ist der Raum der Äquivalenzklassen der meßbaren Funktionen mit Werten in  $\mathbb{C}^2$  mit

$$\int_0^\infty f^*(x) f(x) dx < \infty.$$

Mit  $\mathcal{L}_{A_1}^2([0, \infty))$  bezeichnet man den Vektorraum meßbarer  $\mathbb{C}^4$ -wertiger Funktionen mit

$$\int_0^\infty f(x)^* A_1(x) f(x) < \infty$$

und  $P_2$  ist die Projektion auf die ersten zwei Komponenten eines Vektors aus  $\mathbb{C}^4$ .  $\tau_1$  erzeugt einen wegen (1.2.4) wohldefinierten maximalen Operator  $L$  im Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , für den man einen symmetrischen abgeschlossenen minimalen Operator  $L_0$  definieren kann mit  $L_0 = L^*$ . Da  $L_0$  wie  $T_0$  gleiche Defektzahlen hat, besitzt  $L_0$  selbstadjungierte Erweiterungen. Da 0 ein regulärer Randpunkt ist, benötigt man im minimalen Defektfall (2,2) für eine selbstadjungierte Erweiterung von  $L_0$  nur eine zusätzliche Randbedingung  $u(0)$  im Punkte  $x = 0$ . Die möglichen Randbedingungen sind wegen der Greenschen Formel die Lagrangeschen Teilräume des symplektischen Raumes  $(\mathbb{C}^4, J)$  und gegeben durch  $(\alpha_1, \alpha_2)u(0) = 0$ , wobei  $\alpha_i \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  ist und

$$\alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_2 \alpha_1^* = 1, \quad \alpha_1 \alpha_2^* - \alpha_2 \alpha_1^* = 0$$

gilt. Im minimalen Defektfall (2,2) definiert man für die Randbedingung  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  die M-Matrix  $M_\alpha(z)$ ,  $\text{Im } z > 0$  durch die Forderung

$$Y(x) \begin{pmatrix} E_2 \\ M_\alpha(z) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_{A_1}^2([0, \infty)),$$

wobei  $Y(., z)$  eine Lösung von (1.2.2) ist, die die Anfangsbedingung

$$Y(0, z) = \begin{pmatrix} \alpha_1^* & -\alpha_2^* \\ \alpha_2^* & \alpha_1^* \end{pmatrix}$$

erfüllt. Da  $M_\alpha(z)$  eine Herglotzfunktion ist, besitzt sie folgende Darstellung

$$M_\alpha(z) = c_1(\alpha) + c_2(\alpha)z + \int_{-\infty}^\infty \left( \frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) d\rho_\alpha(t)$$



mit  $c_i^* = c_i$ ,  $c_2 \geq 0$ .  $\rho_\alpha$  ist ein zu  $H_\alpha$  gehörendes Spektralmaß, d.h.  $H_\alpha$  ist unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator  $T_{id}$  im Raum  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, d\rho_\alpha)$ , wobei  $H_\alpha$  die selbstadjungierte Erweiterung von  $T_0$  mit der Randbedingung  $\alpha$  ist. Mit der Stieltjes-Umkehrformel gilt

$$d\rho_\alpha(E) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} M_\alpha(E + i\varepsilon) dE,$$

wobei hier der schwach\*-Limes gemeint ist. Ferner existiert der punktweise Limes

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_\alpha(E + i\varepsilon) dE = M_\alpha(E+) dE$$

für fast alle  $E \in \mathbb{R}$ , und der absolutstetige Anteil von  $\rho_\alpha$  ist gegeben durch

$$d\rho_\alpha^{\text{ac}}(E) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} M_\alpha(E+) dE.$$

Für die Dirichlet-Randbedingung  $\alpha = (0, 1)$  kann man die  $M$ -Matrix  $M_\alpha(z)$  mithilfe der Formel

$$(u_1, u_2)(0, z)L = \begin{pmatrix} 1 \\ M_\alpha \end{pmatrix}$$

berechnen [35], wobei  $L$  eine noch zu bestimmende  $2 \times 2$ -Matrix ist und  $u_1(\cdot, z)$ ,  $u_2(\cdot, z)$  die  $\mathcal{L}_{A_1}^2([0, \infty))$  Lösungen von (1.2.2) sind. Die obigen Aussagen sind auch alle richtig, wenn wir statt  $\mathcal{L}^2(0, \infty) \otimes \mathbb{C}^2$  den Raum  $\mathcal{L}^2(a, \infty) \otimes \mathbb{C}^2$  für ein  $a > 0$  zugrundelegen. Bei allen diesen Überlegungen spielen die Sätze aus [5] [24] [25] eine wichtige Rolle.

Nun werden noch drei Sätze aus [35] angegeben, die im Folgenden häufiger benutzt werden.

Im minimalen Defektfall (2,2) gilt:

**Theorem 1.2.1** *Die Gleichung  $Ty = Ey$  habe  $r$ -linear unabhängige Lösungen  $y \in \mathcal{L}^2(0, \infty) \otimes \mathbb{C}^2$  für alle  $E$  in einer Borel Menge  $S \subset \mathbb{R}$ . Dann ist für alle selbstadjungierten Erweiterungen von  $T_0$  die Vielfachheit des stetigen Spektrums in  $S$  höchstens  $\gamma - r$ , wobei hier  $\gamma = n = 2$  ist.*

In [1] wurde gezeigt, dass die Aussage auch für den allgemeinen Defektindex  $\gamma = 2, 3, 4$  richtig bleibt, wenn der Definitionsbereich geeignet eingeschränkt wird.

Das obige Theorem ist eine Folgerung aus:

**Lemma 1.2.1** *Es gebe  $r$  linear unabhängige Lösungen  $y_1, \dots, y_r$  in  $\mathcal{L}^2(0, \infty) \otimes \mathbb{C}^2$  mit  $D(H_\alpha) \cap L(y_1, \dots, y_r) = \{0\}$ . Dann gibt es  $r$  linear unabhängige Vektoren  $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{C}^2$  mit  $v_i^* \operatorname{Im} M_\alpha(E + i\varepsilon) v_i = O(\varepsilon)$ .*

**Theorem 1.2.2** *Sei  $\alpha$  eine Randbedingung,  $a \geq 0$  und sei  $M(z)$  die  $M$ -Matrix des Operators in  $\mathcal{L}^2(a, \infty) \otimes \mathbb{C}^2$  mit der Randbedingung  $\alpha$  in  $x = a$ . Ferner sei  $S \subset \mathbb{R}$  eine Borel Menge und  $r \in \{0, 1, 2\}$ , so dass für alle  $E \in S$  gilt:*

- (a)  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \|M(E + i\varepsilon)\| < \infty$
- (b) *Es gibt  $r$  linear unabhängige Lösungen in  $\mathcal{L}^2(a, \infty) \otimes \mathbb{C}^2$  von  $Ty = Ey$ , die nicht die Randbedingung in  $x = a$  erfüllen.*
- (c)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} w^* \operatorname{Im} M(E + i\varepsilon) w > 0$  für alle  $w \in \mathbb{C}^2 \setminus L(v_1(E), \dots, v_r(E))$ , wobei  $v_1(E), \dots, v_r(E) \in \mathbb{C}^2$  die linear unabhängigen Vektoren mit  $v_i^* \operatorname{Im} M(E + i\varepsilon) v_i = O(\varepsilon)$  sind, deren Existenz aus (b) und Lemma 1.2.1 folgt.

*Dann ist für alle Randbedingungen  $\beta$   $\rho_\beta^{\text{sc}}(S) = 0$ , wobei  $\rho_\beta^{\text{sc}}$  der singulärstetige Teil des Spektralmaßes  $\rho_\beta$  des Operators  $H_\beta$  in  $L^2(0, \infty) \otimes \mathbb{C}^2$  ist.*

Das Theorem 1.2.2 wurde für Hamiltonsche Systeme der Ordnung  $2n$  im Grenzfunktfall  $(n, n)$  bewiesen.

Ein zentrales Hilfsmittel bei dieser Untersuchung ist die asymptotische Integration [7]- im Gegensatz zu Eastham [17] gleichmäßig in  $z$ .

**Theorem 1.2.3** *Es gelte*

$$Y'(x, z) = (\Lambda(x, z) + R(x, z))Y(x, z) \quad (x \in [a, \infty)), \quad (1.2.6)$$

*wobei  $R, \Lambda$   $m \times m$ -Matrizen seien und  $\Lambda(x, z)$  sei diagonal, d.h.  $\Lambda_{ij}(x, z) = \delta_{ij} \lambda_i(x, z)$ . Ferner sei  $z \in K_\delta(\lambda) = \{z \in \mathbb{C}^+ \mid |z - \lambda| \leq \delta\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , und es gelte:*

- (a)  $\Lambda(x, z), R(x, z)$  sind stetige Funktionen bezüglich  $z$  für ein festes  $x$  und es gelte

$$\|\Lambda(x, z)\| \leq a(x) \quad \text{und} \quad \|R(x, z)\| \leq \rho(x)$$

*für ein  $a \in \mathcal{L}_{loc}^1([a, \infty))$  und  $\rho \in \mathcal{L}^1([a, \infty))$ .*

- (b) *(Gleichmäßige Dichotomiebedingung)*  
Für alle  $x \in [a, \infty)$  und alle  $z \in K$  hat

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(x, z) - \lambda_j(x, z)) \quad (i \neq j)$$

*modulo  $\mathcal{L}^1$ -Terme ein konstantes Vorzeichen.*

Dann hat das System (1.2.6) Lösungen der Form

$$Y_k(x, z) = (e_k + r_k(x, z)) \exp \left( \int_a^x \lambda_k(t, z) dt \right) \quad (k = 1, \dots, m).$$

Hier ist  $e_k$  der  $k$ -te Einheitsvektor, und der Restterm  $r_k$  ist in  $(x, z)$  stetig (jeweils für festes  $x$  bzw.  $z$ ). Ferner konvergiert der Restterm  $r_k$  gleichmäßig in  $z \in K$  für  $x \rightarrow \infty$  gegen Null.

Mit Methoden aus der Streutheorie (siehe Theorem XI.9 in [34]) und der Tatsache, dass eine zusätzliche Randbedingung in  $x = a$  eine Störung der Resolventen vom endlichen Range ist, zeigt man, dass die absolutstetigen Anteile von  $H_{(0,\infty)}$  und  $H_{(0,a)} \oplus H_{(a,\infty)}$  unitär äquivalent sind, wobei  $H_{(0,\infty)}$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_0$  in  $\mathcal{L}^2(0, \infty) \otimes \mathbb{C}^2$  und  $H_{(0,a)} \oplus H_{(a,\infty)}$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_0$  in  $\mathcal{L}^2(0, a) \otimes \mathbb{C}^2 \oplus \mathcal{L}^2(a, \infty) \otimes \mathbb{C}^2$  mit einer zusätzlichen Dirichlet-Randbedingung in  $x = a$  ist. Ferner ist  $\sigma_{\text{ac}}(H_{(0,a)}) = \emptyset$ . Also sind die absolutstetigen Anteile von  $H_{(0,\infty)}$  und  $H_{(a,\infty)}$  unitär äquivalent. Dies wird im Folgenden häufiger benutzt. C. Remling hat auch den Einfluß des linken Randpunktes auf  $\sigma_{\text{ac}}$  untersucht [35].

### 1.3 Operator mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt wird der konstante Matrixoperator

$$\tau = \begin{pmatrix} p & -\frac{d^2}{dx^2} + q \\ -\frac{d^2}{dx^2} + q & r \end{pmatrix}$$

betrachtet, wobei  $p, q, r$  konstant seien. Der Definitionsbereich des zu  $\tau$  gehörenden maximalen Operators  $T$  in  $\mathcal{L}^2(0, \infty) \otimes \mathbb{C}^2$  ist

$$D(T) = \{(f_1, f_2) \mid f_i \in \mathcal{L}^2(0, \infty), f_i, f_i' \text{ sind lokal absolutstetig und } f_i'' \in \mathcal{L}^2(0, \infty)\}.$$

Mit  $H_0$  wird der selbstadjungierten Operator mit Neumann-Randbedingungen bezeichnet, dessen Definitionsbereich

$$D(H_0) = \{(f_1, f_2) \in D(T) \mid f_i'(0) = 0, i = 1, 2\}$$

ist. Es ist bekannt, dass die Cosinus Transformation [15]

$$y \mapsto (Cy)(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty y(x) \cos(\lambda x) dx$$

$\mathcal{L}^2(0, \infty)$  auf  $\mathcal{L}^2((0, \infty), d\lambda)$  unitär abbildet, und dass  $B = -\frac{d^2}{dx^2}$  mit Neumann-Randbedingung  $y'(0) = 0$  im Hilbertraum  $\mathcal{L}^2(0, \infty)$  unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator  $F = CBC^*$  ist, wobei  $F$  Multiplikation mit  $\lambda^2$  im Hilbertraum  $\mathcal{L}^2((0, \infty), d\lambda)$  mit

$$D(F) = \{f \in \mathcal{L}^2(0, \infty) \mid \lambda^2 f(\lambda) \in \mathcal{L}^2(0, \infty)\}$$

ist. Folglich ist  $H_0$  unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} H_0 \begin{pmatrix} C^* & 0 \\ 0 & C^* \end{pmatrix} =: A,$$

wobei  $A$  der Multiplikationsoperator mit

$$\begin{pmatrix} p & x^2 + q \\ x^2 + q & r \end{pmatrix}$$

im Hilbertraum  $\mathcal{L}^2(0, \infty) \otimes \mathbb{C}^2$  ist mit dem Definitionsbereich

$$D(A) = \left\{ (f_1, f_2) \in \mathcal{L}^2(0, \infty) \otimes \mathbb{C}^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^2(0, \infty) \otimes \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Somit ist das Spektrum von  $H_0$  rein absolutstetig und

$$\sigma(H_0) = \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A \text{ ist nicht bijektiv}\} = \mathbb{C} \setminus \rho(A),$$

wobei

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A)^{-1} \in B(\mathcal{L}_2(0, \infty) \otimes \mathbb{C}^2)\}$$

ist.

**Lemma 1.3.1** *Der Operator  $A$  hat rein absolutstetiges Spektrum und*

$$\sigma(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda = \frac{p+r}{2} \pm \sqrt{(q+x^2)^2 + \left(\frac{p-r}{2}\right)^2}, x \in [0, \infty) \right\}.$$

**Beweis.** Offensichtlich genügt es zu zeigen, dass

$$\sigma(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \left\{ x \in [0, \infty) \mid \left| \det \begin{pmatrix} \lambda - p & -(x^2 + q) \\ -(x^2 + q) & \lambda - r \end{pmatrix} \right| < \varepsilon \right\} \text{ ist keine Nullmenge } \forall \varepsilon > 0 \right\}$$

Liegt  $\lambda$  nicht in der rechten Seite, so existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass

$$\left\{ x \in [0, \infty) \mid \left| \det \begin{pmatrix} \lambda - p & -(x^2 + q) \\ -(x^2 + q) & \lambda - r \end{pmatrix} \right| < \varepsilon \right\}$$

eine Nullmenge ist. Also gilt

$$\left| \det \begin{pmatrix} \lambda - p & -(x^2 + q) \\ -(x^2 + q) & \lambda - r \end{pmatrix} \right| \geq \varepsilon$$

für fast alle  $x \in [0, \infty)$ . Folglich ist  $\lambda I - A$  invertierbar und  $(\lambda I - A)^{-1}$  ist der maximale Operator der Multiplikation mit einer Matrix, die fast überall mit

$$\left( \lambda I - \begin{pmatrix} p & (x^2 + q) \\ (x^2 + q) & r \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

übereinstimmt. Wegen

$$\left| \det \begin{pmatrix} \lambda - p & -(x^2 + q) \\ -(x^2 + q) & \lambda - r \end{pmatrix} \right|^{-1} \leq \varepsilon^{-1}$$

für fast alle  $x \in [0, \infty)$  ist

$$R(\lambda I - A) = D((\lambda I - A)^{-1}) = \mathcal{L}^2(0, \infty) \otimes \mathbb{C}^2.$$

Folglich ist  $\lambda \in \rho(A)$ .

Ist umgekehrt  $\lambda \in \rho(A)$ , so ist  $R(\lambda, A)$  der maximale Operator der Multiplikation mit einer Matrix, die fast überall mit

$$\left( \lambda I - \begin{pmatrix} p & x^2 + q \\ x^2 + q & r \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

übereinstimmt. Da  $R(\lambda, A)$  ein beschränkter Operator ist, muß es ein  $\varepsilon > 0$  geben derart, dass für fast alle  $x$

$$\left| \det \begin{pmatrix} \lambda - p & -(x^2 + q) \\ -(x^2 + q) & \lambda - r \end{pmatrix} \right| \geq \varepsilon$$

ist. Deshalb ist

$$\left\{ x \in [0, \infty) \mid \left| \det \begin{pmatrix} \lambda - p & -(x^2 + q) \\ -(x^2 + q) & \lambda - r \end{pmatrix} \right| < \varepsilon \right\}$$

eine Nullmenge, so dass  $\lambda$  nicht in der rechten Seite der zu beweisenden Gleichung liegt.

**Lemma 1.3.2** *Sei  $m \leq 2$  und*

$S_m$

$$\begin{aligned} &= \{E \in \sigma(A) \setminus \left\{ \frac{p+r}{2} + \left| \frac{p-r}{2} \right| \mid m = \#\{x \geq 0 \mid E = \lambda_1(x) = \frac{p+r}{2} + \sqrt{(q+x^2)^2 + \left(\frac{p-r}{2}\right)^2} \}\right\} \\ &\cup \{E \in \sigma(A) \setminus \left\{ \frac{p+r}{2} - \left| \frac{p-r}{2} \right| \mid m = \#\{x \geq 0 \mid E = \lambda_2(x) = \frac{p+r}{2} - \sqrt{(q+x^2)^2 + \left(\frac{p-r}{2}\right)^2} \}\right\}. \end{aligned}$$

*Dann ist  $A\chi_{S_m}(A)$  unitär äquivalent zur orthogonalen Summe von  $m$  Kopien des Multiplikationsoperator mit  $\lambda$  im Raum  $\mathcal{L}^2(S_m, d\lambda)$ .*

Dieses Lemma besagt, dass  $S_m$  der Teil des Spektrums ist, in welchem das Spektrum von  $A$  genau die Vielfachheit  $m$  hat.  $S_m$  ist der Bereich der Werte von  $\lambda_1(x)$  und  $\lambda_2(x)$ , die  $m$ -fach angenommen werden.

**Beweis.** Da für alle  $x \geq 0$

$$\begin{pmatrix} p & x^2 + q \\ x^2 + q & r \end{pmatrix}$$

eine selbstadjungierte Matrix ist, gibt es für alle  $x \geq 0$  eine unitäre Matrix  $T(x)$  derart, dass

$$T(x)^* \begin{pmatrix} p & x^2 + q \\ x^2 + q & r \end{pmatrix} T(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix}$$

ist. Folglich ist  $A$  unitär äquivalent zu  $M_{\lambda_1(x)} \oplus M_{\lambda_2(x)}$ , wobei  $M_{\lambda_i(x)}$ ,  $i = 1, 2$  der Multiplikationsoperator mit  $\lambda_i(x)$  im Raum  $\mathcal{L}^2((0, \infty), dx)$  ist.

Sei nun  $0 = a_0 < a_1 = \sqrt{|q|} < a_2 = \infty$ . Dann sind  $\lambda_1(x)$  und  $\lambda_2(x)$  streng monoton auf den Intervallen  $a_{i-1} < x < a_i$ ,  $i = 1, 2$ . Ferner reduzieren die Räume  $\mathcal{L}^2((a_{i-1}, a_i), dx)$  die Operatoren  $M_{\lambda_1(x)}$  und  $M_{\lambda_2(x)}$ . Nun können wir wegen der strengen Monotonie die Transformation der unabhängigen Variablen benutzen um zu sehen, dass

$$M_{\lambda_1(x)}|_{\mathcal{L}^2((a_{i-1}, a_i), dx)} \quad \text{und} \quad M_{\lambda_2(x)}|_{\mathcal{L}^2((a_{i-1}, a_i), dx)}$$

unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator  $M_\lambda$  im Raum  $\mathcal{L}^2(I_i^1, d\lambda)$  bzw. im Raum  $\mathcal{L}^2(I_i^2, d\lambda)$  sind, wobei

$$I_i^1 := \{\lambda_1(x) \mid a_{i-1} < x < a_i\} \quad \text{und} \quad I_i^2 := \{\lambda_2(x) \mid a_{i-1} < x < a_i\}$$

sind. Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $A$  unitär äquivalent zu

$$M_\lambda|_{\mathcal{L}^2(I_1^1, d\lambda)} \oplus M_\lambda|_{\mathcal{L}^2(I_2^1, d\lambda)} \oplus M_\lambda|_{\mathcal{L}^2(I_1^2, d\lambda)} \oplus M_\lambda|_{\mathcal{L}^2(I_2^2, d\lambda)}$$

ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

**Theorem 1.3.1** *Für jede selbstadjungierte Realisierung  $H_\alpha$  von  $\tau$  ist das Spektrum rein absolutstetig mit Ausnahme von endlich vielen Eigenwerten. Bei Neumann und Dirichlet-Randbedingungen hat die zugehörige selbstadjungierte Realisierung keine Eigenwerte. Das absolutstetige Spektrum liegt symmetrisch um  $\frac{p+r}{2}$  und im symmetrischen Fall  $0 \leq p = -r$  gilt*

$$\begin{aligned} q \geq 0 : \sigma_{ac}(H) &= (-\infty, -(p^2 + q^2)^{1/2}] \cup [(p^2 + q^2)^{1/2}, \infty) \quad \text{Vielfachheit 1} \\ q < 0 : \sigma_{ac}(H) &= (-\infty, -(p^2 + q^2)^{1/2}) \cup ((p^2 + q^2)^{1/2}, \infty) \quad \text{Vielfachheit 1} \\ &\quad \cup [-(p^2 + q^2)^{1/2}, -p] \cup [p, (p^2 + q^2)^{1/2}] \quad \text{Vielfachheit 2} \end{aligned}$$

**Beweis.** Für jede selbstadjungierte Realisierung ist  $\sigma_{ac}(H_\alpha) = \sigma_{ac}(H_0)$ , da eine Änderung der Randbedingung eine Störung der Resolvente vom endlichen Range ist. Für Dirichlet Randbedingungen kann man mithilfe der Sinus-Transformation zeigen, dass  $H_D$  unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator  $A$  ist. Die Aussagen über das singulärstetige Spektrum und die Eigenwerte werden wie in [9] bewiesen, siehe auch Theorem 1.4.1.

## 1.4 Der fast konstante Fall

In diesem Abschnitt besitzen  $p$ ,  $q$  und  $r$  eine Zerlegung der folgenden Gestalt:

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_L + f_c, \text{ wobei } f_0 \text{ eine Konstante ist und}$$

$$f_1(x), f_2(x), f_1'(x) \rightarrow 0, f_1''(x), f_1', f_2', f_L, \tilde{f}_c \in \mathcal{L}^1 \text{ mit } \tilde{f}_c(x) = \int_{-\infty}^x f_c(t) dt. \quad (1.4.1)$$

Eine solche Darstellung wird auch in [9] verwandt. Sei  $H$  eine beliebige selbst-adjungierte Erweiterung des Operators  $T_0$  mit fast konstanten Koeffizienten, so sieht man, dass  $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$  ist und dass das absolutstetige Spektrum von  $H$  das des konstanten Operators  $H_0$  mit den Koeffizienten  $p = p_0$ ,  $r = r_0$ ,  $q = q_0$  ist.

**Theorem 1.4.1** *Das singulärstetige Spektrum von  $H$  ist leer und der absolutstetige Teil des Operators  $H$  ist unitär äquivalent zu dem konstanten Operator  $H_0$  mit den Koeffizienten  $p = p_0$ ,  $r = r_0$  und  $q = q_0$ .*

**Beweis.** Da es sich um den fast konstanten Fall handelt, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $p_0 + r_0 = 0$  ist, da das absolutstetige Spektrum symmetrisch um  $\frac{p_0 + r_0}{2}$  liegt.

a) Zuerst werden die bedingt integrierbaren Terme in (1.2.2) durch eine  $(1 + Q)$  Transformation eliminiert. Basierend auf der Zerlegung der Koeffizienten in (1.4.1) läßt sich das System (1.2.2) in der Form

$$u' = (A_0 + A_1 + A_2 + A_L + A_c)u$$

schreiben. Die Substitution  $u_1 = (1 + Q)^{-1}u = (1 - Q)u$  ( $Q^2 = 0$ ), wobei  $Q = \int_{-\infty}^x A_c(t) dt$  ist, transformiert das obige System in

$$u_1' = (A_0 + A_1 + A_2 + R)u_1,$$

wobei  $R = A_L + A_0Q - QA_0 - QA_0Q$  ist. Hier wurde benutzt, dass

$$QA_1 = QA_2 = QA_L = A_cQ = A_LQ = A_2Q = A_1Q = 0$$

ist. Es gilt:

$$A_0Q = \begin{pmatrix} \tilde{q}_c & \tilde{r}_c & 0 & 0 \\ \tilde{p}_c & \tilde{q}_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad QA_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{q}_c & \tilde{p}_c \\ 0 & 0 & \tilde{r}_c & \tilde{q}_c \end{pmatrix}$$



$$QA_0Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\tilde{p}_c\tilde{q}_c & \tilde{p}_c\tilde{r}_c + \tilde{q}_c^2 & 0 & 0 \\ \tilde{p}_c\tilde{r}_c + \tilde{q}_c^2 & 2\tilde{r}_c\tilde{q}_c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ist  $R \in \mathcal{L}^1$  und im fast konstanten und beschränkten Fall nicht relevant für die Asymptotik der Lösungen von (1.2.2).

b) Sei

$$z \in K(\lambda_0) = K_\delta(\lambda_0) = \{z \in \mathbb{C}_+ \mid |z - \lambda_0| \leq \delta\},$$

wobei  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  beliebig vorgegeben ist mit

$$\lambda_0^2 \neq p_0^2, p_0^2 + q_0^2.$$

Hier beinhaltet  $\mathbb{C}_+$  die reelle Achse. Die Eigenwerte des differenzierbaren Anteils  $A_s(x, z) := (A_0 + A_1 + A_2)(x, z)$  sind gegeben durch [16]

$$\begin{aligned} \mu_1(x, z) &= [q_s + ((p_s - z)(r_s - z))^{1/2}]^{1/2} \\ \mu_2(x, z) &= -\mu_1(x, z) \\ \mu_3(x, z) &= [q_s - ((p_s - z)(r_s - z))^{1/2}]^{1/2} \\ \mu_4(x, z) &= -\mu_3(x, z) \end{aligned}$$

Um eine Diagonalisierung für genügend große  $x > a$  durchführen zu können, muß man voraussetzen, dass es ein  $a > 0$  gibt derart, dass für alle  $x > a$  die  $\mu_i(x, z)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) paarweise verschieden sind. Wegen  $p_s(x) \rightarrow p_0$ ,  $q_s(x) \rightarrow q_0$ ,  $r_s(x) \rightarrow r_0$  für  $x \rightarrow \infty$  konvergieren die Eigenwerte gegen die von  $A_0$ . Folglich gibt es ein genügend kleines  $\delta > 0$  und ein genügend großes  $a > 0$  derart, dass für alle  $x > a$ ,  $z \in K_\delta(\lambda_0)$  alle Eigenwerte verschieden und analytisch um  $\lambda_0$  sind, da  $\lambda_0^2 \neq p_0^2, p_0^2 + q_0^2$  ist.

Im Folgenden wird angenommen, dass  $x > a$  und  $\delta > 0$  genügend klein gewählt ist.

c) Hier werden die gleichmäßigen Dichotomiebedingungen überprüft.

Seien  $\mu_i^0(z)$  die vier verschiedenen holomorphen Zweige von

$$\mu^0(z) = [q_0 + (p_0 r_0 - z(r_0 + p_0) + z^2)^{1/2}]^{1/2}.$$

Da  $\mu_1(x, z)$  und  $\mu_3(x, z)$  stetig bezüglich  $x$  sind, genügt es zu zeigen, dass stets  $\operatorname{Re} \mu_i^0(z)$ ,  $\operatorname{Re}(\mu_i^0(z) - \mu_j^0(z))$ ,  $i \neq j$ , für alle  $z \in K_\delta(\lambda_0) \setminus \mathbb{R}$  ein konstantes Vorzeichen ungleich Null haben.

Da  $\mu^0(z)$  holomorph um  $\lambda \in K_\delta(\lambda_0) \cap \mathbb{R}$  ist, gilt für alle  $\lambda + i\varepsilon \in K_\delta(\lambda_0)$

$$\begin{aligned} \mu_1^0(\lambda + i\varepsilon) &= \mu_1^0(\lambda) + \frac{(\lambda - \frac{r_0 + p_0}{2})\varepsilon i}{2\mu_1^0(\lambda)(p_0 r_0 - \lambda(r_0 + p_0) + \lambda^2)^{1/2}} + o(\varepsilon) \\ \mu_3^0(\lambda + i\varepsilon) &= \mu_3^0(\lambda) - \frac{(\lambda - \frac{r_0 + p_0}{2})\varepsilon i}{2\mu_3^0(\lambda)(p_0 r_0 - \lambda(r_0 + p_0) + \lambda^2)^{1/2}} + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

wobei  $\sqrt{z} := \sqrt{r} \exp i\varphi/2$  mit  $z = r \exp i\varphi$ ,  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$ , ist. Es wird im Folgenden zusätzlich angenommen, dass  $\lambda_0 \neq \frac{r_0+p_0}{2}$  ist. Folglich hat  $\operatorname{Re} \mu_i^0(\lambda_0 + i\varepsilon)$  ein konstantes Vorzeichen für alle  $0 < \varepsilon < \delta$  und ist von Null verschieden. Aus Stetigkeitsgründen folgt, dass  $\operatorname{Re}(\mu_i^0(z))$  für alle  $z \in K_\delta(\lambda_0)$  ein konstantes Vorzeichen hat. Nun werden folgende Fälle unterschieden:

- (a) Fall:  $p_0 r_0 - \lambda_0(r_0 + p_0) + \lambda_0^2 < 0$

Es gilt  $\mu_1^0(\lambda_0) = \mu_3^0(\lambda_0)$ . Da die  $\mu_i^0(\lambda_0)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) paarweise verschieden sind, muß  $\operatorname{Re} \mu_1^0(\lambda_0) \neq 0$  sein. Folglich ist  $\operatorname{Re}(\mu_1^0(\lambda_0) + \mu_3^0(\lambda_0)) = 2 \operatorname{Re} \mu_1^0(\lambda_0) \neq 0$ . Wegen der Reihenentwicklung von oben hat also  $\operatorname{Re}(\mu_1^0(\lambda_0 + i\varepsilon) + \mu_3^0(\lambda_0 + i\varepsilon))$  für genügend kleine  $\varepsilon \geq 0$  ein konstantes Vorzeichen und ist ungleich Null.

Da

$$\frac{1}{\mu_1^0(\lambda_0)} + \frac{1}{\mu_3^0(\lambda_0)} = \frac{2 \operatorname{Re} \mu_1^0(\lambda_0)}{|\mu_1^0(\lambda_0)|^2} \neq 0$$

ist, und da  $\operatorname{Re}(\mu_1^0(\lambda_0) - \mu_3^0(\lambda_0)) = 0$  ist, hat für genügend kleine  $\varepsilon > 0$   $\operatorname{Re}(\mu_1^0(\lambda_0 + i\varepsilon) - \mu_3^0(\lambda_0 + i\varepsilon))$  ein konstantes Vorzeichen und ist von Null verschieden.

Aus Stetigkeitsgründen folgt nun, dass die gleichmäßigen Dichotomiebedingungen erfüllt sind.

- (b) Fall:  $p_0 r_0 - \lambda_0(r_0 + p_0) + \lambda_0^2 > 0$

Ist  $\operatorname{Re}(\mu_1^0(\lambda_0) + \mu_3^0(\lambda_0)) = 0$ , so müssen  $\mu_1^0(\lambda_0)$  und  $\mu_3^0(\lambda_0)$  rein imaginär sein. Also ist

$$\left( \frac{i}{\mu_1^0(\lambda_0)} - \frac{i}{\mu_3^0(\lambda_0)} \right)$$

reell und von Null verschieden.

Ist  $\operatorname{Re}(\mu_1^0(\lambda_0) - \mu_3^0(\lambda_0)) = 0$ , so müssen wieder  $\mu_1^0(\lambda_0)$  und  $\mu_3^0(\lambda_0)$  rein imaginär sein und folglich ist

$$\left( \frac{i}{\mu_1^0(\lambda_0)} + \frac{i}{\mu_3^0(\lambda_0)} \right)$$

rein reell und von Null verschieden.

Aus Stetigkeitsgründen folgen nun die gleichmäßigen Dichotomiebedingungen.

- d) Die Eigenvektoren  $u_j$  von  $A_s$  sind [16]

$$u_j = (r_z, r_z^{-1}(\mu_j^2 - q_s), r_z^{-1}\mu_j(\mu_j^2 - q_s), r_z\mu_j)^t,$$

wobei  $r_z := (r_s - z)^{1/2}$  ist. Die diagonalisierende Matrix  $S_0$  von  $A_s$  ist also gegeben durch

$$S_0 = \begin{pmatrix} r_z & r_z & r_z & r_z \\ p_z & p_z & -p_z & -p_z \\ \mu_1 p_z & -\mu_1 p_z & -\mu_3 p_z & \mu_3 p_z \\ \mu_1 r_z & -\mu_1 r_z & \mu_3 r_z & -\mu_3 r_z \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} r_z &= (r_s - z)^{1/2} \\ p_z &= (p_s - z)^{1/2} \end{aligned}.$$

Also ist  $S_0^{-1} A_s S_0 = \text{diag}(\mu_1, -\mu_1, \mu_3, -\mu_3)$ , wobei

$$S_0^{-1} = \begin{pmatrix} r_z^{-1} & p_z^{-1} & (\mu_1 p_z)^{-1} & (\mu_1 r_z)^{-1} \\ r_z^{-1} & p_z^{-1} & -(\mu_1 p_z)^{-1} & -(\mu_1 r_z)^{-1} \\ r_z^{-1} & -p_z^{-1} & -(\mu_3 p_z)^{-1} & (\mu_3 r_z)^{-1} \\ r_z^{-1} & -p_z^{-1} & (\mu_3 p_z)^{-1} & -(\mu_3 r_z)^{-1} \end{pmatrix}$$

ist. Wir suchen jetzt Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_4$  mit

$$(S^{-1} S')_{ii} = 0, \quad S := S_0 \text{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_4).$$

Dies erweist sich als nützlich, wenn eine zweite Diagonalisierung durchgeführt werden soll, da dann eine erneute Überprüfung der gleichmäßigen Dichotomiebedingungen nicht nötig ist. Wegen

$$\begin{aligned} S^{-1} S' &= \text{diag}(\varphi_1^{-1}, \dots, \varphi_4^{-1}) S_0^{-1} S_0' \text{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_4) \\ &+ \frac{d}{dx} \text{diag}(\ln \varphi_1, \dots, \ln \varphi_4) \end{aligned}$$

muß

$$(S_0^{-1} S_0')_{ii} = -(\ln \varphi_i)'$$

sein. Dies ergibt wegen

$$(S_0^{-1} S_0')_{ii} = \frac{1}{2} (\mu_i r_z p_z)' / (\mu_i r_z p_z)$$

folgende Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} (\ln \varphi_{1/2}) &= \frac{d}{dx} \ln(\mu_1 r_z p_z)^{1/2} \\ -\frac{d}{dx} (\ln \varphi_{3/4}) &= \frac{d}{dx} \ln(\mu_3 r_z p_z)^{1/2} \end{aligned}$$

Also erfüllen

$$\varphi_{1/2} = [\mu_1 r_z p_z]^{-1/2}, \quad \varphi_{3/4} = [\mu_3 r_z p_z]^{-1/2}$$

die Differentialgleichungen. Folglich hat  $S^{-1}S'$  die folgende Gestalt:

$$S^{-1}S' = \begin{pmatrix} 0 & a & c & d \\ a & 0 & d & c \\ c & -d & 0 & b \\ -d & c & b & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a &= -\frac{1}{2}(\ln \mu_1)', \\ b &= -\frac{1}{2}(\ln \mu_3)', \\ c &= \frac{1}{4}\varphi_1^{-1}(1 + \frac{\mu_3}{\mu_1})(\ln \frac{r_z}{p_z})'\varphi_3, \\ d &= \frac{1}{4}\varphi_1^{-1}(1 - \frac{\mu_3}{\mu_1})(\ln \frac{r_z}{p_z})'\varphi_3. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Die Substitution  $u_1 = Su_2$  überführt das System  $u_1' = (A_s + R)u_1$  in

$$u_2' = (\Lambda - S^{-1}S' + S^{-1}RS)u_2, \quad \text{wobei } \Lambda = \text{diag}(\mu_1, -\mu_1, \mu_3, -\mu_3)$$

ist. Wegen

$$(S^{-1}E_{kl}S)_{ij} = \varphi_i^{-1}(S_0^{-1})_{ik}(S_0)_{lj}\varphi_j$$

ist  $S^{-1}RS \in \mathcal{L}^1(a, \infty)$ , wenn folgende Terme in  $\mathcal{L}^1(a, \infty)$  liegen:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= p_L \mu_i^{-1/2} \mu_j^{-1/2} \left( \frac{r_s - z}{p_s - z} \right)^{1/2}, \quad r_L \mu_i^{-1/2} \mu_j^{-1/2} \left( \frac{p_s - z}{r_s - z} \right)^{1/2}, \quad q_L \mu_i^{-1/2} \mu_j^{-1/2} \\ R_{ij} &= \tilde{p}_c \left( \frac{r_s - z}{p_s - z} \right)^{1/2} \mu_i^{\pm 1/2} \mu_j^{\mp 1/2}, \quad \tilde{r}_c \left( \frac{p_s - z}{r_s - z} \right)^{1/2} \mu_i^{\pm 1/2} \mu_j^{\mp 1/2}, \quad \tilde{q}_c \mu_i^{\pm 1/2} \mu_j^{\mp 1/2}, \\ R_{ij} &= (\tilde{p}_c \tilde{r}_c + \tilde{q}_c^2) \mu_i^{-1/2} \mu_j^{-1/2}, \quad \tilde{p}_c \tilde{q}_c \mu_i^{-1/2} \mu_j^{-1/2} \left( \frac{r_s - z}{p_s - z} \right)^{1/2}, \quad \tilde{r}_c \tilde{q}_c \mu_i^{-1/2} \mu_j^{-1/2} \left( \frac{p_s - z}{r_s - z} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Da  $\tilde{S} := S^{-1}S'$  in der Regel nicht in  $\mathcal{L}^1$  liegt, wird  $\Lambda - \tilde{S}$  modulo  $\mathcal{L}^1$  Terme erneut diagonalisiert. Dieses Verfahren ist in [17] und in [9] im Detail beschrieben. Es sei  $\tilde{S} = \tilde{S}_s + \tilde{S}_1$  mit  $\tilde{S}_1 \in \mathcal{L}^1$  und es seien  $\rho_i \in \mathcal{L}^1(a, \infty)$ ,  $i = 1, 2$  und es gelte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_z (\mu_i(x, z) - \mu_j(x, z))^{-1} \|\tilde{S}_s(x, z)\| = 0, \quad (1.4.4)$$

$$\left\| \frac{d}{dx} [(\mu_i(x, z) - \mu_j(x, z))^{-1} \tilde{S}_s(x, z)] \right\| \leq \rho_1(x), \quad (1.4.5)$$

$$|\mu_i(x, z) - \mu_j(x, z)|^{-1} \|\tilde{S}_s(x, z)\|^2 \leq \rho_2(x), \quad (1.4.6)$$

$i \neq j$ . Dann transformiert  $u_2 = (1 + B)u_3$  das System

$$u_2' = (\Lambda - \tilde{S} + S^{-1}RS)u_2$$

in

$$u_3' = (\Lambda(x, z) + \tilde{R}(x, z))u_3,$$

wobei  $\|\tilde{R}(x, z)\| \leq \rho_3(x) \in \mathcal{L}^1(a, \infty)$  und

$$B = (B_{ij}) \quad \text{mit } B_{ii} = 0, B_{ij} = -\frac{(\tilde{S}_s)_{ij}}{\mu_i - \mu_j}$$

ist. Da nach Voraussetzung  $q_s, p_s, r_s$  beschränkt sind, erlauben die Voraussetzungen (1.4.1) eine zweite Diagonalisierung. Da hier  $\tilde{R} \in \mathcal{L}^1$  ist, folgt aus dem Satz von Levinson, dass das System

$$u_3'(x, z) = (\Lambda(x, z) + \tilde{R}(x, z))u_3(x, z)$$

Lösungen der folgenden Form

$$v_k(x, z) = (e_k + r_k(x, z)) \exp \int_a^x \mu_k(t, z) dt$$

hat, wobei  $e_k$  der  $k$ -te Einheitsvektor ist und  $r_k(x, z)$  bezüglich  $x$  stetig und bezüglich  $z$  analytisch ist. Ferner strebt  $r_k(x, z)$  gleichmäßig bezüglich  $z$  gegen Null für  $x \rightarrow \infty$ . Also hat  $u'(x, z) = (A_s + A_L + A_c)u(x, z)$  folgende Lösungen

$$Y_k(x, z) = (1 + Q)S(1 + B)(e_k + r_k(x, z)) \exp \int_a^x \mu_k(t, z) dt.$$

Da hier  $S$  beschränkt ist und sowohl  $B(x, z)$  als auch  $Q(x)$  gleichmäßig in  $z$  gegen Null streben, hat das ursprüngliche System Lösungen der folgenden Gestalt

$$Y_k(x, z) = S_0 \text{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_4)(e_k + \tilde{r}_k(x, z)) \exp \int_a^x \mu_k(t, z) dt, \quad (1.4.7)$$

wobei  $\tilde{r}_k(x, z)$  dieselben obigen Eigenschaften wie  $r_k(x, z)$  besitzt. Folglich ist  $Y_k(\cdot, z) \in \mathcal{L}_{A_1}^2(a, \infty)$  genau dann, wenn

$$\int_a^\infty \left[ \left( \left| \frac{r_z}{p_z} \right| + \left| \frac{p_z}{r_z} \right| \right) |\mu_k|^{-1} \exp 2 \text{Re} \int_a^x \mu_k(t, z) dt \right] dx < \infty \quad (1.4.8)$$

ist. Wegen  $p_s \rightarrow p_0, r_s \rightarrow r_0, q_s \rightarrow q_0$  ist  $Y_k(\cdot, z) \in \mathcal{L}_{A_1}^2(a, \infty)$  genau dann, wenn  $\text{Re} \mu_k^0(z) < 0$  ist. Da  $\text{Re} \mu_k^0(z) = 0$  nur für reelle  $z$  sein kann, ist der Defektindex (2,2).

e) Seien

$$Y_i(x, z) = \left[ \begin{pmatrix} r_z \\ r_z^{-1}(\mu_i^2 - q_s) \\ r_z^{-1}\mu_i(\mu_i^2 - q_s) \\ r_z\mu_i \end{pmatrix} \varphi_i + r^i(x, z) \right] \exp \int_a^x \mu_i(t, z) dt \quad (i = 1, 3)$$

die beiden  $\mathcal{L}_{A_1}^2(a, \infty)$ -Lösungen für  $\text{Im} z > 0$ . Die  $M$ -Matrix des Hamiltonischen Systems (1.2.2) auf  $[a, \infty)$  mit Dirichlet Randbedingung im Punkte  $a$  genügt der Gleichung

$$(Y_1, Y_3)(a, z)L = \begin{pmatrix} 1 \\ M \end{pmatrix},$$

wobei  $L$  eine noch zu bestimmende  $2 \times 2$  Matrix ist. Folglich gilt

$$\begin{aligned} M(z) &= \left[ \begin{pmatrix} \varphi_1 r_z^{-1} \mu_1 (\mu_1^2 - q_s) & r_z^{-1} \mu_3 (\mu_3^2 - q_s) \varphi_3 \\ \varphi_1 r_z \mu_1 & r_z \mu_3 \varphi_3 \end{pmatrix} + R_1 \right] \\ &* \left[ \begin{pmatrix} r_z \varphi_1 & r_z \varphi_3 \\ r_z^{-1} (\mu_1^2 - q_s) \varphi_1 & r_z^{-1} (\mu_3^2 - q_s) \varphi_3 \end{pmatrix} + R_2 \right]^{-1} \\ &=: (A + R_1)(B + R_2)^{-1}, \end{aligned}$$

wobei

$$R_1 := \begin{pmatrix} r_3^1 & r_3^3 \\ r_4^1 & r_4^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R_2 := \begin{pmatrix} r_1^1 & r_1^3 \\ r_2^1 & r_2^3 \end{pmatrix}$$

ist. Im beschränkten und fast konstanten Fall konvergiert sowohl  $R_1(a, z)$  als auch  $R_2(a, z)$  gleichmäßig in  $z$  gegen Null für  $a \rightarrow \infty$ . Da  $A, B$  invertierbar für alle  $z \in K_\delta(\lambda_0)$  sind, gilt für alle  $z \in K_\delta(\lambda_0)$ , wenn  $\|R_2 B^{-1}\| < 1$  ist,

$$\begin{aligned} M(z) &= (A + R_1)B^{-1}(I + R_2 B^{-1})^{-1} \\ &= (A + R_1)B^{-1}\left(I + \sum_{k=1}^{\infty} (-R_2 B^{-1})^k\right) \\ &= (A + R_1)B^{-1}(I - (I + R_2 B^{-1})R_2 B^{-1}) \\ &=: (A + R_1)B^{-1}(I - \tilde{R}_2) \\ &= AB^{-1}(I - \tilde{R}_2 + BA^{-1}R_1 B^{-1} - BA^{-1}R_1 B^{-1}\tilde{R}_2). \end{aligned}$$

Im beschränkten und fast konstanten Fall existiert  $M(z)$  für alle  $z \in K_\delta(\lambda_0)$  und es gilt für alle  $z \in K_\delta(\lambda_0)$

$$M(z) = AB^{-1}(I + M_1(a, z)), \quad (1.4.9)$$

wobei  $M_1(a, z)$  gleichmäßig in  $z$  für  $a \rightarrow \infty$  gegen Null strebt. Ferner ist

$$M_0(z) := AB^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{p_z^2}{\mu_3 + \mu_1} & \frac{\mu_3^2 - q_s}{\mu_3 - \mu_1} \\ \frac{\mu_3^2 - q_s}{\mu_3 - \mu_1} & \frac{r_z^2}{\mu_3 + \mu_1} \end{pmatrix}. \quad (1.4.10)$$

f) Hier sollen die Aussagen über das stetige Spektrum bewiesen werden. Im Folgenden sei  $\sqrt{z} := \sqrt{r} \exp i\varphi/2$ , wobei  $z = r \exp i\varphi$  mit  $r \neq 0$ ,  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$  ist.

1. Fall:  $\lambda_0 \in (\sqrt{p_0^2 + q_0^2}, \infty)$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mu_1(x, \lambda_0 + i\varepsilon) &= -\sqrt{q_s + \sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}} - \frac{\lambda_0 i\varepsilon}{2\sqrt{q_s + \sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}}\sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}} + o(\varepsilon) \\ \mu_3(x, \lambda_0 + i\varepsilon) &= i\sqrt{\sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2} - q_s} - \frac{\lambda_0 i\varepsilon}{2\sqrt{\sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2} - q_s}\sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}} + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Folglich hat  $Ly = \lambda_0 y$  eine  $\mathcal{L}_{A_1}^2(a, \infty)$  Lösung. Ferner ist  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} \left( \frac{p_s^2}{\mu_1 + \mu_3} \right) > 0$ . Also ist  $\operatorname{Rang}(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} M(\lambda_0 + i\varepsilon)) \geq 1$ . Daraus ergibt sich, dass  $\sigma_{\text{sc}}(H) \cap (\sqrt{p_0^2 + q_0^2}, \infty) = \emptyset$  ist, da sich die Eigenwerte in  $(\sqrt{p_0^2 + q_0^2}, \infty)$  nicht häufen. Ferner ist  $(\sqrt{p_0^2 + q_0^2}, \infty) \subset \sigma_{\text{ac}}(H)$  und die spektrale Vielfachheit in  $(\sqrt{p_0^2 + q_0^2}, \infty)$  ist 1.

2. Fall:  $\lambda_0 \in (|p_0|, \sqrt{p_0^2 + q_0^2})$ ,  $q < 0$

Es gilt:

$$\mu_1(x, \lambda_0 + i\varepsilon) = -\sqrt{q_s + \sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}} - \frac{\lambda_0 i\varepsilon}{2\sqrt{q_s + \sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}}\sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}} + o(\varepsilon)$$

$$\mu_3(x, \lambda_0 + i\varepsilon) = \sqrt{q_s - \sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}} - \frac{\lambda_0 i\varepsilon}{2\sqrt{q_s - \sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}}\sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}} + o(\varepsilon).$$

Da  $\det(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} M_0(\lambda_0 + i\varepsilon)) > 0$  ist, muß  $\operatorname{Im} M(\lambda_0) > 0$  sein. Also ist  $\sigma_{\text{sc}}(H) \cap (|p_0|, \sqrt{p_0^2 + q_0^2}) = \emptyset$  und  $(|p_0|, \sqrt{p_0^2 + q_0^2}) \subset \sigma_{\text{ac}}(H)$ . Ferner ist die Vielfachheit des absolutstetigen Spektrums in  $(|p_0|, \sqrt{p_0^2 + q_0^2})$  gleich 2.

3. Fall:  $\lambda_0 \in (-|p_0|, |p_0|)$

Es gilt:

$$\mu_1(x, \lambda_0 + i\varepsilon) = -\sqrt{q_s + \sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}} - \frac{\lambda_0 i\varepsilon}{2\sqrt{q_s + \sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}}\sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}} + o(\varepsilon)$$

$$\mu_3(x, \lambda_0 + i\varepsilon) = -\sqrt{q_s - \sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}} + \frac{\lambda_0 i\varepsilon}{2\sqrt{q_s - \sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}}\sqrt{\lambda_0^2 - p_s^2}} + o(\varepsilon).$$

Folglich hat  $Ly = \lambda_0 y$  zwei linear unabhängige  $\mathcal{L}_{A_1}^2(a, \infty)$  Lösungen. Also ist  $(-|p_0|, |p_0|) \cap \sigma_c(H) = \emptyset$ .

Die anderen Fälle werden analog behandelt.

## Der beschränkte Fall

In diesem Abschnitt soll das Theorem 1.4.1 für den beschränkten Fall verallgemeinert werden. Es seien also  $p = p_1 + p_2 + p_L + p_c$ ,  $q = q_1 + q_2 + q_L + q_c$  und  $r = r_1 + r_2 + r_L + r_c$  beschränkt und es gelte

$$p_1'', p_1'^2, r_1'', r_1'^2, q_1'', q_1'^2, p_2', q_2', r_2', \tilde{p}_c, \tilde{q}_c, \tilde{r}_c, p_L, q_L, r_L \in \mathcal{L}^1. \quad (1.4.11)$$

Es wird ferner ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass  $p_2, q_2, r_2 \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ . Da  $p_2', q_2', r_2'$  integrabel sind, konvergieren  $p_2, q_2, r_2$  gegen eine Konstante und diese Konstanten können wir dann zu  $p_1, q_1, r_1$  addieren. Ferner folgt aus  $p_1'', p_1'^2, r_1'', r_1'^2, q_1'', q_1'^2 \in \mathcal{L}^1$   $p_1', q_1', r_1' \rightarrow 0$ . Sei nun

$$\begin{aligned} c_- &= \underline{\lim} \frac{1}{2}(p_s + r_s)(x) - \left( \frac{1}{4}(p_s - r_s)^2 + q_s^2 \right)^{1/2} (x) \\ c_+ &= \overline{\lim} \frac{1}{2}(p_s + r_s)(x) + \left( \frac{1}{4}(p_s - r_s)^2 + q_s^2 \right)^{1/2} (x), \end{aligned}$$

wobei  $p_s = p_1 + p_2$ ,  $q_s = q_1 + q_2$  und  $r_s = r_1 + r_2$  ist. Mit denselben Methoden wie im fast konstanten Fall erhalten wir das folgende Theorem.

**Theorem 1.4.2** *Der Defektindex von  $T$  ist 2. Sei  $Z = (-\infty, c_-) \cup (c_+, \infty)$ . Dann gilt  $\sigma_{sc}(H) \cap Z = \emptyset$ ,  $Z \subset \sigma_{ac}(H)$  und die Vielfachheit des absolutstetigen Spektrums in  $Z$  ist 1. Ferner können sich mögliche Eigenwerte in  $Z$  nicht häufen.*

**Beweis.** Die Aussagen über das stetige Spektrum beweist man wie im Theorem 1.4.1. Sei  $z \in K_\delta(\lambda_0)$ ,  $\text{Im } z > 0$  und seien  $Y_1(\cdot, z)$ ,  $Y_3(\cdot, z)$  die quadratintegrierbaren Lösungen. Da nicht reelle  $z$ 's keine Eigenwerte sein können, ist die  $2 \times 2$  Matrix  $(\alpha_1, \alpha_2)(Y_1(a, z), Y_3(a, z))$  regulär. Aus dem Identitätssatz über holomorphe Funktionen folgt nun, dass sich die Eigenwerte nicht häufen können.



## 1.5 Operatoren mit kompakter Resolvente

Es ist wohlbekannt, dass der Schrödingeroperator  $\mathcal{D} = -\frac{d^2}{dx^2} + q$  für  $q(x) \rightarrow \infty$  eine kompakte Resolvente besitzt und somit ein diskretes Spektrum hat. Im folgenden Theorem soll diese Aussage benutzt werden, um zu zeigen, dass im Falle  $q(x) \rightarrow \infty$  jede selbstadjungierte Realisierung von  $T_0$  eine kompakte Resolvente besitzt und somit ein diskretes Spektrum hat, falls  $p, r = o(q)$  und  $D(\mathcal{D}) = D(-\frac{d^2}{dx^2}) \cap D(q)$  ist. Evans und Zettel [18] zeigten, dass  $D(\mathcal{D}) = D(-\frac{d^2}{dx^2}) \cap D(q)$  ist, falls

$$q(x) \geq -K, \quad \left| \frac{d}{dx} q(x) \right| \leq \alpha |q(x)|^{3/2} \quad \text{für ein } \alpha \in [0, 2).$$

Dies ist eine Wachstumsbedingung für  $q$  und ist erfüllt für Funktionen wie zum Beispiel  $\exp(x^k)$ ,  $\exp(\exp(x^k))$  und einfache Potenzen.

**Theorem 1.5.1** *Es gelte  $q(x) \rightarrow \infty$ . Sei  $c > 0$  und  $\mathcal{D}_a$  sei eine selbstadjungierte Realisierung von  $-\frac{d^2}{dx^2} + q$  im Hilbertraum  $\mathcal{L}^2(a, \infty)$  und es gelte  $D(\mathcal{D}_a) = D(-\frac{d^2}{dx^2}) \cap D(q)$  für alle  $a > c$ . Dann gilt:*

- (a) *Ist  $p, r = o(q)$ , so hat jede selbstadjungierte Realisierung von  $T_0$  eine kompakte Resolvente.*
- (b) *Es gelte  $D(q) \subset D(p) \cap D(r)$  und  $D(p) \supset D(q^{1/2})$  im Hilbertraum  $\mathcal{L}^2(a, \infty)$  für alle  $a > c$ . Ist  $r = o(q^2)$ , so besitzt jede selbstadjungierte Realisierung von  $T_0$  eine kompakte Resolvente.*
- (c) *Es gelte  $D(q) \subset D(p) \cap D(r)$  und  $D(r) \supset D(q^{1/2})$  im Hilbertraum  $\mathcal{L}^2(a, \infty)$  für alle  $a > c$ . Ist  $p = o(q^2)$ , so hat jede selbstadjungierte Realisierung von  $T_0$  eine kompakte Resolvente.*

**Beweis.** Da das wesentliche Spektrum durch  $H_{[a, \infty)}$  bestimmt ist, genügt es also zu zeigen, dass für genügend große  $a > c$ ,

$$\begin{pmatrix} p & \mathcal{D}_a \\ \mathcal{D}_a & r \end{pmatrix} \tag{1.5.1}$$

eine kompakte Resolvente besitzt. Da jede selbstadjungierte Realisierung von  $T_0$  dasselbe wesentliche Spektrum besitzt, muß folglich jede selbstadjungierte Realisierung von  $T_0$  ein diskretes Spektrum haben und somit eine kompakte

Resolvente besitzen.

Es gilt für alle  $(f_1, f_2) \in D(\mathcal{D}_a) \times D(\mathcal{D}_a)$ :

$$\begin{pmatrix} p & \mathcal{D}_a \\ \mathcal{D}_a & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}_a^{1/2} \\ \mathcal{D}_a^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{D}_a^{-1/2} r \mathcal{D}_a^{-1/2} \\ \mathcal{D}_a^{-1/2} p \mathcal{D}_a^{-1/2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_a^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_a^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Da mit  $\mathcal{D}_a$  auch  $\mathcal{D}_a^{1/2}$  eine kompakte Inverse besitzt, genügt es also zu zeigen, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathcal{D}_a^{-1/2} r \mathcal{D}_a^{-1/2} \\ \mathcal{D}_a^{-1/2} p \mathcal{D}_a^{-1/2} & 1 \end{pmatrix} \text{ in } B(\mathcal{L}^2(a, \infty) \times \mathcal{L}^2(a, \infty))$$

invertierbar ist. Da  $\mathcal{D}_a^{-1/2} r \mathcal{D}_a^{-1/2}$  und  $\mathcal{D}_a^{-1/2} p \mathcal{D}_a^{-1/2}$  laut Voraussetzungen in allen drei Fällen beschränkte Operatoren sind, ist dies nach Lemma 2.1 in [32] genau der Fall, wenn

$$1 - \mathcal{D}_a^{-1/2} r \mathcal{D}_a^{-1} p \mathcal{D}_a^{-1/2} \text{ in } B(\mathcal{L}[a, \infty))$$

invertierbar ist.

**Zu (a)** Da man

$$\|p^{1/2} \mathcal{D}_a^{-1/2}\| \leq \left\| \frac{p^{1/2}}{q^{1/2}} \right\| \|q^{1/2} \mathcal{D}_a^{-1/2}\| \quad \text{und} \quad \|r^{1/2} \mathcal{D}_a^{-1/2}\| \leq \left\| \frac{r^{1/2}}{q^{1/2}} \right\| \|q^{1/2} \mathcal{D}_a^{-1/2}\|$$

beliebig klein wählen kann für genügend große  $a > c$ , besitzt (1.5.1) eine kompakte Inverse.

**Zu (b)** Da  $p \mathcal{D}_a^{-1/2}$ ,  $r^{1/2} \mathcal{D}_a^{-1/2}$  beschränkte Operatoren sind und da man

$$\|r^{1/2} \mathcal{D}_a^{-1}\| \leq \left\| \frac{r^{1/2}}{q} \right\| \|q \mathcal{D}_a^{-1}\|$$

beliebig klein wählen kann für genügend große  $a > c$ , besitzt (1.5.1) eine kompakte Inverse.

**Zu (c)** Wird analog zu (a) bewiesen.

## 1.6 Unbeschränkte Koeffizienten

In diesem Abschnitt wird mithilfe der asymptotischen Integration das stetige Spektrum einer selbstadjungierten Realisierung  $H$  von  $T_0$  im Falle  $|q(x)| \rightarrow \infty$  untersucht. Im Folgenden besitze  $p, q, r$  eine Zerlegung wie oben:

$$f = f_1 + f_2 + f_L + f_c = f_s + f_L + f_c \quad \text{mit } \tilde{f}_c \in \mathcal{L}^1.$$

Ferner soll angenommen werden, dass  $f_1 \approx f$  ist, d.h. es gibt ein  $a, K > 0$  mit

$$K^{-1}|f(x)| \leq |f_1(x)| \leq K|f(x)| \quad \text{für alle } x \geq a.$$

Falls  $p$  beschränkt ist, definiert man

$$p_+ = \overline{\lim} p(x) \quad \text{und} \quad p_- = \underline{\lim} p(x).$$

In offensichtlicher Notation gilt:

$$\sigma(H(p, r, q)) = \sigma(H(r, p, q))$$

und

$$\sigma(H(p, r, q)) = -\sigma(H(-p, -r, q)).$$

Dies gilt für alle Teile des Spektrums, da die Symmetrien durch unitäre Transformationen induziert werden. Wegen dieser Symmetrie kann man, falls nur einer der Koeffizienten  $p, r$  beschränkt ist, immer annehmen, dass  $p$  beschränkt ist. Hier sollen nur ein paar exemplarische Beispiele besprochen werden.

In den zu untersuchenden Fällen sind die gleichmäßigen Dichotomiebedingungen immer erfüllt. Da immer für ein festes  $x \geq a$   $\mu_{1/3}(x, \lambda + i\varepsilon)$  um  $\lambda$  holomorph ist, kann man  $\mu_{1/3}(x, \lambda + i\varepsilon)$  um  $\lambda$  entwickeln und wie im fast konstanten Fall zeigen, dass  $\operatorname{Re}(\mu_1(x, z) \pm \mu_3(x, z))$  ein konstantes Vorzeichen für  $x \geq a$  und  $z \in K_\delta$  hat. Vorab soll ein technisches Lemma bewiesen werden, das im Folgenden häufiger verwandt wird.

**Lemma 1.6.1** *Es sei  $f > 0$  auf  $\mathbb{R}^+$  differenzierbar und es gelte  $f(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ . Ist  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  beschränkt, so ist*

$$I(x) := \frac{1}{f(x)} \exp 2 \int_a^x f(t) dt$$

*nicht quadratintegrierbar.*

**Beweis.** Es gilt:

$$\frac{d}{dx} \ln I(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} + 2f(x) \rightarrow \infty.$$

Folglich kann  $I$  nicht quadratintegrierbar sein.

**Theorem 1.6.1** *Es sei  $p$  beschränkt,  $r, q \rightarrow \infty$  mit  $r = o(q^2)$ . Ferner sei  $\frac{q_s'}{q}$  beschränkt und es gelte*

$$\begin{aligned} \left( \frac{q_2'}{q}, \frac{p_2'}{|p|+1}, \frac{r_2'}{r} \right) &\in \mathcal{L}^1, \\ \left( \frac{p_1''}{|p|+1}, \frac{q_1''}{q}, \frac{r_1''}{r}, \frac{p_1'^2}{|p|^2+1}, \frac{q_1'^2}{q^2}, \frac{r_1'^2}{r^2} \right) \frac{|q|^{1/2}}{(r(|p|+1))^{1/2}} &\in \mathcal{L}^1, \\ p_L \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{|p|+1}} \frac{1}{\sqrt{q}}, r_L \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sqrt{q}}, q_L \frac{1}{\sqrt{q}} &\in \mathcal{L}^1, \\ \tilde{p}_c \sqrt{\frac{r}{|p|+1}}, \tilde{r}_c \sqrt{\frac{p}{r}}, \tilde{q}_c &\in \mathcal{L}^1. \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Dann ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 2 und das Spektrum ist diskret in  $(-\infty, p_-) \cup (p_+, \infty)$ .

**Beweis.** Sei  $\lambda_0 \in (p_+, \infty) \cup (-\infty, p_-)$ . Dann gilt für genügend große  $x > a$

$$\begin{aligned} \mu_1(x, \lambda_0 + i\varepsilon) &= \sqrt{q_s} \left( 1 + \frac{\sqrt{(p_s - \lambda_0)(r_s - \lambda_0)}}{2q_s} \left( 1 - \frac{i\varepsilon(r_s + p_s - 2\lambda_0)}{2(r_s - \lambda_0)(p_s - \lambda_0)} \right) + \dots \right) \\ \mu_3(x, \lambda_0 + i\varepsilon) &= \sqrt{q_s} \left( 1 - \frac{\sqrt{(p_s - \lambda_0)(r_s - \lambda_0)}}{2q_s} \left( 1 - \frac{i\varepsilon(r_s + p_s - 2\lambda_0)}{2(r_s - \lambda_0)(p_s - \lambda_0)} \right) + \dots \right). \end{aligned}$$

Es ist

$$|\mu_1 - \mu_3| \approx \left| \frac{\sqrt{(p_s - \lambda_0)(r_s - \lambda_0)}}{\sqrt{q_s}} \right|$$

Also sind die Bedingungen für die asymptotische Integration wegen (1.4.3), (1.4.4), (1.4.5) und (1.4.6) durch (1.6.1) gegeben.

Für alle  $\varepsilon \geq 0$  und  $z = \lambda_0 + i\varepsilon$  gilt :

(a)

$$\begin{aligned}
\|Y_{2/4}(x, z)\|^2 &\approx \int_a^\infty \left( \left| \frac{r_z}{p_z} \right| + \left| \frac{p_z}{r_z} \right| \right) q_s^{-1/2} \exp \left( -2 \int_a^x q_s^{1/2}(t) dt \right) dx \\
&\approx \int_a^\infty \frac{|r_z|}{q_s} q_s^{1/2} \exp \left( -2 \int_a^x q_s^{1/2}(t) dt \right) dx \\
&\leq \int_a^\infty q_s^{1/2} \exp \left( -2 \int_a^x q_s^{1/2}(t) dt \right) dx \\
&= \int_0^\infty \exp(-2u) du < \infty
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\|Y_{1/3}(x, z)\|^2 &\approx \int_a^\infty \left( \left| \frac{r_z}{p_z} \right| + \left| \frac{p_z}{r_z} \right| \right) q_s^{-1/2} \exp \left( 2 \int_a^x q_s^{1/2}(t) dt \right) dx \\
&\geq \int_a^\infty q_s^{-1/2} \exp \left( 2 \int_a^x q_s^{1/2}(t) dt \right) dx
\end{aligned}$$

Sei

$$I(x) := q_s^{-1/2} \exp 2 \int_a^x q_s^{1/2}(t) dt,$$

dann folgt aus Lemma 1.6.1, dass  $Y_1$  und  $Y_3$  nicht quadratintegrierbar sind. Deshalb ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 2 und  $Ty = \lambda_0 y$  hat zwei linear unabhängige  $\mathcal{L}^2$  Lösungen und somit hat  $H$  in  $(-\infty, p_-) \cup (p_+, \infty)$  rein diskretes Spektrum.

**Theorem 1.6.2** *Es sei  $p$  beschränkt,  $q, r \rightarrow \infty$  mit  $q^2 = o(r)$  und es gelte*

$$\begin{aligned}
\left( \frac{q_2'}{q}, \frac{p_2'}{|p|+1}, \frac{r_2'}{r} \right) &\in \mathcal{L}^1, \\
\left( \frac{q_1''}{q}, \frac{p_1''}{|p|+1}, \frac{r_1''}{r}, \frac{q_1'^2}{q^2}, \frac{p_1'^2}{(|p|+1)^2}, \frac{r_1'^2}{r^2} \right) ((|p|+1)r)^{-1/4} &\in \mathcal{L}^1, \\
\left( p_L \sqrt{\frac{r}{|p|+1}}, r_L \sqrt{\frac{r}{r}}, q_L \right) ((|p|+1)r)^{-1/4} &\in \mathcal{L}^1, \\
\tilde{r}_c \sqrt{\frac{r}{r}}, \tilde{p}_c \sqrt{\frac{r}{|p|+1}}, \tilde{q}_c &\in \mathcal{L}^1.
\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Dann ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 2 und in  $(p_+, \infty)$  liegt ein rein diskretes Spektrum vor. Ferner ist  $(-\infty, p_-) \subset \sigma_{ac}(H)$  und  $\sigma_{sc}(H) \cap (-\infty, p_-) = \emptyset$ . Die möglichen Eigenwerte in  $(-\infty, p_-)$  sind isoliert.

**Beweis.** Sei  $\lambda_0 \in (-\infty, p_-) \cup (p_+, \infty)$ . Dann gilt für genügend große  $x \geq a$ :

$$\begin{aligned} \mu_1(x, \lambda_0 + i\varepsilon) &= \sqrt[4]{(r_s - \lambda_0)(p_s - \lambda_0)} \left( 1 + \frac{q_s}{2\sqrt{(r_s - \lambda_0)(p_s - \lambda_0)}} - \frac{i\varepsilon(r_s + p_s - 2\lambda_0)}{4(r_s - \lambda_0)(p_s - \lambda_0)} + \dots \right) \\ \mu_3(x, \lambda_0 + i\varepsilon) &= i\sqrt[4]{(r_s - \lambda_0)(p_s - \lambda_0)} \left( 1 - \frac{q_s}{2\sqrt{(r_s - \lambda_0)(p_s - \lambda_0)}} - \frac{i\varepsilon(r_s + p_s - 2\lambda_0)}{4(r_s - \lambda_0)(p_s - \lambda_0)} + \dots \right) \end{aligned}$$

Folglich ist  $|\mu_i| \approx \sqrt{|r_{\lambda_0}| |p_{\lambda_0}|}$  und  $|\mu_1 \pm \mu_3| \approx \sqrt{|r_{\lambda_0}| |p_{\lambda_0}|}$ . Also sind die Bedingungen der asymptotischen Integration wegen (1.4.3), (1.4.4), (1.4.5) und (1.4.6) durch (1.6.2) gegeben.

Sei  $\lambda_0 \in (p_+, \infty)$ . Dann gilt für genügend große  $x \geq a$  und  $z = \lambda_0 + i\varepsilon$ ,  $\varepsilon \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \|Y_{2/3}(x, z)\|^2 &\approx \int_a^\infty \left( \left| \frac{r_{\lambda_0}}{p_{\lambda_0}} \right| + \left| \frac{p_{\lambda_0}}{r_{\lambda_0}} \right| \right) \frac{1}{\sqrt{|r_{\lambda_0}| |p_{\lambda_0}|}} \exp \left( -2 \int_a^x \sqrt{|r_{\lambda_0}| |p_{\lambda_0}|} dt \right) dx \\ &= \int_a^\infty \frac{|r_s - \lambda_0| + |p_s - \lambda_0|}{|r_s - \lambda_0| |p_s - \lambda_0|} \sqrt{|r_{\lambda_0}| |p_{\lambda_0}|} \exp \left( -2 \int_a^x \sqrt{|r_{\lambda_0}| |p_{\lambda_0}|} dt \right) dx \\ &\leq C \int_a^\infty \sqrt{|r_{\lambda_0}| |p_{\lambda_0}|} \exp \left( -2 \int_a^x \sqrt{|r_{\lambda_0}| |p_{\lambda_0}|} dt \right) dx \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass  $Y_{1/4}(x, z)$  nicht quadratintegrierbar sind. Also ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 2 und man hat in  $(p_+, \infty)$  rein diskretes Spektrum, da  $Ty = \lambda_0 y$  zwei linear unabhängige quadratintegrierbare Lösungen hat.

Sei nun  $\lambda_0 \in (-\infty, p_-)$ . Wie oben kann man zeigen, dass für alle  $\varepsilon \geq 0$   $Y_2(\cdot, z)$  quadratintegrierbar und  $Y_1(\cdot, z)$  nicht quadratintegrierbar ist. Da der Defektindex gleich 2 ist, muß für  $\text{Im } z > 0$   $Y_4(\cdot, z)$  quadratintegrierbar sein. Für genügend große  $a > 0$  ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} \frac{p_z^2(a)}{\mu_2(a, z) + \mu_4(a, z)} > 0.$$

Da die Eigenwerte von gleicher Größenordnung sind, kann man wie im fast konstanten Fall die  $M$ -Matrix mit Dirichlet-Randbedingung im Punkte  $a$  berechnen und zeigen, dass  $M(z) = M_0(z)(1 + M_1(a, z))$  für alle  $z \in K_\delta$  existiert und  $M_1(a, z)$  gleichmäßig in  $z \in K_\delta$  für  $a \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Wie im fast konstanten Fall folgt  $(-\infty, p_-) \subset \sigma_{ac}(H)$  und  $(-\infty, p_-) \cap \sigma_{sc}(H) = \emptyset$ . Ferner ist die Vielfachheit des absolut stetigen Spektrums in  $(-\infty, p_-)$  gleich 1.

**Theorem 1.6.3** *Es gelte  $|p(x)|, |r(x)|, q(x) \rightarrow \infty$  und  $(1+\eta)|pr| \leq q^2$ ,  $\eta > 0$ . Ferner sei  $\frac{q_s}{q}$  beschränkt und es gelte (1.6.1). Dann ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 2 und  $H$  hat rein diskretes Spektrum. Damit die gleichmäßigen Dichotomiebedingungen modulo  $\mathcal{L}^1$  erfüllt sind, benötigt man im Falle  $pr < 0$ , dass  $p + r$  ein konstantes Vorzeichen modulo  $\mathcal{L}^1$ -Terme hat.*

**Beweis.** Der Beweis wird wie im Falle  $p$  beschränkt und  $r = o(q^2)$  geführt.

**Theorem 1.6.4** *Es gelte  $|p|, |r|, |q| \rightarrow \infty$ ,  $pr > 0$  und  $(1+\eta)q^2 \leq pr$ ,  $\eta > 0$ . Ferner seien  $\frac{r_s}{r}$  und  $\frac{p_s}{p}$  beschränkt und es gelte (1.6.2). Dann gilt:*

- (a) *Ist  $\frac{r_s+p_s}{(p_s r_s)^{3/4}} \in \mathcal{L}^1$ , so ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 3 und es liegt ein rein diskretes Spektrum vor.*
- (b) *Ist  $\frac{r_s+p_s}{(p_s r_s)^{3/4}} \notin \mathcal{L}^1$ , so ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 2,  $\sigma_{\text{sc}}(H) = \emptyset$ ,  $\sigma_{\text{ac}}(H) = \mathbb{R}$  und die Vielfachheit des absolutstetigen Spektrums beträgt 1.*

**Beweis.** Sei  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für  $z = \lambda_0 + i\varepsilon$ ,  $\varepsilon \geq 0$ , und für genügend große  $x > a$ :

$$\begin{aligned}\mu_1(x, z) &= \sqrt[4]{r_s p_s} \left( 1 + \frac{q_s}{2\sqrt{p_s r_s}} - \frac{i\varepsilon(r_s + p_s)}{4r_s p_s} + \dots \right) \\ \mu_3(x, z) &= i\sqrt[4]{r_s p_s} \left( 1 - \frac{q_s}{2\sqrt{p_s r_s}} - \frac{i\varepsilon(r_s + p_s)}{4r_s p_s} + \dots \right).\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit konnte man  $\lambda_0$  in  $r$  und  $p$  absorbieren. Nun ist für alle  $\varepsilon \geq 0$   $Y_2(x, \lambda_0 + i\varepsilon)$  wegen

$$\begin{aligned}\|Y_2(x, \lambda_0 + i\varepsilon)\|^2 &\approx \int_a^\infty \left( \frac{|r_s + p_s|}{p_s r_s} \sqrt[4]{p_s r_s} \exp -2 \int_a^x \sqrt[4]{p_s r_s} dt \right) dx \\ &\leq \int_a^\infty \left( \sqrt[4]{p_s r_s} \exp -2 \int_a^x \sqrt[4]{p_s r_s} dt \right) dx \\ &< \infty\end{aligned}$$

quadratintegrierbar. Sei

$$I(x) := \frac{1}{\sqrt[4]{p_s r_s}} \exp 2 \int_a^x \sqrt[4]{p_s r_s} dt.$$

Dann folgt aus Lemma 1.6.1, dass  $Y_1(x, \lambda_0 + i\varepsilon)$  für alle  $\varepsilon \geq 0$  nicht quadratintegrierbar sein kann. Ferner ist für alle  $\varepsilon \geq 0$

$$\|Y_{3/4}\|^2 \approx \int_a^\infty \left( \frac{|r_s + p_s|}{(p_s r_s)^{3/4}} \exp \pm \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x \frac{r_s + p_s}{(p_s r_s)^{3/4}} dt \right) dx.$$

Also hat man im Falle  $\frac{p_s + r_s}{(p_s r_s)^{3/4}} \in \mathcal{L}^1$  drei gleichmäßig in  $z$  quadratintegrierbare Lösungen. Aus einer Erweiterung des Theorems 5.1 von [35] folgt nun die erste Aussage. Im Falle  $\frac{r_s + p_s}{(p_s r_s)^{3/4}} \notin \mathcal{L}^1$  ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 2 und wegen  $\text{Rang} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im } M(\lambda_0 + i\varepsilon) \geq 1$  folgt nun die zweite Aussage wie im fast konstanten Fall.

**Theorem 1.6.5** *Es gelte  $|p|, |r|, |q| \rightarrow \infty$ ,  $pr < 0$ ,  $(1 + \eta)q^2 \leq |pr|$ ,  $\eta > 0$  und (1.6.2). Ferner seien  $\frac{r_s}{r}$  und  $\frac{p_s}{p}$  beschränkt. Dann ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 2 und es liegt ein rein diskretes Spektrum vor.*

**Beweis.** Wie in Theorem 1.6.2 können wir zeigen, dass wir zwei gleichmäßig in  $z$  quadratintegrierbare Lösungen haben. Wegen

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{1}{\sqrt[4]{|p_s r_s|}} \exp 2 \int_a^x \sqrt[4]{|p_s r_s|} dt \rightarrow \infty$$

muß der Defektindex von  $T_0$  gleich 2 sein. Da sich die Eigenwerte in  $\mathbb{R}$  nicht häufen können, besitzt also  $H$  rein diskretes Spektrum.

**Theorem 1.6.6** *Es gelte  $-q, |r|, |p| \rightarrow \infty$ ,  $(1 + \eta)pr \leq q^2$ ,  $\eta > 0$  und es sei  $pr > 0$ . Ferner gelte (1.6.1). Dann gilt:*

- (a) *Ist  $\frac{|r_s + p_s|}{\sqrt{p_s r_s} \sqrt{|q_s|}} \in \mathcal{L}^1$ , so ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 4 und somit hat  $H$  rein diskretes Spektrum.*
- (b) *Ist  $\frac{|r_s + p_s|}{\sqrt{p_s r_s} \sqrt{|q_s|}} \notin \mathcal{L}^1$ , so ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 2,  $\mathbb{R} \subset \sigma_{\text{ac}}(H)$ ,  $\sigma_{\text{sc}}(H) = \emptyset$  und die Vielfachheit des absolutstetigen Spektrums beträgt 2. Ferner besitzt  $H$  keine eingebetteten Eigenwerte.*

**Beweis.** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass  $p + r > 0$  ist. Sei  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  beliebig vorgegeben. Dann gilt für alle  $\varepsilon \geq 0$  und



genügend große  $x \geq a$ :

$$\begin{aligned}\mu_1(x, \lambda_0 + i\varepsilon) &\approx \sqrt{q_s} \left( 1 + \frac{\sqrt{p_s r_s}}{2q_s} \left( 1 - \frac{i\varepsilon(r_s + p_s)}{2p_s r_s} \right) \right) \\ \mu_3(x, \lambda_0 + i\varepsilon) &\approx \sqrt{q_s} \left( 1 - \frac{\sqrt{p_s r_s}}{2q_s} \left( 1 - \frac{i\varepsilon(r_s + p_s)}{2p_s r_s} \right) \right)\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\|Y_1(x, \lambda_0 + i\varepsilon)\| &\approx \|Y_4(x, \lambda_0 + i\varepsilon)\| \\ &\approx \int_a^\infty \frac{r_s + p_s}{\sqrt{p_s r_s} \sqrt{|q_s|}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \int_a^x \frac{r_s + p_s}{\sqrt{p_s r_s} \sqrt{|q_s|}} dt\right) dx\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|Y_2(x, \lambda_0 + i\varepsilon)\| &\approx \|Y_3(x, \lambda_0 + i\varepsilon)\| \\ &\approx \int_a^\infty \frac{r_s + p_s}{\sqrt{p_s r_s} \sqrt{|q_s|}} \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} \int_a^x \frac{r_s + p_s}{\sqrt{p_s r_s} \sqrt{|q_s|}} dt\right) dx.\end{aligned}$$

Also ist für  $\frac{r_s + p_s}{\sqrt{p_s r_s} \sqrt{q_s}} \in \mathcal{L}^1$  der Defektindex von  $T_0$  gleich 4 und somit hat  $H$  eine Hilbert-Schmidt-Resolvente. Also liegt ein rein diskretes Spektrum vor. Ist  $\frac{r_s + p_s}{\sqrt{p_s r_s} \sqrt{q_s}} \notin \mathcal{L}^1$ , so ist offensichtlich der Defektindex von  $T_0$  gleich 2. In diesem Fall existiert für genügend große  $a$   $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M(\lambda_0 + i\varepsilon)$  und wegen  $\det \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} M_0(\lambda_0 + i\varepsilon) > 0$  ist  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \operatorname{Im} M(\lambda_0 + i\varepsilon) > 0$ . Daraus folgen in diesem Fall die Aussagen über das stetige Spektrum. Da alle 4 Lösungen  $Y_i(\lambda_0, x)$  nicht quadratintegrierbar sind, kann  $H$  keine eingebetteten Eigenwerte haben.

**Theorem 1.6.7** *Es gelte  $-q, |p|, |r| \rightarrow \infty$ ,  $(1 + \eta)|pr| \leq q^2$ ,  $\eta > 0$  und es sei  $pr < 0$ . Ferner gelte (1.6.1). Dann gilt:*

- (a) *Ist  $\frac{\sqrt{|p_s r_s|}}{\sqrt{|q|}} \in \mathcal{L}^1$ , so ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 4 und es liegt ein rein diskretes Spektrum vor.*
- (b) *Ist  $\frac{|p_s| + |r_s|}{\sqrt{|p_s r_s|} \sqrt{|q_s|}} \notin \mathcal{L}^1$ , so ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 2 und es liegt ein rein diskretes Spektrum vor.*

**Beweis.**  $\mu_{1/3}(\cdot, z)$  haben dieselbe Gestalt wie in Theorem 1.6.6 . Es gilt:

$$\begin{aligned} \|Y_{1/2}(x, z)\|^2 &\approx \|Y_{4/3}(x, z)\|^2 \\ &\approx \int_a^\infty \frac{|r_s| + |p_s|}{\sqrt{|p_s r_s|}} \frac{1}{\sqrt{|q_s|}} \exp \pm \left( \int_a^x \frac{\sqrt{|p_s r_s|}}{\sqrt{|q_s|}} dt \right) dx \end{aligned}$$

Nun ist für genügend große  $x \geq a$   $|p_s| + |r_s| < |p_s r_s|$  und folglich hat man im Falle  $\frac{\sqrt{|p_s r_s|}}{\sqrt{|q_s|}} \in \mathcal{L}^1$  4 gleichmäßig in  $z$  quadratintegrierbare Lösungen. Also ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 4 und  $H$  hat rein diskretes Spektrum.

Sei nun  $\frac{|r_s| + |p_s|}{\sqrt{|p_s r_s|} \sqrt{|q_s|}} \notin \mathcal{L}^1$ , so sind  $Y_1(x, z)$  und  $Y_4(x, z)$  nicht quadratintegrierbar. Also ist der Defektindex von  $T_0$  gleich 2 und man hat 2 gleichmäßig in  $z$  quadratintegrierbare Lösungen. Folglich liegt ein rein diskretes Spektrum vor.

## Kapitel 2

# Absolutstetiges Spektrum eines kanonischen Systems

### 2.1 Einleitung

In diesem Kapitel wird das absolutstetige Spektrum des diskreten kanonischen Systems

$$J(y_{n+1} - y_n) = zH_n y_n \quad (2.1.1)$$

untersucht, wobei  $J, H_n \in \mathbb{C}^{2d \times 2d}$ ,  $y_n \in \mathbb{C}^{2d}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $H_n \geq 0$  und  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ist. Es wird ferner angenommen, dass  $H_n J H_n = 0$  ist. Diese Bedingung wird benötigt, um das zu (2.1.1) gehörende Randwertproblem formal symmetrisch zu machen.

Diskrete kanonische Systeme sind ein sehr allgemeiner Zugang. Wir werden später sehen, dass wir jede formal symmetrische diskrete skalare Gleichung von gerader Ordnung als ein diskretes kanonisches System auffassen können. Das Hauptergebnis dieses Kapitels ist:

**Theorem 2.1.1** *Sei  $S_m$  die Menge, auf der (2.1.1) absolutstetiges Spektrum mit exakt der Vielfachheit  $m$  ( $1 \leq m \leq d$ ) hat. Sei ferner  $n_j \in \mathbb{N}$  eine beliebige Folge mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} n_j = \infty$ . Dann existieren für fast alle  $\lambda \in S_m$   $d + m$  linear unabhängige Lösungen  $y_1, \dots, y_{d+m}$  von  $J(y_k(n+1) - y_k(n)) = \lambda H(n)y_k(n)$  mit*

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} y_k^*(n_j) H(n_j) y_k(n_j) < \infty$$

für  $k = 1, \dots, d + m$ .

Die genaue Definition von  $S_m$  wird später gegeben.

Vereinfacht gesprochen, hat man in einem schwachen Sinne  $d+m$  beschränkte Lösungen, wenn absolutstetiges Spektrum mit der Vielfachheit  $m$  vorliegt. Dies bestätigt eine allgemeine Vorstellung über das absolutstetige Spektrum. Hat man absolutstetiges Spektrum mit der Vielfachheit  $m$ , so erwartet man  $2m$  Lösungen von konstanter Größe,  $d-m$  fallende und  $d-m$  wachsende Lösungen. Also erwartet man  $2m+d-m$  nicht anwachsende Lösungen, wie im Theorem 2.1.1 behauptet.

Theorem 2.1.1 ist eine Verallgemeinerung eines fundamentalen Ergebnisses von Last und Simon ( Theorem 1.2 in [28] ). Last und Simon beschäftigten sich mit dem eindimensionalen Schrödingeroperator. Mit derselben Strategie, wie sie Last und Simon verfolgen, wird das Theorem 2.1.1 bewiesen. Dass das Spektrum nicht mehr einfach zu sein braucht, führt zu neuen Effekten, die genauer untersucht werden müssen. Speziell muß im Detail der Effekt untersucht werden, der durch eine Variation der linken Randbedingung verursacht wird. Dies wird dann als ein Problem in der komplexen symplektischen linearen Algebra formuliert und in Abschnitt 2.6 gelöst.

Es wird hier mit kanonischen Systemen gearbeitet, da Theorem 2.1.1 in einem möglichst allgemeinen Rahmen bewiesen werden soll und nicht nur für skalare Gleichungen von gerader Ordnung. Im Falle  $d=1$  ist allgemein bekannt, dass stetige kanonische Systeme aus verschiedenen Gesichtspunkten wichtig sind. Zum Beispiel werden de Brangesche Räume von kanonischen Systemen erzeugt [37], [6]. Ferner kann man die Sturm-Liouville, Dirac und Jacobi Gleichung als ein kanonisches System auffassen. In [4] und [38] werden kanonische Systeme von beliebiger Ordnung  $2d$  untersucht. Die Literatur im Falle  $d=1$  ist viel umfassender. Hier sei nur verwiesen auf den Aufsatz von S. Hassi, de Snoo und H. Winkler [22] und die dort zitierte Literatur.

Da dem Verfasser nicht bekannt ist, dass eine systematische Behandlung von diskreten kanonischen Systemen bisher durchgeführt worden ist, wird hier eine Theorie für diskrete kanonische Systeme, soweit sie benötigt wird, entwickelt. Die hauptsächliche Schwierigkeit liegt in der Konstruktion eines selbstadjungierten Operators dessen Eigenwerte die des Systems (2.1.1) sind. Dieses Problem wird ähnlich wie in Kapitel 10 in [37] gelöst.

Es ist sogar noch schwieriger, die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen möglichen Definitionen der Spektralmaße auf der Halbachse zu klären. Hier soll aber keine gründliche Analyse dieses Problems vorgenommen werden. Für uns hier ist nur wesentlich, dass bei einer Änderung der Randbedingung der absolutstetige Anteil des Spektralmaßes invariant bleibt. Es wird hier eine möglichst einfache Definition des Spektralmaßes benutzt, die es uns ermöglicht, die gewünschte Invarianz des Spektralmaßes mit einem Resultat von Gesztesy und Tsekanovskii [21] zu beweisen.

---

Die oben erwähnten Probleme werden in den Abschnitten 2.2 - 2.5 behandelt. Der Abschnitt 2.6 ist wesentlich für die hier gewählte Vorgehensweise. Dort werden Probleme aus der komplexen symplektischen linearen Algebra diskutiert. Das Theorem 2.1.1 kann dann im Abschnitt 2.7 bewiesen werden. Zum Schluß wird nochmal gerechtfertigt, warum der Rahmen der kanonischen Systeme gewählt wurde. Im Abschnitt 2.8 wird gezeigt, dass jede symmetrische diskrete skalare Gleichung von gerader Ordnung in ein diskretes kanonisches System umgeschrieben werden kann. Die Ergebnisse dieses Kapitels stammen aus meiner gemeinsamen Arbeit mit C. Remling [20].

## 2.2 Spektraltheorie auf endlichen Intervallen

In diesem Abschnitt wird das zu (2.1.1) gehörende Eigenwertproblem auf einem endlichen Intervall  $n \in \{1, \dots, N\}$  untersucht. Zunächst definiert man den endlich dimensionalen Hilbertraum  $\ell_2^H(\{1, \dots, N\})$ , dessen Elemente Äquivalenzklassen von Funktionen  $y : \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{C}^{2d}$  sind, und dessen Skalarprodukt durch  $\langle y, z \rangle = \sum_{n=1}^N y_n^* H_n z_n$  gegeben ist. Funktionen  $y, y'$  mit  $\|y - y'\| = 0$  werden im Hilbertraum  $\ell_2^H$  identifiziert.

Es treten offensichtliche Probleme auf. Zunächst einmal sollte der zu (2.1.1) gehörende Operator formal durch  $(Ty)_n = H_n^{-1} J(y_{n+1} - y_n)$  gegeben sein. Aber  $H_n$  ist nicht invertierbar. Versucht man  $Ty = f$  dadurch zu definieren, dass  $J(y_{n+1} - y_n) = H_n f_n$  erfüllt sein soll, so ist es weder klar, dass jedes  $y \in \ell_2^H$  ein Bild  $f = Ty$  bezüglich des Operators  $T$  besitzt, noch ist klar, dass dieses Bild, wenn es existiert, wohldefiniert ist, da verschiedene Repräsentanten von  $y \in \ell_2^H$  unterschiedliche Bilder  $f$  haben können.

Diese Probleme werden in diesem Abschnitt gelöst. Es wird ähnlich wie in Kapitel 10 in [37] verfahren.

Zuerst werden die zu (2.1.1) gehörenden Randwertprobleme elementar ohne Zuhilfenahme eines Operators  $T$  definiert und später wird das Randwertproblem mit einem selbstadjungierten Operator definiert auf einem Unterraum von  $\ell_2^H$  in Verbindung gebracht.

Zunächst wird die Greensche Identität bewiesen. Diese wird benötigt, um selbstadjungierte Realisierungen mithilfe von Randbedingungen zu beschreiben. Geht man von folgenden Differenzgleichungen

$$J(y_{n+1} - y_n) = H_n f_n, \quad J(z_{n+1} - z_n) = H_n g_n$$

( $n = 1, \dots, N$ ) aus, dann gilt

$$\langle y, g \rangle_{\ell_2^H(\{1, \dots, N\})} - \langle f, z \rangle_{\ell_2^H(\{1, \dots, N\})} = y_n^* J z_n \Big|_{n=1}^{n=N+1}. \quad (2.2.1)$$

Interpretiert man nun  $f$  als  $Ty$  und  $g$  als  $Tz$ , so besagt diese Gleichung, dass

$$\langle y, Tz \rangle - \langle Ty, z \rangle = y_n^* J z_n \Big|_{n=1}^{n=N+1}.$$

ist. Die Greensche Identität wird durch folgende Rechnung bewiesen:

$$\begin{aligned}
\langle y, g \rangle - \langle f, z \rangle &= \sum_{n=1}^N y_n^* H_n g_n - \sum_{n=1}^N f_n^* H_n z_n \\
&= \sum_{n=1}^N y_n^* H_n g_n - \sum_{n=1}^N f_n^* H_n (z_{n+1} + J H_n g_n) \\
&= \sum_{n=1}^N y_n^* H_n g_n - \sum_{n=1}^N f_n^* H_n z_{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^N y_n^* J (z_{n+1} - z_n) + \sum_{n=1}^N (y_{n+1}^* - y_n^*) J z_{n+1} \\
&= - \sum_{n=1}^N y_n^* J z_n + \sum_{n=1}^N y_{n+1}^* J z_{n+1} \\
&= y_{N+1}^* J z_{N+1} - y_1^* J z_1
\end{aligned}$$

Um von der zweiten zur dritten Zeile zu gelangen, benutzte man, dass  $H_n J H_n = 0$  ist.

Nun wird gefordert, dass die Randformen separat in  $n = 1$  und  $n = N + 1$  verschwinden (getrennte Randbedingungen). Entsprechend werden maximale Unterräume mit dieser Eigenschaft gesucht. Man bestimmt also Unterräume  $L \subset \mathbb{C}^{2d}$  so, dass für alle  $v, w \in L$  stets  $v^* J w = 0$  gilt, die maximal bezüglich dieser Eigenschaft sind. Diese Lagrangeschen Unterräume können folgendermaßen beschrieben werden: Seien  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^{d \times d}$  mit

$$\alpha_1 \alpha_1^* + \alpha_2 \alpha_2^* = 1, \quad \alpha_1 \alpha_2^* - \alpha_2 \alpha_1^* = 0. \quad (2.2.2)$$

Dann ist  $L_\alpha := \{v \in \mathbb{C}^{2d} \mid (\alpha_1, \alpha_2)v = 0\}$  ein Lagrangescher Unterraum,  $L_\alpha \neq L_\beta$ , wenn  $\alpha \neq \beta$  ist und  $\alpha$  und  $\beta$  die Gleichung 2.2.2 erfüllen. Ferner kann jeder Lagrangescher Unterraum in dieser Weise dargestellt werden. Diese Charakterisierung der Lagrangeschen Unterräume wird im Abschnitt 2.6 bewiesen. Dort werden noch weitere Fragen aus der symplektischen linearen Algebra beantwortet (siehe dazu auch die Ausführungen in Kapitel 11 in [13] und [5]). Nun ist man in der Lage, Randwertprobleme mit dem kanonischen System (2.1.1) in Verbindung zu bringen. Man nennt  $z \in \mathbb{C}$  einen Eigenwert von (2.1.1) mit der Randbedingung  $\alpha$  in 1 und der Randbedingung  $\beta$  in  $N + 1$ , wenn es eine nicht triviale Lösung  $y$  von Gleichung (2.1.1) gibt, die die Randbedingungen

$$(\alpha_1, \alpha_2)y_1 = 0, \quad (\beta_1, \beta_2)y_{N+1} = 0 \quad (2.2.3)$$

erfüllt, wobei  $\alpha$  und  $\beta$  der Gleichung 2.2.2 genügen. Es wäre möglich, mit dieser Definition weiterzuarbeiten, aber man erhält einen tieferen Einblick, indem man die Menge der Eigenwerte mit dem Spektrum eines selbstadjungierten Operators in einem Unterraum von  $\ell_2^H$  identifiziert.

Da es nur endlich viele Eigenwerte gibt, kann man eine Zahl  $z_0 \in \mathbb{C}$  fixieren, die kein Eigenwert ist. Dann wird die Resolvente im Punkte  $z_0$  betrachtet, die formal durch  $(T - z_0)^{-1}$  gegeben ist. Dann läßt sich der gesuchte Operator  $T$  aus diesem Objekt konstruieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nimmt man an, dass  $z_0 = 0$  ist. Dann muß man im Folgenden voraussetzen, dass die Matrizen  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$  stets regulär sind. Dann gibt es für eine fest vorgegebene Folge  $(f_j)_{j=1}^N$  genau eine Lösung der inhomogenen Gleichung  $J(y_{n+1} - y_n) = f_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ), die die Randbedingung (2.2.3) erfüllt, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 2.2.1** *Die inhomogene Gleichung*

$$\begin{aligned} J(y_{n+1} - y_n) &= f_n \quad n \in \{1, \dots, N\} \\ (\alpha_1, \alpha_2)y_1 &= (\beta_1, \beta_2)y_{N+1} = 0 \end{aligned}$$

*besitzt genau eine Lösung. Es gilt*

$$y_n = \sum_{j=1}^N K(n, j) f_j,$$

*wobei  $K(n, j)$  durch*

$$K(n, j) = \begin{cases} B_{\alpha\beta}J - J & j < n \\ B_{\alpha\beta}J & j \geq n \end{cases}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

*gegeben ist.*

**Beweis.** Es gilt für alle  $n \in \{1, \dots, N + 1\}$

$$y_n = \sum_{j=1}^{n-1} -Jf_j + y_1$$



Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} y_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} y_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \left( y_{N+1} + \sum_{j=1}^N Jf_j \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \sum_{j=1}^N Jf_j. \end{aligned}$$

Also ist  $y_1 = B_{\alpha\beta} J \sum_{j=1}^N f_j$  und

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{j=1}^{n-1} -Jf_j + B_{\alpha\beta} J \sum_{j=1}^N f_j \\ &= \sum_{j=1}^N K(n, j) f_j \end{aligned}$$

Aus der Konstruktion von  $K$  ist ersichtlich, dass  $z$  genau dann ein Eigenwert ist, wenn

$$y_n = z \sum_{j=1}^N K(n, j) H_j y_j \quad (2.2.4)$$

ist. Diese Gleichung ist auch im Hilbertraum  $\ell_2^H(\{1, \dots, N\})$  sinnvoll, da die rechte Seite der Gleichung (2.2.4) nur von der Äquivalenzklasse  $\tilde{y}$  von  $y$  abhängt. Es sei daran erinnert, dass  $y \sim 0$  genau dann ist, wenn  $H_n y_n \equiv 0$  ist. Durch den Kern  $K$  wird ein Operator  $\mathcal{K}H$  auf dem Hilbertraum  $\ell_2^H$  durch die Gleichung (2.2.4) definiert. Wenn  $y$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $z$  ist, gilt  $\tilde{y} = z\mathcal{K}H\tilde{y}$ . Ist umgekehrt die Gleichung  $\tilde{y} = z\mathcal{K}H\tilde{y}$  erfüllt, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Repräsentanten  $y$  der Äquivalenzklasse  $\tilde{y}$ , der die Gleichung (2.2.4) erfüllt und somit eine Eigenfunktion zum Eigenwert  $z$  ist. Speziell ergibt sich, dass die zu unterschiedlichen Eigenfunktionen gehörenden Äquivalenzklassen verschiedene Elemente im Hilbertraum  $\ell_2^H$  sind.

Nun definiert man  $\ell_2^I$  analog zu  $\ell_2^H$ , wobei  $I \in \mathbb{C}^{2d \times 2d}$  der Einsoperator ist. Ferner sei  $V$  der isometrische Operator

$$V : \ell_2^H \rightarrow \ell_2^I, \quad (Vy)_n = H_n^{1/2} y_n.$$

Hier ist  $H_n^{1/2}$  die nicht negative Quadratwurzel von  $H_n \geq 0$ . Sei  $\mathcal{L} : \ell_2^I \rightarrow \ell_2^I$  der Operator mit dem Kern

$$L(n, j) = H_n^{1/2} K(n, j) H_j^{1/2}.$$

Dann gilt:

**Lemma 2.2.2**  $L(n, j) = L(j, n)^*$  und  $\mathcal{L}$  ist selbstadjungiert.

**Beweis.** Die zweite Aussage des Lemma's folgt unmittelbar aus  $L(n, j) = L(j, n)^*$ . Letzteres ergibt sich aus der Gleichung

$$K(n, j) - K(j, n)^* = J\delta_{nj} \quad (2.2.5)$$

und der Tatsache, dass aus  $H_n J H_n = 0$   $H_n^{1/2} J H_n^{1/2} = 0$  folgt. Es muß also nur noch die Gleichung (2.2.5) bewiesen werden. Mögen  $y, z$  die Randbedingungen (2.2.3) erfüllen und Lösungen der Gleichungen  $J(y_{n+1} - y_n) = f_n$ ,  $J(z_{n+1} - z_n) = g_n$  sein. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=1}^N (y_{n+1}^* J z_{n+1} - y_n^* J z_n) = \sum_{n=1}^N ((y_n^* + f_n^* J) J(z_n - J g_n) - y_n^* J z_n) \\ &= \sum_{n=1}^N (f_n^* J g_n + y_n^* g_n - f_n^* z_n) = \sum_{j,n=1}^N f_n^* [J\delta_{nj} - K(n, j) + K(j, n)^*] g_j. \end{aligned}$$

Da  $f, g$  beliebig vorgegeben waren, ist somit (2.2.5) bewiesen.

Wie oben schon ausgeführt, sind die Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen eindeutig durch die Gleichung (2.2.4) bestimmt. Ferner kann man die Gleichung (2.2.4) als eine Gleichung im Hilbertraum  $\ell_2^H$  auffassen. Im nun folgenden Lemma werden diese Aussagen genauer untersucht.

**Lemma 2.2.3** Sei  $f \in \ell_2^I$ ,  $z \neq 0$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a)  $\mathcal{L}f = z^{-1}f$
- b)  $f \in R(V)$  und das eindeutig durch  $f = Vy$  bestimmte  $y \in \ell_2^H$  genügt der Gleichung  $y = z\mathcal{K}Hy$ . Dabei bezeichnet  $R(V) \subset \ell_2^I$  das Bild von  $V$ .

**Beweis.** Anhand der Form des Kernes  $L$  erkennt man, dass  $R(\mathcal{L}) \subset R(V)$  ist. Nimmt man nun an, dass a) erfüllt ist, dann liegt  $f = z\mathcal{L}f$  in der Menge  $R(V)$ . Folglich gibt es ein eindeutig bestimmtes  $y \in \ell_2^H$  mit  $f = Vy$ . Also ist  $f_n = H_n^{1/2} y_n$  und es gilt  $z(\mathcal{L}f)_n = zH_n^{1/2} \sum_{j=1}^N K(n, j) H_j y_j$ . Daraus ergibt sich

$$H_n^{1/2} \left( y_n - z \sum_{j=1}^N K(n, j) H_j y_j \right) = 0.$$

Das bedeutet, dass  $y = z\mathcal{K}Hy$  in  $\ell_2^H$ .

Nimmt man umgekehrt an, dass b) erfüllt ist, dann erhält man die Gleichung a), indem auf beiden Seiten die Gleichung  $y = z\mathcal{K}Hy$  von links mit  $H_n^{1/2}$  multipliziert wird.

Es sei  $P$  die orthogonale Projektion auf  $R(V)$  in  $\ell_2^I$ . Wegen

$$R(V)^\perp = \left\{ f \in \ell_2^I \mid \sum_{n=1}^N g_n^* H_n^{1/2} f_n = 0 \quad \forall g \in \ell_2^I \right\} = \left\{ f \in \ell_2^I \mid \|f\|_{\ell_2^H} = 0 \right\}$$

ist  $\mathcal{L}(1 - P) = 0$ . Da  $R(\mathcal{L}) \subset R(V) = R(P)$  ist, gilt  $\mathcal{L}P = P\mathcal{L}$ . Folglich ist  $R(V)$  ein reduzierender Teilraum von  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus 0$ , wobei  $\mathcal{L}_0 : R(V) \rightarrow R(V)$  die Restriktion von  $\mathcal{L}$  auf  $R(V)$  ist.

Der entscheidende Schritt bei Konstruktion eines selbstadjungierten Operator gehörend zum Randwertproblem (2.1.1), (2.2.3) ist die Einführung des folgenden Raumes: Es sei

$$Z = \left\{ f \in \ell_2^H \mid \exists y \text{ mit } \|y\|_{\ell_2^H} = 0, J(y_{n+1} - y_n) = H_n f_n, y \text{ genügt (2.2.3)} \right\}.$$

Da solche Folgen  $y$  das Nullelement im Hilbertraum  $\ell_2^H$  repräsentieren, kann man  $Z$  als Raum der Bilder von Null bezüglich des gesuchten "Operators" interpretieren. Im nun folgenden Lemma wird der Kern von  $\mathcal{L}_0$  mit  $N(\mathcal{L}_0)$  bezeichnet.

**Lemma 2.2.4** *Es gilt  $N(\mathcal{L}_0) = VZ$*

**Beweis.** Sei  $g \in R(V)$  mit  $\mathcal{L}_0 g = 0$  gegeben. Dann gibt es ein  $f \in \ell_2^H$  mit  $g = Vf$ . Folglich gilt für  $n \in \{1, \dots, N\}$

$$H_n^{1/2} \sum_{j=1}^N K(n, j) H_j f_j = 0.$$

Definiert man für alle  $n \in \{1, \dots, N+1\}$

$$y_n = \sum_{j=1}^N K(n, j) H_j f_j,$$

dann erfüllt  $y$  die Randbedingungen (2.2.3) und genügt für alle  $n \in \{1, \dots, N\}$  der Gleichung  $J(y_{n+1} - y_n) = H_n f_n$ . Wegen  $H_n y_n = 0$  für alle  $n \in \{1, \dots, N\}$

ist also  $f \in Z$  und  $g \in VZ$ .

Ist umgekehrt  $f \in Z$  und  $g = Vf$ , dann gibt es eine Folge  $y$  mit

$$H_n y_n = 0, \quad J(y_{n+1} - y_n) = H_n f_n$$

für alle  $n \in \{1, \dots, N\}$  und  $y$  erfüllt die Randbedingungen (2.2.3). Jetzt wird die Eigenschaft von  $K$  benutzt, um zu zeigen, dass für alle  $n \in \{1, \dots, N+1\}$

$$y_n = \sum_{j=1}^N K(n, j) H_j f_j$$

ist. Folglich gilt für alle  $n \in \{1, \dots, N\}$ :

$$(\mathcal{L}_0 g)(n) = (\mathcal{L}_0 Vf)(n) = H_n^{1/2} y_n = 0.$$

Folglich ist  $g \in N(\mathcal{L}_0)$ .

**Theorem 2.2.1** *Die normierten Eigenfunktionen von*

$$J(y_{n+1} - y_n) = z H_n y_n, \quad (\alpha_1, \alpha_2) y_1 = (\beta_1, \beta_2) y_{N+1} = 0$$

*bilden eine orthogonale Basis des Hilbertraumes  $\ell_2^H \ominus Z$ .*

**Beweis.** Da  $\mathcal{L}_0$  kompakt und selbstadjungiert ist, bilden die normierten Eigenfunktionen, die zu einem Eigenwert ungleich Null gehören, eine orthogonale Basis von  $R(V) \ominus N(\mathcal{L}_0)$ . Wendet man nun die unitäre Abbildung  $V^{-1} : R(V) \rightarrow \ell_2^H$  an und benutzt die Lemmata 2.2.3 und 2.2.4, so erhält man die Aussage des Theorems.

Es war möglich Theorem 2.2.1 zu beweisen, indem das zu (2.1.1) und (2.2.3) gehörende Eigenwertproblem erfolgreich in Zusammenhang mit einem selbstadjungierten Operator in einem Hilbertraum gebracht wurde. Jetzt wird gezeigt, dass ein direkterer Weg zum selben Resultat führt. Zunächst wird die Relation  $\mathcal{R}_0$  durch

$$\mathcal{R}_0 = \{(y, f) | J(y_{n+1} - y_n) = H_n f_n, y \text{ genügt den Randbedingungen}\}$$

definiert. Nun gilt  $(y, f) \in \mathcal{R}_0$  genau dann, wenn

$$y_n = \sum_{j=1}^N K(n, j) H_j f_j \tag{2.2.6}$$

ist. Zusätzlich definiert man

$$\mathcal{R} = \left\{ (\tilde{y}, \tilde{f}) : (y, f) \in \mathcal{R}_0 \right\} \subset \ell_2^H \oplus \ell_2^H.$$

( Die Tilde wird benutzt, wenn betont werden soll, dass Elemente aus  $\ell_2^H$  betrachtet werden.) Das Ziel ist es, mithilfe der Relation  $\mathcal{R}$  einen Operator zu definieren. Für ein gegebenes  $y \in \ell_2^H$  könnte kein  $f \in \ell_2^H$  existieren mit  $(y, f) \in \mathcal{R}$ . Ferner muß das  $f \in \ell_2^H$  mit  $(y, f) \in \mathcal{R}$ , sofern ein solches  $f$  existiert, nicht eindeutig bestimmt sein. Diese Überlegungen motivieren die Einführung der Räume

$$D = \left\{ y \in \ell_2^H : \exists f \in \ell_2^H \text{ mit } (y, f) \in \mathcal{R} \right\}$$

-dies ist die Projektion von  $\mathcal{R}$  auf die erste Komponente- und wie oben setzt man

$$Z = \left\{ f \in \ell_2^H : (0, f) \in \mathcal{R} \right\}.$$

Nun stellt man fest, dass Folgendes gilt:  $(\tilde{y}, \tilde{f}) \in \mathcal{R} \iff V\tilde{y} = \mathcal{L}_0 V\tilde{f}$ . Ist die letzte Gleichung erfüllt, so gilt  $\tilde{y} = \mathcal{K}H\tilde{f}$ . Nimmt man einen beliebigen Repräsentanten  $f \in \tilde{f}$  und definiert einen Repräsentanten  $y$  von  $\tilde{y}$  durch (2.2.6). Dann ist  $(y, f) \in \mathcal{R}_0$  und folglich  $(\tilde{y}, \tilde{f}) \in \mathcal{R}$ . Die umgekehrte Richtung wird durch Umkehrung der Argumente bewiesen.

Da  $V$  den Raum  $\ell_2^H$  unitär auf  $R(V) \subset \ell_2^I$  abbildet, ist  $V$  eine invertierbare Abbildung auf  $R(V)$ , und folglich gilt:

$$(y, f) \in \mathcal{R} \iff y = V^{-1}\mathcal{L}_0 V f.$$

Dies zeigt, dass  $Z = N(V^{-1}\mathcal{L}_0 V)$  ist, und da dieser Operator selbstadjungiert ist, gilt:

$$D = R(V^{-1}\mathcal{L}_0 V) = N(V^{-1}\mathcal{L}_0 V)^\perp = Z^\perp = \ell_2^H \ominus Z.$$

Man erhält also einen selbstadjungierten Operator

$$T : D \rightarrow D, \quad T = ((V^{-1}\mathcal{L}_0 V)|_D)^{-1}.$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems vom Theorem 2.2.1 sind genau die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $T$ .

Ein Vektor  $\tilde{y} \in \ell_2^H$  liegt in  $D$  genau dann, wenn es einen eindeutig bestimmten Repräsentanten  $y \in \tilde{y}$  und ein  $f$  gibt derart, dass  $y$  die Randbedingungen erfüllt und  $J(y_{n+1} - y_n) = H_n f_n$  ist. In diesem Fall ist  $\tilde{f} = T\tilde{y}$  eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft von oben und es gilt  $\tilde{f} \in D$ .

## 2.3 Spektralmaße

Da der zugrundeliegende Hilbertraum  $\mathcal{H} = D = \ell_2^H \oplus Z$  endlich dimensional ist, hat der oben eingeführte Operator  $T$  rein diskretes Spektrum und es ist möglich, mithilfe der zugehörigen Eigenfunktionen eine spektrale Darstellung anzugeben. Es wird dazu wie folgt verfahren. Sei  $u(n, z)$  die Lösung von (2.1.1) mit der Anfangsbedingung  $u(1, z) = \begin{pmatrix} -\alpha_2^* \\ \alpha_1^* \end{pmatrix}$  (man schreibt  $u(n)$  statt  $u_n$ ). Im Folgenden werden diese beiden Notationen synonym verwendet).  $u$  genügt der Randbedingung im Punkte  $n = 1$  und die Spalten spannen den Raum der Lösungen von (2.1.1) mit dieser Anfangsbedingung auf. Jetzt wird die Abbildung  $U$  durch

$$(Uf)(\lambda) = \sum_{n=1}^N u^*(n, \lambda)H(n)f(n) \quad (2.3.1)$$

eingeführt. Das Ziel ist nun, ein Spektralmaß  $\rho$  so einzuführen, dass  $U$  den Raum  $\mathcal{H}$  unitär auf  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  abbildet. Wenn  $\lambda$  ein Eigenwert ist, ist es möglich, eine Matrix  $P_\lambda \in \mathbb{C}^{d \times d}$  in der folgenden Weise zu finden, so dass die Spalten von  $u(\cdot, \lambda)P_\lambda$  den Eigenraum  $N(T - \lambda)$  aufspannen. Ferner kann man annehmen, dass  $P_\lambda$  eine orthogonale Projektion ist. Nun wird  $N_\lambda = \sum_{n=1}^N u^*(n, \lambda)H(n)u(n, \lambda)$  definiert. Faßt man  $P_\lambda N_\lambda P_\lambda$  als einen Operator auf  $R(P_\lambda)$  auf, so ist dieser invertierbar, da für alle  $v \in R(P_\lambda)$  stets  $v^* N_\lambda v > 0$  gilt, weil die Norm einer Eigenfunktion von Null verschieden ist. Jetzt ist man in der Lage, das Spektralmaß zu definieren:

$$\rho = \sum P_\lambda (P_\lambda N_\lambda P_\lambda)^{-1} P_\lambda \delta_\lambda. \quad (2.3.2)$$

Es wird über die Eigenwerte summiert. Dabei ist  $\delta_\lambda$  das Dirac Maß im Punkte  $\lambda$ . Ferner sei nochmal darauf hingewiesen, dass man  $(P_\lambda N_\lambda P_\lambda)$  als einen Operator auf  $R(P_\lambda)$  auffasst. Offensichtlich ist  $\rho$  ein matrixwertiges Maß. Das Skalarprodukt in  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  ist durch  $\langle f, g \rangle = \int f^*(\lambda)d\rho(\lambda)g(\lambda)$  gegeben.

**Theorem 2.3.1**  $U : \mathcal{H} \rightarrow L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  ist unitär.

**Beweis.** Sei  $E$  ein Eigenwert und sei  $f(n) = u(n, E)a$  mit einem  $a \in R(P_E)$ . Dann gilt im Raum  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$

$$\begin{aligned} (Uf)(\lambda) &= \sum_{n=1}^N u^*(n, \lambda)H(n)u(n, E)a = \sum_{n=1}^N P_\lambda u^*(n, \lambda)H(n)u(n, E)a \\ &= \delta_{\lambda E} P_E N_E P_E a. \end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung wurde die Tatsache benutzt, dass Eigenfunktionen, die zu unterschiedlichen Eigenwerten gehören, orthogonal zueinander sind, dass  $Pu^* = (uP)^*$  ist, und dass die Spalten von  $uP$  Eigenfunktionen sind.

Sei  $E'$  ein Eigenwert,  $b \in R(P_{E'})$  und  $g(n) = u(n, E')b$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle Uf, Ug \rangle_{L_2(\mathbb{R}, d\rho)} &= \delta_{EE'} a^* P_E N_E P_E (P_E N_E P_E)^{-1} P_E N_E P_E b = \delta_{EE'} a^* N_E b \\ &= \delta_{EE'} a^* \sum_{n=1}^N u^*(n, E) H(n) u(n, E) b = \langle f, g \rangle_{\ell_2^H} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Da die Funktionen  $f = u(\cdot, E)a$  den Raum  $\mathcal{H}$  aufspannen, ist  $U$  isometrisch. Da die Bilder  $Uf = \delta_{\lambda E} P_E N_E P_E a$  den Raum  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  aufspannen, ist  $U$  unitär.

Man kann auch  $U$  als einen Operator von  $\ell_2^H$  nach  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  auffassen. Wie das folgende Theorem lehrt, ist  $U$  dann eine partielle Isometrie.

**Theorem 2.3.2** *Es gilt  $N(U) = Z$ , und  $U$  ist eine partielle Isometrie.*

**Beweis.** Da  $U$  eine unitäre Abbildung von  $\mathcal{H} = Z^\perp$  nach  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  ist, genügt es zu zeigen, dass  $Uf = 0$  in  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  ist für alle  $f \in Z$ . Sei nun  $f \in Z$ . Dann existiert eine Folge  $y$ , so dass  $J(y_{n+1} - y_n) = H_n f_n$ ,  $H_n y_n = 0$  ( $n = 1, \dots, N$ ), und  $y$  erfüllt die Randbedingungen. Jetzt folgt aus der Greenschen Identität (2.2.1):

$$(Uf)(\lambda) = \sum_{n=1}^N u_n^*(\lambda) H_n f_n = \lambda \sum_{n=1}^N u_n^* H_n y_n + u_n^* J y_n \Big|_{n=1}^{n=N+1} = u_{N+1}^* J y_{N+1}.$$

Dabei wurde benutzt, dass  $u_1^* J y_1 = 0$  ist, da  $u$  und  $y$  die Randbedingung im Punkte  $n = 1$  erfüllen.

Da man  $(Uf)(\lambda) = u^*(N+1, \lambda) J y(N+1)$  als ein Element von  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  auffassen wollte, kann man  $\lambda$  auf die Eigenwerte beschränken. Folglich gilt im Raum  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$

$$(Uf)(\lambda) = (u(N+1, \lambda) P_\lambda)^* J y(N+1) = 0,$$

da sowohl die Spalten von  $(u(\cdot, \lambda) P_\lambda)$  als auch  $y$  die Randbedingung im Punkte  $n = N+1$  erfüllen.

Das folgende Korollar ist eine direkte Konsequenz der Tatsache, dass  $U$  eine partielle Isometrie ist.

**Korollar 2.3.1** Für alle  $f \in \ell_2^H(\{1, \dots, N\})$  gilt  $\|Uf\|_{L_2(\mathbb{R}, d\rho)} \leq \|f\|_{\ell_2^H}$ .

Es wird aber folgende Konsequenz des obigen Korollars benötigt:

**Theorem 2.3.3** Sei  $P_n$  die orthogonale Projektion auf  $R(H_n) \subset \mathbb{C}^{2d}$ . Dann gilt für  $n = 1, \dots, N$ :

$$\int_{\mathbb{R}} H_n^{1/2} u(n, \lambda) d\rho(\lambda) u^*(n, \lambda) H_n^{1/2} \leq P_n. \quad (2.3.3)$$

**Beweis.** Sei  $w \in \mathbb{C}^{2d}$  beliebig aber fest vorgegeben und sei  $f_k = w\delta_{kn}$ . Dann ist  $(Uf)(\lambda) = u^*(n, \lambda) H_n w$  und mithilfe von Korollar 2.3.1 ergibt sich:

$$w^* \int_{\mathbb{R}} H_n u(n, \lambda) d\rho(\lambda) u^*(n, \lambda) H_n w \leq w^* H_n w.$$

Dies ist äquivalent zu

$$(H_n^{1/2} w)^* \int_{\mathbb{R}} H_n^{1/2} u(n, \lambda) d\rho(\lambda) u^*(n, \lambda) H_n^{1/2} H_n^{1/2} w \leq (H_n^{1/2} w)^* P_n H_n^{1/2} w. \quad (2.3.4)$$

Wenn die Matrix der linken Seite von (2.3.3) mit  $I$  bezeichnet wird, dann besagt (2.3.4), dass für alle  $v \in R(H_n)$   $v^* I v \leq v^* P_n v$  gilt. Da offensichtlich für  $v \in R(H_n)^\perp = N(H_n)$   $I v = P_n v = 0$  ist, ist somit das Theorem bewiesen.



## 2.4 $M$ Funktionen

In diesem Abschnitt wird ein alternativer Zugang zur Konstruktion des Spektralmaßes  $\rho$  vorgestellt. Es wird hier mit den Titchmarsh-Weyl  $M$  Funktionen gearbeitet. Vergleiche hierzu die Ausführungen in [5] [13] [23] und [40].

Bei diesem Zugang führt man keine Operatoren ein, sondern benutzt direkt die Gleichung (2.1.1). Sei  $Y(., z)$  eine Fundamentalmatrix von (2.1.1) mit der Anfangsbedingung  $Y(1, z) = \begin{pmatrix} \alpha_1^* & -\alpha_2^* \\ \alpha_2^* & \alpha_1^* \end{pmatrix}$ . Die letzten  $d$  Spalten der  $2d \times 2d$  Matrix  $Y$  sind die Lösung  $u$  aus dem letzten Abschnitt. Sei  $Y = (v, u)$  und  $M \in \mathbb{C}^{d \times d}$ , so definiert man

$$F_M(n, z) = Y(n, z) \begin{pmatrix} 1 \\ M \end{pmatrix} = v(n, z) + u(n, z)M.$$

Die Titchmarsh-Weyl  $M$  Funktion des Problems (2.1.1) und (2.2.3) wird dadurch definiert, dass gefordert wird, dass  $F_M$  die Randbedingung im Punkte  $n = N + 1$  erfüllt. Also definiert man für  $z \in \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}^+ \mid \text{Im } z > 0\}$  die zum Problem (2.1.1), (2.2.3) gehörende  $M$  Funktion  $M(z) = M_{\alpha, \beta}^{(N)}(z)$  durch die Forderung  $(\beta_1, \beta_2)F_M(N + 1, z) = 0$ . Es sei darauf hingewiesen, dass solch ein  $M$  immer existiert, da sonst nicht reelle Eigenwerte existieren würden. Wie das folgende Theorem lehrt, ist die  $M$  Matrix eindeutig bestimmt.

**Theorem 2.4.1** *Schreibt man  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  und  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ , dann gilt*

$$M(z) = -(\beta_1 u_1(N + 1, z) + \beta_2 u_2(N + 1, z))^{-1} (\beta_1 v_1(N + 1, z) + \beta_2 v_2(N + 1, z))$$

*und folglich ist  $M$  holomorph in  $\mathbb{C}^+$  und eine rationale Funktion.*

**Beweis.** Wegen  $(\beta_1, \beta_2)F_M(N + 1, z) = 0$  ist

$$(\beta_1, \beta_2) \begin{pmatrix} v_1(N + 1, z) & u_1(N + 1, z) \\ v_2(N + 1, z) & u_2(N + 1, z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ M(z) \end{pmatrix} = 0.$$

Folglich ist

$$(\beta_1 v_1(N + 1, z) + \beta_2 v_2(N + 1, z)) + (\beta_1 u_1(N + 1, z) + \beta_2 u_2(N + 1, z)) M(z) = 0.$$

Da  $z$  kein Eigenwert ist und da für alle  $c \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$   $\begin{pmatrix} u_1(., z) \\ u_2(., z) \end{pmatrix} c$  eine Lösung von (2.1.1) ist, die im Punkte  $n = 1$  die Randbedingung erfüllt, muß für alle  $c \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$   $(\beta_1, \beta_2) \begin{pmatrix} u_1(N + 1, z) \\ u_2(N + 1, z) \end{pmatrix} c \neq 0$  sein. Folglich ist  $(\beta_1, \beta_2) \begin{pmatrix} u_1(N + 1, z) \\ u_2(N + 1, z) \end{pmatrix}$  invertierbar. Also folgt aus der obigen Gleichung die Behauptung.

Für ein  $z \in \mathbb{C}^+$  und ein  $M \in \mathbb{C}^{d \times d}$ , wobei  $M$  nicht notwendig mit einem  $M_{\alpha, \beta}^{(N)}(z)$  von oben übereinstimmen muß, führt man

$$E_z(M) = \operatorname{Im} z \sum_{n=1}^N F_M^*(n, z) H(n) F_M(n, z) - \operatorname{Im} M \quad (2.4.1)$$

ein. Dabei ist  $\operatorname{Im} M = (1/2i)(M - M^*)$ .

**Theorem 2.4.2** *Seien  $z \in \mathbb{C}^+$  und  $M \in \mathbb{C}^{d \times d}$ . Dann ist  $M = M_{\alpha, \beta}^{(N)}(z)$  für eine Randbedingung  $\beta$  genau dann, wenn  $E_z(M) = 0$  ist.*

**Beweis.** Zunächst wird folgende Identität bewiesen:

$$E_z(M) = \frac{1}{2i} F_M^*(N+1, z) J F_M(N+1, z). \quad (2.4.2)$$

Dieses folgt direkt aus der Greenschen Formel (2.2.1). Denn es gilt:

$$\begin{aligned} F_M^*(N+1, z) J F_M(N+1, z) - F_M^*(1, z) J F_M(1, z) = \\ \langle F_M(\cdot, z), z F_M(\cdot, z) \rangle_{\ell_2^H} - \langle z F_M(\cdot, z), F_M(\cdot, z) \rangle_{\ell_2^H} \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} F_M^*(N+1, z) J F_M(N+1, z) = \\ F_M^*(1, z) J F_M(1, z) + 2i \operatorname{Im} z \sum_{n=1}^N F_M^*(n, z) H(n) F_M(n, z). \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} F_M^*(1, z) J F_M(1, z) &= (1, M^*) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \alpha_1^* & -\alpha_2^* \\ \alpha_2^* & \alpha_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ M \end{pmatrix} \\ &= M^* - M = -2i \operatorname{Im} M \end{aligned}$$

ist, haben wir somit die Gleichung (2.4.2) bewiesen.

Sei nun  $M = M_\beta(z)$  für eine Randbedingung  $\beta$ , dann folgt aus der Konstruktion von  $M_\beta$ , dass  $F_{M_\beta}$  die Randbedingung  $\beta$  bei  $n = N+1$  erfüllt und somit muß wegen (2.4.2)  $E_z(M_\beta) = 0$  sein.

Nimmt man umgekehrt an, dass  $E_z(M) = 0$  ist, dann definiert man

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (1, M^*) Y^*(N+1, z) J,$$

wobei  $\gamma_{1,2} \in \mathbb{C}^{d \times d}$  ist. Dann ist wegen (2.4.2)  $(\gamma_1, \gamma_2)F_M(N+1, z) = 0$ . Ferner gilt wegen (2.4.2)

$$\gamma_1\gamma_2^* - \gamma_2\gamma_1^* = -(\gamma_1, \gamma_2)J \begin{pmatrix} \gamma_1^* \\ \gamma_2^* \end{pmatrix} = -F_M^*(N+1, z)JF_M(N+1, z) = 0.$$

Da  $(\gamma_1, \gamma_2)$  vollen Rang hat, ist  $A := \gamma_1\gamma_1^* + \gamma_2\gamma_2^*$  invertierbar. Setzen wir jetzt  $\beta_j = A^{-1/2}\gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ), dann ist offensichtlich  $(\beta_1, \beta_2)$  eine mögliche Randbedingung, d.h.  $(\beta_1, \beta_2)$  erfüllt die Bedingungen (2.2.2), und es gilt  $(\beta_1, \beta_2)F_M(N+1, z) = 0$ . Dies bedeutet aber, dass  $M = M_\beta(z)$  ist.

Für Gleichungen zweiter Ordnung ( $d = 1$ ) sind die Mengen

$$\mathcal{C}_\alpha^{(N)}(z) = \{M_\beta(z) | \beta \text{ Randbedingung}\} = \{M \in \mathbb{C}^{d \times d} : E_z(M) = 0\}$$

Kreise in der komplexen Ebene. Wenn  $N$  wächst, sind diese Kreise ineinandergeschachtelt. Für  $d \geq 2$  hat man kompliziertere Objekte, aber sie sind im folgenden Sinne ineinandergeschachtelt: Werden die Mengen "Kreise"

$$\mathcal{D}_\alpha^{(N)}(z) = \{M \in \mathbb{C}^{d \times d} : E_z(M) \leq 0\}$$

definiert, so gilt  $\mathcal{D}_\alpha^{(N_1)}(z) \supset \mathcal{D}_\alpha^{(N_2)}(z)$ , wenn  $N_1 \leq N_2$  ist. Dies folgt direkt aus Gleichung (2.4.1).

Gleichung (2.4.1) besagt auch, dass  $M_\beta$  eine Herglotzfunktion ist, d.h.  $M_\beta(z)$  ist auf der oberen Halbebene definiert und dort holomorph und es gilt  $M_\beta(z) \geq 0$ . Folglich existieren Matrizen  $A, B \in \mathbb{C}^{d \times d}$ ,  $A = A^*$ ,  $B \geq 0$ , und ein matrixwertiges positives Borelmaß  $\nu$  auf  $\mathbb{R}$  mit  $\int_{\mathbb{R}} d(\text{Spur } \nu)(t)/(t^2 + 1) < \infty$  derart, dass

$$M_\beta(z) = A + Bz + \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) d\nu(t). \quad (2.4.3)$$

$A, B$  und  $\nu$  sind eindeutig bestimmt durch  $M_\beta$ . Gelegentlich ist es vorteilhaft, endliche Maße zu haben. Es ist auch möglich, (2.4.3) in der folgenden Form zu schreiben

$$M_\beta(z) = A + \int_{\overline{\mathbb{R}}} \frac{1+tz}{t-z} d\mu(t), \quad (2.4.4)$$

wobei  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und

$$d\mu(t) = \frac{d\nu(t)}{t^2+1} + B\delta_\infty$$

ist. Die Darstellung (2.4.4) hat den Vorteil, dass  $\mu$  ein Maß auf dem kompakten Raum  $\overline{\mathbb{R}}$  ist.

Nun ist man in der Lage, die  $M$  Funktionen mit den Ausführungen des letzten Abschnittes in Verbindung zu bringen.

**Theorem 2.4.3** *Das Maß  $\nu$  aus der Herglotzdarstellung (2.4.3) von  $M_\beta$  ist das Spektralmaß  $\rho$  aus (2.3.2).*

Dies ist nicht überraschend, im Gegenteil ist es eines der wesentlichen Punkte der Weyl Konstruktion.

**Beweis.** Die Norm von  $F = F_{M_\beta}$  wird auf zwei Arten berechnet. Zuerst folgt mithilfe von (2.4.1) und Theorem 2.4.2

$$\sum_{n=1}^N F(n, z)^* H(n) F(n, z) = \frac{\operatorname{Im} M_\beta(z)}{\operatorname{Im} z}. \quad (2.4.5)$$

Dann wird die Norm von  $F$  berechnet, indem die Tatsache verwendet wird, dass  $U : \mathcal{H} \rightarrow L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  aus (2.3.1) unitär ist. Mithilfe der Greenschen Identität (2.2.1) folgt, dass in  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$

$$\begin{aligned} (\lambda - z)(UF)(\lambda) &= (\lambda - z) \sum_{n=1}^N u^*(n, \lambda) H(n) F(n, z) = -u^*(n, \lambda) JF(n, z) \Big|_{n=1}^{N+1} \\ &= u^*(1, \lambda) JF(1, \lambda) = (-\alpha_2, \alpha_1) J \begin{pmatrix} \alpha_1^* - \alpha_2^* M_\beta(z) \\ \alpha_2^* + \alpha_1^* M_\beta(z) \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

ist. Da sowohl für einen Eigenwert  $\lambda$   $u(\cdot, \lambda)$  als auch  $F(\cdot, z)$  die Randbedingung im Punkte  $n = N + 1$  erfüllen, verschwindet  $u^*(N + 1, \lambda) JF(N + 1, z)$ . Wegen  $N(U) = Z$  (Theorem 2.3.2) ist in  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$   $(\lambda - z)UP_Z F(\lambda) = 0$  und folglich muß in  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  die Beziehung  $(\lambda - z)UP_{Z^\perp} F(\lambda) = 1$  gelten, wobei  $P_Z$  und  $P_{Z^\perp}$  die orthogonalen Projektionen auf  $Z$  beziehungsweise auf  $Z^\perp$  sind. Aus Theorem 2.3.1 ergibt sich also folgende Identität für die Norm von  $F$

$$\sum_{n=1}^N F(n, z)^* H(n) F(n, z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\rho(\lambda)}{|\lambda - z|^2} + \sum_{n=1}^N (P_Z F)^*(n, z) H(n) (P_Z F)(n, z). \quad (2.4.6)$$

Um zu zeigen, dass die Summe auf der rechten Seite von Gleichung 2.4.6 unabhängig von  $z$  ist, fixiert man eine Folge  $f \in Z$ . Zu dieser Folge gehört wegen der Definition von  $Z$  eine Folge  $y$ , die die Randbedingungen erfüllt, mit  $J(y_{n+1} - y_n) = H_n f_n$ ,  $H_n y_n = 0$ . Eine ähnliche Rechnung, wie sie beim Beweis des Theorems 2.3.2 benutzt wurde, zeigt, dass

$$\sum_{n=1}^N F^*(n, z) H(n) f(n) = -F^*(1, z) Jy(1)$$

ist. Nun folgt wegen der Definition von  $F$

$$\sum_{n=1}^N F^*(n, z) H(n) f(n) = (-\alpha_2, \alpha_1) y(1).$$

Das Skalarprodukt einer Spalte von  $F$  mit einer Folge  $f$  aus  $Z$  ist also unabhängig von  $z \in \mathbb{C}^+$ . Folglich muß  $P_Z F(\cdot, z)$  unabhängig von  $z$  sein. Deshalb muß wegen (2.4.5) und (2.4.6) es eine konstante Matrix  $B \geq 0$  geben mit

$$\operatorname{Im} M_\beta(z) = B \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} z \int_{\mathbb{R}} \frac{d\rho(t)}{|t - z|^2}.$$

Da das Maß aus der Herglotzdarstellung von  $M$  eindeutig bestimmt ist durch  $\operatorname{Im} M$ , zeigt ein Vergleich mit (2.4.3), dass  $\nu = \rho$  ist. Ist  $\mu$  das endliche Maß aus (2.4.4), so gilt  $d\mu(t) = d\rho(t)/(t^2 + 1) + B\delta_\infty$ .

## 2.5 Spektralmaße des Halbachsenproblems

Nun wird das zur Gleichung (2.1.1) gehörende Randwertproblem auf der Halbachse  $n \in \mathbb{N}$  mit einer Randbedingung  $\alpha$  im Punkte  $n = 1$  betrachtet und Spektralmaße für dieses Problem werden eingeführt. Dies scheint ein ziemlich subtiles Problem zu sein, da es mehrere plausible Möglichkeiten gibt, solche Spektralmaße zu definieren. Ferner ist nicht klar, welche Beziehungen zwischen diesen Definitionen bestehen. Zum Beispiel könnte man ein Spektralmaß  $\rho$  derart einführen, dass die Abbildung  $U$  von  $\ell_2^H(\{1, \dots, N\})$  nach  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  für alle  $N \in \mathbb{N}$  eine partielle Isometrie ist. Oder man könnte fordern, dass diese Abbildungen isometrisch sind auf den Räumen  $\ell_2^H(\{1, \dots, N\}) \ominus Z_N$ . Im letzten Falle wird man nur Randbedingungen  $\beta$  betrachten, für welche diese Räume ineinander enthalten sind. Man könnte auch versuchen, selbstadjungierte Operatoren für dieses Halbachsenproblem einzuführen, und dann die Spektralmaße dieser Operatoren zu betrachten.

Hier wird aber ein für die klassische Weyl Theorie typischer Zugang gewählt. Es werden Grenzwertpunkte der Spektralmaße auf  $\{1, \dots, N\}$  für  $N \rightarrow \infty$  betrachtet. Mit dem nun folgenden Lemma wird die Existenz solcher Grenzwertpunkte bewiesen. Es wird sich als vorteilhaft erweisen, die Maße  $\mu$  aus (2.4.4) anstatt  $\rho$  zu betrachten.

**Lemma 2.5.1** *Es gibt eine Konstante  $C$  derart, dass für alle  $N \in \mathbb{N}$  und jede Randbedingung  $\beta$  Spur  $\mu_\beta^{(N)}(\overline{\mathbb{R}}) \leq C$  ist.*

**Beweis.** Aus der Gleichung (2.4.4) folgt, dass  $\mu_\beta^{(N)}(\overline{\mathbb{R}}) = \text{Im } M_\beta^{(N)}(i)$  ist. Diese sind gleichmäßig beschränkt, da alle Matrizen  $M_\beta^{(N)}(i)$  in der kompakten Menge  $\mathcal{D}^{(1)}(i)$  liegen.

Jetzt folgt aus dem Lemma 2.5.1 mithilfe des Theorems von Banach-Alaoglu, dass es schwach  $*$  konvergente Teilfolgen  $\mu_{\beta_j}^{(N_j)} \rightarrow \mu$  gibt. Nun transformiert man zurück und beachtet einen möglichen diskreten Punkt im Unendlichen nicht und nennt jedes Maß  $d\rho(t) = (t^2 + 1) d\mu(t)$  definiert auf Borelmengen von  $\mathbb{R}$  ein Spektralmaß des Halbachsenproblems.

Diese Definition ist recht allgemein und man kann nicht erwarten, dass  $\rho$  viele Eigenschaften hat. Es trifft aber zu, dass  $U$  aus (2.3.1)  $\ell_2^H(\mathbb{N})$  kontraktiv, aber im allgemeinen nicht surjektiv, auf  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  abbildet.

**Theorem 2.5.1** *Sei  $\rho$  eines der oben eingeführten Spektralmaße, so gilt für*

ein  $N \in \mathbb{N}$  und ein  $f \in \ell_2^H(\{1, \dots, N\})$

$$\|Uf\|_{L_2(\mathbb{R}, d\rho)} \leq \|f\|_{\ell_2^H}. \quad (2.5.1)$$

Offensichtlich besitzt  $U$  wegen der Eigenschaft (2.5.1) eine eindeutige Fortsetzung auf  $\ell_2^H(\mathbb{N})$ , die wir auch mit  $U$  bezeichnen. Diese Abbildung  $U$  erfüllt auch die Gleichung (2.5.1).

**Beweis.** Sei  $f \in \ell_2^H(\{1, \dots, N\})$ . Ferner sei  $\phi$  eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}$  mit einem kompakten Träger, wobei  $0 \leq \phi \leq 1$  und  $\phi(0) = 1$  ist. Da für jedes  $N' \in \mathbb{N}$   $U$  von  $\ell_2^H(\{1, \dots, N'\})$  nach  $L_2(\mathbb{R}, d\rho_{\beta'}^{N'})$  eine partielle Isometrie ist, gilt für alle  $N_j \geq N$  und  $R > 0$ :

$$\|f\|_{\ell_2^H}^2 \geq \int_{\mathbb{R}} (Uf)^*(\lambda) d\rho_{\beta_j}^{(N_j)}(\lambda) (Uf)(\lambda) \geq \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{\lambda}{R}\right) (Uf)^*(\lambda) d\rho_{\beta_j}^{(N_j)}(\lambda) (Uf)(\lambda).$$

Durch den Grenzwertübergang  $j \rightarrow \infty$  erhält man

$$\|f\|_{\ell_2^H}^2 \geq \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{\lambda}{R}\right) (Uf)^*(\lambda) d\rho(\lambda) (Uf)(\lambda).$$

Nun ergibt sich die Ungleichung (2.5.1) durch den Grenzwertübergang  $R \rightarrow \infty$ .

Theorem 2.5.1 besitzt das folgende wichtige Korollar.

**Theorem 2.5.2** *Sei  $\rho$  ein Spektralmaß des Halbachsenproblems und sei  $P_n$  die orthogonale Projektion auf  $R(H_n) \subset \mathbb{C}^{2d}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :*

$$\int_{\mathbb{R}} H_n^{1/2} u(n, \lambda) d\rho(\lambda) u^*(n, \lambda) H_n^{1/2} \leq P_n.$$

**Beweis.** Das Theorem wird wie Theorem 2.3.3 bewiesen, wobei das Korollar 2.3.1 hier durch Theorem 2.5.1 ersetzt wird.

Das nächste Ziel dieses Abschnittes ist es, zu beweisen, dass die absolutstetigen Anteile zweier Spektralmaße, die zu zwei unterschiedlichen linken Randbedingungen im Punkte  $n = 1$  gehören, äquivalent sind. Um dies zu zeigen, wird zunächst eine Transformationsformel für die zu den Spektralmaßen auf der Halbachse gehörenden  $M$  Funktionen bewiesen und mit deren Hilfe und einem Resultat von Gesztesy und Tsekanovskii [21] wird die oben angesprochene Äquivalenz festgestellt. Als erstes benötigt man folgendes technisches Ergebnis.

**Lemma 2.5.2** *Es gelte in der schwach \* Topologie  $\mu_N \rightarrow \mu$ . Dann gibt es eine Teilfolge  $N_j \rightarrow \infty$  derart, dass die zugehörigen  $M$  Funktionen  $M_{N_j}$  (vergleiche (2.4.4)) lokal gleichmäßig in  $\mathbb{C}^+$  konvergieren. Die zugehörige Grenzfunktion besitzt die Herglotzdarstellung*

$$M(z) = A + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z} d\mu(t),$$

wobei  $A^* = A$  ist.

Es ist wohlbekannt, dass die schwach \* Konvergenz der Maße äquivalent ist zur lokal gleichmäßigen Konvergenz der Imaginärteile der zugehörigen Herglotzfunktionen (siehe dazu [14]). Wegen der Weyl Geometrie - die Mengen  $\mathcal{D}_N(z)$  sind ineinandergeschachtelt - kann der Realteil auch konvergent gemacht werden.

**Beweis.** Wegen  $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{R}}) = C(\overline{\mathbb{R}})^*$  und der Tatsache, dass  $[t \rightarrow \frac{1+tz}{t-z}] \in C(\overline{\mathbb{R}})$  ist, konvergiert das Integral in der Herglotzdarstellung (2.4.4) punktweise. Diese Konvergenz ist offensichtlich lokal gleichmäßig. Da ferner  $A_N = \operatorname{Re} M_N(i)$  wegen  $M_N(i) \in \mathcal{D}_1(i)$  für alle  $N \in \mathbb{N}$  beschränkt bleibt, konvergiert  $A_N$  für eine geeignete Teilfolge.

Im Folgenden wird gefordert, dass

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} N(H_n) = \{0\}$$

ist. Dies ist äquivalent zu: Wenn  $y$  die Gleichung  $J(y_{n+1} - y_n) = zH_n y_n$  für ein  $z \in \mathbb{C}$  erfüllt und  $\|y\|_{\ell_2^H} = 0$  ist, so ist  $y_n \equiv 0$ .

Jetzt wird die Wirkung einer Änderung der Randbedingungen im Punkte  $n = 1$  untersucht. Es seien  $\alpha$  und  $\gamma$  zwei Randbedingungen im Punkte  $n = 1$ , und es gelte in der schwach \* Topologie  $\mu_{\alpha, \beta_j}^{(N_j)} \rightarrow \mu_\alpha$ ,  $\mu_{\gamma, \beta_j}^{(N_j)} \rightarrow \mu_\gamma$ . Dann kann man wegen Lemma 2.5.2 annehmen, dass die zugehörigen  $M$  Funktionen lokal gleichmäßig gegen die Herglotzfunktionen  $M_\alpha$  bzw.  $M_\gamma$  konvergieren.

**Lemma 2.5.3** *Für alle  $z \in \mathbb{C}^+$  gilt die Transformationsformel*

$$M_\alpha(z) = (-\delta_2 + \delta_1 M_\gamma(z)) (\delta_1 + \delta_2 M_\gamma(z))^{-1},$$

wobei

$$\delta_1 = \alpha_1 \gamma_1^* + \alpha_2 \gamma_2^*, \quad \delta_2 = \alpha_2 \gamma_1^* - \alpha_1 \gamma_2^*.$$



**Beweis.** Für alle  $N_j \in \mathbb{N}$  gilt die folgende Transformationsformel:

$$M_{\alpha, \beta_j}^{(N_j)}(z) = \left( -\delta_2 + \delta_1 M_{\gamma, \beta_j}^{(N_j)}(z) \right) \left( \delta_1 + \delta_2 M_{\gamma, \beta_j}^{(N_j)}(z) \right)^{-1}. \quad (2.5.2)$$

Es genügt also zu zeigen, dass für alle  $z \in \mathbb{C}^+$   $\delta_1 + \delta_2 M_\gamma(z)$  invertierbar ist. Denn dann ergibt sich die zu zeigende Transformationsformal, indem man in der Gleichung (2.5.2) den Grenzwertübergang  $j \rightarrow \infty$  durchführt. Fixiert man ein  $z \in \mathbb{C}^+$  und nimmt man an, dass

$$(\delta_1 + \delta_2 M_\gamma(z)) v = 0$$

ist, dann gilt

$$(\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} \gamma_1^* & -\gamma_2^* \\ \gamma_2^* & \gamma_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ M_\gamma(z) \end{pmatrix} v = 0. \quad (2.5.3)$$

Im Folgenden sei  $F(n, z) = F_{M_\gamma}^\gamma(n, z) = Y_\gamma(n, z) \begin{pmatrix} 1 \\ M_\gamma(z) \end{pmatrix}$  und

$$F_j(n, z) = Y_\gamma(n, z) \begin{pmatrix} 1 \\ M_{\gamma, \beta_j}^{(N_j)}(z) \end{pmatrix}.$$

Da  $F_j$  die Randbedingung  $\beta_j$  im Punkte  $n = N_j + 1$  erfüllt, folgt aus der Greenschen Identität (2.2.1)

$$2i \operatorname{Im} z v^* \sum_{n=1}^{N_j} F_j^*(n, z) H(n) F_j(n, z) v = -(F_j(1, z) v)^* J F_j(1, z) v.$$

Da  $F_j(1, z) \rightarrow F(1, z)$  für  $j \rightarrow \infty$ , und da (2.5.3) besagt, dass  $(\alpha_1, \alpha_2) F(1, z) v = 0$  ist, gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v^* \sum_{n=1}^{N_j} F_j^*(n, z) H(n) F_j(n, z) v = 0.$$

Da die Summanden alle nicht negativ sind und da

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v^* F_j(n, z) H(n) F_j(n, z) v = v^* F(n, z) H(n) F(n, z) v,$$

muß für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$v^* F(n, z) H(n) F(n, z) v = 0$$

sein. Dies bedeutet aber, dass  $H(n) F(n, z) v = 0$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Somit ist gezeigt, dass  $f = Fv$  die Gleichung  $J(f_{n+1} - f_n) = z H_n f_n$  erfüllt und das Nullelement in  $\ell_2^H$  repräsentiert. Folglich muß wegen der Annahme von oben  $F(n, z) v \equiv 0$ . Im Einzellnem gilt also  $F(1, z) v = 0$ , was

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^* & -\gamma_2^* \\ \gamma_2^* & \gamma_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ M_\gamma(z) \end{pmatrix} v = 0$$

bedeutet. Folglich muß  $\begin{pmatrix} 1 \\ M_\gamma(z) \end{pmatrix} v = 0$  sein. Also ist  $v = 0$ .

**Theorem 2.5.3** *Seien  $\mu_\alpha$  und  $\mu_\gamma$  die schwach \* Grenzwerte von  $\mu_{\alpha,\beta_j}^{(N_j)}$  bzw. von  $\mu_{\gamma,\beta_j}^{(N_j)}$ . Dann sind die absolutstetigen Anteile von  $\mu_\alpha$  und  $\mu_\gamma$  äquivalent.*

Im folgenden Sinne sind die absolutstetigen Anteile äquivalent ( “mit Vielfachheiten”): Schreibt man  $d\mu_{\alpha,ac}(\lambda) = F_\alpha(\lambda) d\lambda$ ,  $d\mu_{\gamma,ac}(\lambda) = F_\gamma(\lambda) d\lambda$ , wobei die Dichten  $F$  Werte im Raum der nicht negativen  $d \times d$ -Matrizen annehmen. Definiert man nun für  $m = 0, 1, \dots, d$

$$S_m^{(\theta)} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{rank } F_\theta(\lambda) = m\} \quad (\theta = \alpha, \gamma). \quad (2.5.4)$$

Dann hat für alle  $m = 1, \dots, d$  die symmetrische Differenz  $S_m^{(\alpha)} \Delta S_m^{(\gamma)}$  das Lebesgue-Maß Null.

**Beweis.** Gesztesy und Tsekanovskii haben bewiesen, dass dieses Resultat aus der Transformationsformel für die  $M$  Funktionen aus Lemma 2.5.3 folgt. (Siehe Theorem 6.6 in [21])

## 2.6 Symplektische lineare Algebra

Sei  $V$  ein komplexer Vektorraum und sei  $\omega$  eine Bilinearform auf  $V$  mit  $\omega(v, w) = -\overline{\omega(w, v)}$ . Dann bezeichnet man  $V$  als einen *komplexen symplektischen linearen Raum* und  $\omega$  als eine *symplektische Form*, falls aus  $\omega(v, w) = 0 \forall w \in V$   $v = 0$  folgt. Symplektische Räume spielen eine wichtige Rolle bei der Untersuchung kanonischer Systeme, weil die Randform  $\omega(u, v) := u^* J v$  eine symplektische Form im Raume  $\mathbb{C}^{2d}$  ist.

Man ist häufiger interessiert an *reellen* symplektischen linearen Räumen und reellen symplektischen Mannigfaltigkeiten, da sie eine zentrale Rolle in der klassischen Mechanik spielen. Siehe dazu [29, Kapitel 1, §1] und [30, Kapitel 1, Sect. 2]. Was die Anwendungen der Methoden der komplexen symplektischen Theorie bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen betrifft, sei verwiesen auf [19].

Die wesentlichen Ergebnisse dieses Abschnittes sind Theorem 2.6.1 und Korollar 2.6.2. Das Letztere besagt, dass es Lagrangsche Unterräume gibt, die in vielen verschiedenen Richtungen liegen. Dies spielt eine wesentliche Rolle beim Beweis des Theorems 2.1.1.

Für einen Teilraum  $W \subset V$  sei der Unterraum  $W^\omega = \{v \in V : \omega(v, w) = 0 \forall w \in W\}$  definiert. Ein Unterraum  $W \subset V$  heißt *isotrop*, falls  $W \subset W^\omega$  ist, und er wird als *symplektisch* bezeichnet, wenn  $W \cap W^\omega = \{0\}$  ist.

Hier wird aber nur mit endlich dimensionalen symplektischen Räumen  $V$  gearbeitet. Folglich gilt:

**Lemma 2.6.1** *Sei  $W$  ein Unterraum von  $V$ . Dann gilt:*

$$\dim W + \dim W^\omega = \dim V, \quad W^{\omega\omega} = W.$$

**Beweis.** Die Abbildung  $A : V \rightarrow V'$ ,  $(Av)(w) = \omega(v, w)$  ist ein Isomorphismus, da Kern  $A = \{0\}$  ist. Folglich gilt:

$$\dim W^\omega = \dim AW^\omega = \dim\{F \in V' : F(v) = 0 \forall v \in W\} = \dim V - \dim W.$$

Aus der Definition von  $(\dots)^\omega$  folgt, dass  $W \subset W^{\omega\omega}$ . Wegen

$$\dim W^{\omega\omega} = \dim V - \dim W^\omega = \dim W$$

ist  $W^{\omega\omega} = W$ .

Das folgende Korollar ist eine direkte Folgerung aus dem obigen Lemma.

**Korollar 2.6.1** Sei  $(V, \omega)$  ein symplektischer Raum und  $W$  ein symplektischer Teilraum. Dann ist  $W^\omega$  ein symplektischer Teilraum mit  $V = W \dot{+} W^\omega$ .

Aus der linearen Algebra ist bekannt:

**Lemma 2.6.2** Sei  $(V, \omega)$  ein symplektischer Raum mit  $\dim V = D$ . Dann gibt es einen Isomorphismus  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}^D$  und eine invertierbare Matrix  $A \in \mathbb{C}_{D \times D}$  mit  $A^* = -A$  derart, dass für alle  $v, w \in V$  :

$$\psi(v)^* A \psi(w) = \omega(v, w).$$

**Lemma 2.6.3** Sei  $(V, \omega)$  ein symplektischer Raum mit  $\dim V = D$ . Dann gibt es einen Isomorphismus  $\widetilde{\psi} : V \rightarrow \mathbb{C}^D$  mit

$$\omega(v, w) = \widetilde{\psi}(v)^* i \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} \widetilde{\psi}(w)$$

für alle  $v, w \in V$ .

**Beweis.** Seien  $A \in \mathbb{C}_{D \times D}$  und  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}^D$  die Matrix und der Isomorphismus aus Lemma 2.6.2. Da  $iA$  eine hermitesche Matrix ist und da jede hermitesche Matrix zu einer Diagonalmatrix kongruent ist, gibt es eine invertierbare Matrix  $Q$  mit  $Q^* iA Q = \text{diag}\{I_p, -I_q\}$ , wobei

$$p := \max\{\dim W \mid W \text{ ist ein Teilraum mit } \text{Im } \omega(v, v) \geq 0 \forall v \in W\}$$

$$q := \max\{\dim W \mid W \text{ ist ein Teilraum mit } \text{Im } \omega(v, v) \leq 0 \forall v \in W\}.$$

Nun definiert man  $\widetilde{\psi}(v) := Q\psi(v)$  für alle  $v \in V$ .

Die Zahl  $p \in \{0, 1, \dots, D\}$  aus dem vorangegangenen Lemma charakterisiert den symplektischen Raum  $V$ .  $p$  ist eine Invariante unter linearen Isomorphismen, die die symplektische Form erhalten. Offensichtlich ist  $q = D - p$ .

Aus Lemma 2.6.3 folgt, dass man eine Basis  $B = \{e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q\}$  von  $V$  finden kann mit  $\omega(e_j, e_k) = i\delta_{jk}$ ,  $\omega(f_j, f_k) = -i\delta_{jk}$ , und  $\omega(e_j, f_k) = 0$ . Eine Basis mit den obigen Eigenschaften wird im Folgenden als eine *symplektische Basis* bezeichnet.

**Lemma 2.6.4** Sei  $W$  ein Teilraum des symplektischen Raumes  $(V, \omega)$ . Dann ist  $W/W \cap W^\omega$  ein symplektischer Raum.

**Beweis.** Für  $v \in W$  sei  $[v] := v + W \cap W^\omega \in W/W \cap W^\omega$ . Da für alle  $v, w \in W$  und  $s, t \in W \cap W^\omega$   $\omega(v+t, w+s) = \omega(v, w)$  ist, ist  $\tilde{\omega} : W/W \cap W^\omega \times W/W \cap W^\omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\tilde{\omega}([v], [w]) = \omega(v, w)$  wohldefiniert. Offensichtlich gilt für alle  $[v], [w] \in W/W \cap W^\omega$   $\tilde{\omega}([v], [w]) = -\tilde{\omega}([w], [v])$ . Sei nun  $[v] \in W/W \cap W^\omega$  und es gelte für alle  $[w] \in W/W \cap W^\omega$   $\tilde{\omega}([v], [w]) = 0$ . Dann ist für alle  $w \in W$   $\omega(v, w) = 0$ . Folglich muß  $v \in W \cap W^\omega$  sein. Das bedeutet aber, dass  $[v] = 0$  ist. Damit ist gezeigt, dass  $\tilde{\omega}$  eine symplektische Form ist.

**Lemma 2.6.5** *Sei  $W$  ein isotroper Unterraum von  $V$  mit  $\dim W = k$ . Dann existiert ein isotroper Unterraum  $Z$  mit  $\dim Z = k$  und  $W \cap Z = \{0\}$ , so dass  $W \dot{+} Z$  ein symplektischer Unterraum von  $V$  ist.*

**Beweis.** Man kann annehmen, dass  $V = \mathbb{C}^D$  und  $\omega$  die im Lemma 2.6.3 angegebene Form habe. Setzt man  $A = i \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$  und definiert  $Z = AW$ . Dann ist  $\dim Z = \dim W = k$  und  $Z$  ist isotop, da wegen  $A^* = -A$ ,  $A^2 = -1$   $(Av)^* A(Aw) = v^* Aw = 0$  ist für alle  $v, w \in W$ . Ist  $v \in W \cap Z$ , so gilt  $v^* v = v^* A(A^{-1}v) = 0$ . Also ist  $v = 0$ .

Es ist nur noch zu zeigen, dass  $W \dot{+} Z$  symplektisch ist. Angenommen  $v = v_1 + Av_2$  ( $v_j \in W$ ) habe die Eigenschaft, dass  $v^* Aw = 0$  ist für alle  $w = w_1 + Aw_2$ , wobei  $w_j \in W$  ist. Benutzt man die Tatsache, dass  $W$  und  $Z$  isotrop sind, so folgt aus der Eigenschaft  $v^* Aw = 0$ , dass für alle  $w_1, w_2 \in W$   $v_2^* w_1 = v_1^* w_2$  ist. Folglich sind  $v_1, v_2 \in W \cap W^\perp = \{0\}$ . Also ist  $W \dot{+} Z$  symplektisch.

Im Folgenden wollen wir uns auf den Fall  $D = 2d$  und  $p = q = d$  konzentrieren, da dies die Parameter der Randform  $u^* Jv$  sind. Ein Unterraum  $L \subset \mathbb{C}^{2d}$  nennt man einen *Lagrangischen Unterraum*, falls  $L = L^\omega$  ist. Die Lagrangischen Unterräume sind genau die maximal isotropen Unterräume. Ist nämlich  $L = L^\omega$ , so ist  $L$  offensichtlich ein maximaler isotroper Raum. Ist nun umgekehrt  $L$  isotrop mit  $\dim L = k$ , dann folgt aus Lemma 2.6.5 die Existenz eines anderen isotropen Unterraumes  $\tilde{L}$  derart, dass  $L \dot{+} \tilde{L}$  ein  $2k$ -dimensionaler symplektischer Raum ist. Für die Parameter  $p_0, q_0$  dieses Raumes gilt  $p_0 = q_0 = k$ ; denn andernfalls könnte dieser Raum keinen  $k$ -dimensionalen isotropen Unterraum besitzen. Korollar 2.6.1 besagt nun, dass  $(L \dot{+} \tilde{L})^\omega$  ein direkter Summand von  $L \dot{+} \tilde{L}$  ist. Die Parameter des Raumes  $(L \dot{+} \tilde{L})^\omega$  sind  $p_1 = q_1 = d - k$  und folglich gibt es im Falle  $k < d$  nicht triviale isotrope Unterräume von  $(L \dot{+} \tilde{L})^\omega$ . Folglich ist  $L$  nicht maximal, es sei denn  $k = d$ . Aber in diesem Falle gilt wegen Lemma 2.6.1  $\dim L = \dim L^\omega$  und wegen  $L \subset L^\omega$  besagt dies, dass  $L = L^\omega$  ist.

**Theorem 2.6.1** *Es gibt endlich viele Lagrangesche Unterräume  $L_1, \dots, L_n$  von  $\mathbb{C}^{2d}$  derart, dass es für jeden  $d$ -dimensionalen Unterraum  $V \subset \mathbb{C}^{2d}$  ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  gibt mit  $V \dot{+} L_j = \mathbb{C}^{2d}$ .*

**Beweis.** Zunächst wird eine schwächere Version dieses Theorems bewiesen: Für jeden  $d$ -dimensionalen Unterraum  $V$  gibt es einen Lagrangeschen Unterraum  $L$  mit  $V \dot{+} L = \mathbb{C}^{2d}$ . Mit einem Kompaktheitsargument wird dann das Theorem bewiesen.

Zuerst wird die schwächere Version für einen symplektischen Unterraum  $V$  bewiesen. Sei also  $V$  symplektisch und seien  $\{e_1, \dots, e_j, f_1, \dots, f_k\}$  und  $\{e'_1, \dots, e'_{j'}, f'_1, \dots, f'_{k'}\}$  symplektische Basen von  $V$  bzw.  $V^\omega$ . Es gilt  $j + k = j' + k' = d$  und  $j + j' = k + k' = d$ . Folglich ist  $j = k'$ ,  $j' = k$  und man kann

$$L = \text{Lin} (e_1 + f'_1, \dots, e_j + f'_j, e'_1 + f_1, \dots, e'_{j'} + f_{j'})$$

definieren. Dann ist  $L$  ein  $d$ -dimensionaler isotroper (also Lagrangescher) Unterraum mit  $V \cap L = \{0\}$ .

Im Folgenden kann man also annehmen, dass  $V$  nicht symplektisch ist. Dieser Fall wird mithilfe vollständiger Induktion über  $d$  bewiesen. Sei zunächst  $d = 1$  und  $V = L(v)$ . Da  $V$  nicht symplektisch ist, muß  $\omega(v, v) = 0$  sein. Also ist  $V$  isotrop und die Existenz eines Lagrangeschen direkten Summanden zu  $V$  folgt aus Lemma 2.6.5.

Nun nehme man an, dass  $d \geq 2$  ist. Wegen Lemma 2.6.4 gibt es einen symplektischen Unterraum  $S \subset V$  mit  $V = V \cap V^\omega \dot{+} S$  und  $V \cap V^\omega \subset S^\omega$ . Da  $V$  nicht symplektisch ist, gilt  $k := \dim V \cap V^\omega \geq 1$ . Wendet man Lemma 2.6.5 auf den isotropen Unterraum  $V \cap V^\omega$  des symplektischen Raumes  $S^\omega$  an, so gibt es einen isotropen Raum  $I \subset S^\omega$  mit  $\dim I = k$  derart, dass  $K := V \cap V^\omega \dot{+} I$  ein symplektischer Unterraum von  $S^\omega$  ist. Sei  $T := V \cap K^\omega$ . Wegen  $S \subset K^\omega$  und  $K \cap K^\omega = \{0\}$  gilt

$$V = V \cap V^\omega \dot{+} S \subset V \cap V^\omega \dot{+} V \cap K^\omega = V \cap V^\omega \dot{+} T \subset V,$$

woraus  $V = V \cap V^\omega \dot{+} T$  folgt. Im Einzelnen gilt

$$\dim T = \dim V - \dim (V \cap V^\omega) = d - k = \frac{1}{2} \dim K^\omega. \quad (2.6.1)$$

Da  $K$  ein  $2k$ -dimensionaler symplektischer Raum ist, der einen  $k$ -dimensionalen isotropen Unterraum  $I$  hat, folgt, dass für die Parameter aus dem Lemma 2.6.3  $p_K = q_K = k$  gilt. Also ist auch  $p_{K^\omega} = q_{K^\omega} = d - k$ . Folglich ist man jetzt wegen (2.6.1) in der Lage, die Induktionsvoraussetzung auf den Unterraum

$T$  des symplektischen Raumes  $K^\omega$  anzuwenden. Laut Induktionsvoraussetzung gibt es also einen isotropen Unterraum  $J \subset K^\omega$  mit  $T \dot{+} J = K^\omega$ . Jetzt definiere man  $L = I \dot{+} J$  (Die Summe ist direkt, da  $I \subset K$  und  $J \subset K^\omega$  ist.). Dann gilt

$$V + L = V \cap V^\omega \dot{+} T + (I \dot{+} J) = (V \cap V^\omega + I) + (T + J) = K \dot{+} K^\omega = \mathbb{C}^{2d}.$$

Da sowohl  $I \subset K$  als auch  $J \subset K^\omega$  isotrope Räume sind, ist  $L$  isotrop, und damit ist die einfache Version des Theorems bewiesen.

Um zu zeigen, dass endlich viele  $L$ 's genügen, arbeitet man mit der komplexen Grassman Mannigfaltigkeit  $G_{d,2d}$ , dies ist die Mannigfaltigkeit der  $d$ -dimensionalen Unterräume von  $\mathbb{C}^{2d}$ . Die entscheidene Tatsache ist, dass  $G_{d,2d}$  ein kompakter Raum bezüglich der natürlichen Topologie ist. Siehe zum Beispiel [31, Lemma 5.1].

Wenn  $L \cap V_0 = \{0\}$  ist für ein  $V_0 \in G_{d,2d}$ , dann gilt für alle  $V$  aus einer Umgebung von  $V_0$   $L \cap V = \{0\}$ . Also ergibt sich die volle Aussage des Theorems aus der Kompaktheit von  $G_{d,2d}$ .

**Korollar 2.6.2** *Seien  $L_1, \dots, L_n$  die Lagrangeschen Unterräume aus Theorem 2.6.1 und seien  $S_j \subset L_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )  $m$ -dimensionale Unterräume dieser Lagrangeschen Räume ( $m \geq 1$ ). Dann gilt*

$$\dim \text{Lin} (S_1, \dots, S_n) \geq d + m.$$

**Beweis.** Schreibt man  $S = \text{Lin}(S_1, \dots, S_n)$  und sei  $V$  ein  $k$ -dimensionaler Unterraum von  $S$  mit  $k \leq d$ . Dann ergibt sich aus dem Theorem 2.6.1, dass es ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  gibt mit  $V \cap L_j = \{0\}$ . Also besitzt  $S$  einen  $(k + m)$ -dimensionalen Unterraum. Die Behauptung folgt nun durch Iteration dieses Argumentes.

Der Abschnitt wird beendet mit der Charakterisierung der Lagrangeschen Unterräume, die schon in den vorhergegangenen Abschnitten benutzt wurde.

**Theorem 2.6.2**  *$L$  ist ein Lagrangescher Unterraum von  $\mathbb{C}^{2d}$ , dessen symplektische Form durch  $\omega(u, v) = u^* J v$  gegeben ist, genau dann, wenn es  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^{d \times d}$  gibt, die (2.2.2) genügen, derart, dass*

$$L = \{v \in \mathbb{C}^{2d} : (\alpha_1, \alpha_2)v = 0\} \quad (2.6.2)$$

ist.

**Beweis.** Ist  $L$  ein Lagrangescher Unterraum, so wählt man eine orthogonale Basis von  $L$ , um  $L$  als

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha_2^* \\ \alpha_1^* \end{pmatrix} c : c \in \mathbb{C}^d \right\} \quad (2.6.3)$$

dazustellen, wobei  $\alpha_1\alpha_1^* + \alpha_2\alpha_2^* = 1$  ist. Die letztere Bedingung besagt, dass die Spalten von  $\begin{pmatrix} -\alpha_2^* \\ \alpha_1^* \end{pmatrix}$  ein orthogonales System bilden. Da  $L$  isotrop ist, gilt

$$(-\alpha_2, \alpha_1)J \begin{pmatrix} -\alpha_2^* \\ \alpha_1^* \end{pmatrix} = \alpha_2\alpha_1^* - \alpha_1\alpha_2^* = 0.$$

Also genügen die  $\alpha$ 's (2.2.2). Folglich besitzt  $L$  die alternative Beschreibung (2.6.2).

Nimmt man nun umgekehrt an, dass  $L$  die Beschreibung (2.6.2) besitze, wobei die  $\alpha$ 's (2.2.2) genügen. Dann besitzt  $L$  die Darstellung (2.6.3). Wegen  $\alpha_1\alpha_1^* + \alpha_2\alpha_2^* = 1$  ist  $L$  ein  $d$ -dimensionaler Unterraum, der wegen  $\alpha_2\alpha_1^* - \alpha_1\alpha_2^* = 0$  isotrop ist, und folglich ein Lagrangescher Unterraum.



## 2.7 Beweis des Theorems 2.1.1

Jetzt ist man in der Lage, das Theorem 2.1.1 zu beweisen. Die Menge  $S_m$  wurde bereits in (2.5.4) definiert. Hier kann man eine feste Randbedingung im Punkte  $n = 1$  wählen, da  $S_m$  von einer anderen Randbedingung im Punkte  $n = 1$  sich nur durch eine Menge vom Maße Null, die irrelevant für Theorem 2.1.1 ist, von der fixierten Menge  $S_m$  unterscheidet.

Das Theorem 2.1.1 ist eine Konsequenz des nun folgenden Theorems.

**Theorem 2.7.1** *Es existiert eine Funktion  $f > 0$  auf  $S_m$  und für jedes  $\lambda \in S_m$  gibt es einen Unterraum  $V_\lambda \subset \mathbb{C}^{2d}$  mit  $\dim V_\lambda = m$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und jede meßbare Wahl von  $v(\lambda) \in V_\lambda$  mit  $\|v(\lambda)\| = 1$  gilt*

$$\int_{S_m} v(\lambda)^* Y(n, \lambda)^* H(n) Y(n, \lambda) v(\lambda) f(\lambda) d\lambda \leq 1.$$

**Beweis.** Laut Definition von  $S_m$  gilt  $\chi_{S_m}(\lambda) d\rho_{ac}(\lambda) = F(\lambda) d\lambda$ , wobei  $F(\lambda) \in \mathbb{C}^{d \times d}$  genau  $m$  positive Eigenwerte hat. Die restlichen  $d - m$  Eigenwerte (hier werden die Vielfachheiten mitgezählt) sind gleich Null. Sei  $f(\lambda)$  der kleinste positive Eigenwert und sei  $V_\lambda \subset \mathbb{C}^d$  die lineare Hülle der zu positiven Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren. Aus Theorem 2.5.2 folgt

$$\int_{S_m} H_n^{1/2} u(n, \lambda) d\rho(\lambda) u^*(n, \lambda) H_n^{1/2} \leq 1.$$

Da  $\rho(M) \geq \rho_{ac}(M) \geq \int_M P_\lambda f(\lambda) d\lambda$ , wobei  $P_\lambda$  eine orthogonale Projektion auf  $V_\lambda$  ist, gilt

$$\int_{S_m} H_n^{1/2} u(n, \lambda) v(\lambda) (H_n^{1/2} u(n, \lambda) v(\lambda))^* f(\lambda) d\lambda \leq 1$$

für jede meßbare Wahl  $v(\lambda) \in V_\lambda$  mit  $\|v(\lambda)\| \equiv 1$ . Die Ungleichung gilt im Sinne von positiver Definitheit und mit 1 meint man die  $2d \times 2d$ -Einheitsmatrix. Folglich gilt für jeden Einheitsvektor  $e \in \mathbb{C}^{2d}$

$$\int_{S_m} e^* H_n^{1/2} u(n, \lambda) v(\lambda) (H_n^{1/2} u(n, \lambda) v(\lambda))^* e f(\lambda) d\lambda \leq 1.$$

Da  $e^* H_n^{1/2} u(n, \lambda) v(\lambda)$  eine komplexe Zahl ist, kann man in der Ungleichung die Reihenfolge der Multiplikation unter dem Integral verändern und erhält

$$\int_{S_m} v(\lambda)^* u(n, \lambda)^* H_n^{1/2} e e^* H_n^{1/2} u(n, \lambda) v(\lambda) f(\lambda) d\lambda \leq 1.$$

Beachtet man, dass  $ee^*$  die Projektion auf  $L(e)$  ist, so liefert eine Summierung über eine orthogonal Basis

$$\int_{S_m} v(\lambda)^* u(n, \lambda)^* H_n u(n, \lambda) v(\lambda) f(\lambda) d\lambda \leq 2d.$$

Da  $Y = (\dots, u)$  ist, folgt aus der letzten Ungleichung die Aussage des Theorems, weil man die Vektoren  $v(\lambda) \in \mathbb{C}^d$  mit Vektoren  $\tilde{v}(\lambda) \in \mathbb{C}^{2d}$  identifizieren kann, indem man  $\tilde{v}(\lambda) = (0, v(\lambda))$  setzt.

Das Theorem 2.1.1 wird wie folgt bewiesen. Man fixiert Lagrangesche Unterräume (oder äquivalent Randbedingungen im Punkte  $n = 1$ ) wie im Korollar 2.6.2 und wendet Theorem 2.7.1 auf diese Randbedingungen im Punkte  $n = 1$  an. Ferner ersetzt man die Funktionen  $f_\alpha(\lambda)$  aus Theorem 2.7.1 - im Theorem 2.7.1 wurde nicht explizit auf die  $\alpha$  Abhängigkeit von  $f$  eingegangen - durch das Minimum dieser Funktionen über die fixierten Randbedingungen  $\alpha$  und bezeichnet diese neue Funktion wieder mit  $f$  ohne Index. Aus dem Lemma von Fatou folgt also, dass es für jede feste Randbedingung  $\alpha$  eine Lebesguesche Nullmenge  $N_\alpha$  gibt, so dass

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} v^* Y^*(n_j, \lambda) H(n_j) Y(n_j, \lambda) v < \infty \quad (2.7.1)$$

gilt für alle  $\lambda \in S_m \setminus N_\alpha$  und  $v \in V_\lambda^\alpha$ , wobei hier mit  $Y$  die Fundamentalmatrix mit  $Y(1, \lambda) = 1$  gemeint ist und  $V_\lambda^\alpha$   $m$ -dimensionale Unterräume sind mit  $(\alpha_1, \alpha_2)v = 0$  für alle  $v \in V_\lambda^\alpha$ . Nun ist man in der Situation von Korollar 2.6.2. Dieses Resultat zeigt, dass der Raum der Vektoren  $v \in \mathbb{C}^{2d}$ , die (2.7.1) genügen, mindestens die Dimension  $d + m$  hat. Und dies ist genau das, was Theorem 2.1.1 besagt.

## 2.8 Gleichungen höherer Ordnung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass jede formal selbstadjungierte Gleichung von der geraden Ordnung  $2d$  in der Form eines kanonischen Systems geschrieben werden kann. Dies bestätigt, dass kanonische Systeme einen sehr allgemeinen Zugang darstellen. Die Formulierung in einem kanonischen System hat den Vorteil, dass sie automatisch wie fast von selbst die Hilberträume angibt, die zu den unterschiedlichen selbstadjungierten Operatoren gehören, die durch das kanonische System definiert sind.

Der Ausgangspunkt hier ist folgende Differenzgleichung:

$$\sum_{j=1}^d (c_j(n+j)y(n+j) + c_j(n)y(n-j)) + c_0(n)y(n) = zw(n)y(n). \quad (2.8.1)$$

Die Koeffizienten  $c_j$  sind reellwertig, und für alle  $n$  gilt  $c_d(n) \neq 0$ ,  $w(n) > 0$ . Man kann (2.8.1) formal schreiben als  $\tau y = zy$ , wobei  $(\tau y)(n)$  gegeben ist durch die linke Seite von (2.8.1) dividiert durch  $w(n)$ . Es ist allgemein bekannt, dass  $\tau$  selbstadjungierte Operatoren in den Hilberträumen  $\ell_2^w$  versehen mit dem Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle = \sum \overline{f(n)}w(n)g(n)$  erzeugt. Um (2.8.1) in der Form eines kanonischen Systems darzustellen, führt man den Vektor  $Y(n) \in \mathbb{C}^{2d}$  durch

$$Y_k(n) = \begin{cases} y(n+k-d-1) & (k=1, \dots, d) \\ -\sum_{j=1}^{k-d} c_{2d-k+j}(n-1+j)y(n-1+j) & (k=d+1, \dots, 2d) \end{cases}. \quad (2.8.2)$$

ein.

### Lemma 2.8.1 (Greensche Identität)

Es gilt

$$\sum_{n=1}^N \left( \overline{f(n)}w(n)(\tau g)(n) - \overline{(\tau f)(n)}w(n)g(n) \right) = F^*(N+1)JG(N+1) - F^*(1)JG(1),$$

wobei  $F$  und  $G$  mithilfe (2.8.2) aus  $f$  bzw  $g$  erzeugt werden.

**Beweis.** Dies folgt aus einer Rechnung:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \overline{f(n)} w(n) (\tau g)(n) \\
&= \sum_{n=1}^N \overline{f(n)} \left[ \sum_{j=1}^d (c_j(n+j)g(n+j) + c_j(n)g(n-j)) + c_0(n)g(n) \right] \\
&= \sum_{j=1}^d \sum_{n=j+1}^{N+j} \overline{f(n-j)} c_j(n)g(n) + \sum_{j=1}^d \sum_{n=1-j}^{N-j} \overline{f(n+j)} c_j(n+j)g(n) \\
&\quad + \sum_{n=1}^N \overline{f(n)} c_0(n)g(n) \\
&= \sum_{n=1}^N (\tau f)(n) w(n) g(n) \\
&\quad + \sum_{j=1}^d \sum_{n=N+1}^{N+j} \overline{f(n-j)} c_j(n)g(n) - \sum_{j=1}^d \sum_{n=1}^j \overline{f(n-j)} c_j(n)g(n) \\
&\quad - \sum_{j=1}^d \sum_{n=N-j+1}^N \overline{f(n+j)} c_j(n+j)g(n) + \sum_{j=1}^d \sum_{n=1-j}^0 \overline{f(n+j)} c_j(n+j)g(n)
\end{aligned}$$

Um das Lemma zu beweisen, zeigt man nun zweierlei

$$\begin{aligned}
F^*(N+1)JG(N+1) &= \sum_{j=1}^d \sum_{n=N+1}^{N+j} \overline{f(n-j)} c_j(n)g(n) \\
&\quad - \sum_{j=1}^d \sum_{n=N-j+1}^N \overline{f(n+j)} c_j(n+j)g(n),
\end{aligned} \tag{2.8.3}$$

$$\begin{aligned}
F^*(1)JG(1) &= \sum_{j=1}^d \sum_{n=1}^j \overline{f(n-j)} c_j(n)g(n) \\
&\quad - \sum_{j=1}^d \sum_{n=1-j}^0 \overline{f(n+j)} c_j(n+j)g(n).
\end{aligned} \tag{2.8.4}$$

Zunächst betrachtet man die erste Summe aus (2.8.3) und berechnet

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^d \sum_{n=N+1}^{N+j} \overline{f(n-j)} c_j(n) g(n) \\
&= \sum_{j=1}^d \sum_{n=N+1}^{N+j} \overline{F_{n-j+d-N}(N+1)} c_j(n) g(n) \\
&= \sum_{j=1}^d \sum_{k=d+1-j}^d \overline{F_k(N+1)} c_j(N+j-d+k) g(N+j-d+k) \\
&= \sum_{k=1}^d \overline{F_k(N+1)} \sum_{j=d+1-k}^d c_j(N+j-d+k) g(N+j-d+k) \\
&= \sum_{k=1}^d \overline{F_k(N+1)} \sum_{j=1}^k c_{j+d-k}(N+j) g(N+j) = - \sum_{k=1}^d \overline{F_k(N+1)} G_{d+k}(N+1).
\end{aligned}$$

Für die zweite Summe aus (2.8.3) zeigt eine analoge Rechnung, dass

$$- \sum_{j=1}^d \sum_{n=N-j+1}^N \overline{f(n+j)} c_j(n+j) g(n) = \sum_{k=1}^d \overline{F_{d+k}(N+1)} G_k(N+1)$$

ist. Diese Gleichungen beweisen (2.8.3). In ähnlicher Weise beweist man die Gleichung (2.8.4).

Die Differenzgleichung (2.8.1) ist äquivalent zu der Differenzgleichung erster Ordnung  $Y(n+1, z) = (zA(n) + B(n))Y(n, z)$  für den Vektor  $Y$ , wobei

$$A_{2d, d+1}(n) = \frac{w(n)}{c_d(n)},$$

$$B_{j, j+1}(n) = 1 \quad (j = 1, \dots, d-1, d+1, \dots, 2d), \quad B_{d, d+1}(n) = -\frac{1}{c_d(n)},$$

$$B_{d+j, d+1}(n) = -\frac{c_{d-j}(n)}{c_d(n)} \quad (j = 1, \dots, d), \quad B_{2d, j}(n) = c_{d+1-j}(n) \quad (j = 1, \dots, d),$$

und alle anderen Matrixelemente gleich Null sind.

Ist  $T(n)$  die Fundamentalmatrix dieses Systems erster Ordnung mit  $z = 0$ , d.h.  $T(n) \in \mathbb{C}^{2d \times 2d}$ ,  $T(1) = 1$  und  $T(n+1) = B(n)T(n)$ . Da Lemma 2.8.1  $T^*(n)JT(n) = J$  impliziert, ist  $T(n)$  für alle  $n$  invertierbar und man kann  $U(n, z) = T^{-1}(n)Y(n, z)$  definieren. Eine einfache Rechnung zeigt, dass  $U(n, z)$  die Gleichung der Form

$$J(U(n+1, z) - U(n, z)) = zH(n)U(n, z) \quad (2.8.5)$$

löst, wobei  $H(n) = JT(n+1)^{-1}J^{-1}A(n)T(n)$  ist. Im Einzelnen hat  $H(n)$  also den Rang 1.

Da die ursprüngliche Gleichung (2.8.1)  $2d$  lineare unabhängige Lösungen  $y(., z)$  für jedes feste  $z \in \mathbb{C}$  hat, erhält man auf diese Weise einen  $2d$ -dimensionalen Raum von Lösungen  $U(., z)$  von (2.8.5). Da aber der Lösungsraum von der Gleichung (2.8.5) die Dimension  $2d$  hat, erhält man alle Lösungen auf diese Weise. Genauer gesagt, löst  $U$  (2.8.5), dann gilt  $U = T^{-1}Y$ , wobei  $Y$  wie in (2.8.2) definiert ist und das dazugehörige  $y$  löst (2.8.1). Diese Lösung  $y$  ist eindeutig bestimmt durch  $U$ . Also sind (2.8.1) und (2.8.5) äquivalent.

(2.8.5) hat die Form eines kanonischen Systems, aber man weiß noch nicht, dass  $H(n)$  die geforderten Eigenschaften hat. Die geforderten Eigenschaften werden im nächsten Theorem verifiziert.

**Theorem 2.8.1** *Es gilt  $H(n) = H^*(n)$ ,  $H(n) \geq 0$  und  $H(n)JH(n) = 0$  für alle  $n$ . Ferner ist  $\bigcap_{n=n_0}^{n_0+2d-1} N(H(n)) = \{0\}$ .*

**Beweis.** Löst  $y$  (2.8.1), so gilt wegen Lemma 2.8.1

$$\begin{aligned} (z - \bar{z}) \sum_{n=1}^N |y(n)|^2 &= \sum_{n=1}^N \left( \overline{y(n)w(n)}(\tau y)(n) - \overline{(\tau y)(n)}w(n)y(n) \right) \\ &= Y^*(N+1)JY(N+1) - Y^*(1)JY(1) \\ &= U^*(N+1)T^*(N+1)JT(N+1)U(N+1) - U^*(1)JU(1) \\ &= U^*(N+1)JU(N+1) - U^*(1)JU(1). \end{aligned}$$

Um zu der letzten Zeile zu gelangen, wurde die Tatsache  $T^*(n)JT(n) = J$  benutzt. Es wurde schon bemerkt, dass diese Identität aus Lemma 2.8.1 folgt. Ferner gilt  $|y(n)|^2 = c_d^{-2}(n)Y^*(n)PY(n)$ , wobei  $P_{d+1,d+1} = 1$  und  $P_{ij} = 0$  für alle anderen Matrixelemente ist. Folglich ist

$$U^*(N+1)JU(N+1) - U^*(1)JU(1) = (z - \bar{z}) \sum_{n=1}^N U^*(n)W(n)U(n), \quad (2.8.6)$$

wobei  $W(n) = c_d^{-2}(n)T^*(n)PT(n)$  ist. Man beachte, dass  $W(n) \geq 0$  ist. Bis jetzt benutzte man die Greensche Identität zur Berechnung von  $\sum |y|^2$ . Nun

wird eine ähnliche Rechnung für das System (2.8.5) durchgeführt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N U^*(n)(\bar{z}H^*(n) - zH(n))U(n) \\
&= \sum_{n=1}^N [(J(U(n+1) - U(n)))^*U(n) - U^*(n)J(U(n+1) - U(n))] \\
&= \sum_{n=1}^N [(U^*(n+1) - U^*(n))J(U(n+1) - U(n)) \\
&\quad - U^*(n+1)JU(n+1) + U^*(n)JU(n)] \\
&= \sum_{n=1}^N (U^*(n+1) - U^*(n))J(U(n+1) - U(n)) \\
&\quad - U^*(N+1)JU(N+1) + U^*(1)JU(1) \\
&= \sum_{n=1}^N |z|^2 U^*(n)H^*(n)JH(n)U(n) - U^*(N+1)JU(N+1) + U^*(1)JU(1).
\end{aligned}$$

Kombiniert man jetzt diese Identität mit (2.8.6), so erhält man

$$\sum_{n=1}^N U^*(n) (\bar{z}H^*(n) - zH(n) - |z|^2 H^*(n)JH(n) + (z - \bar{z})W(n)) U(n) = 0. \tag{2.8.7}$$

An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass  $U$  von  $z$  abhängt. Diese Abhängigkeit ist stetig (es gilt sogar, dass  $U(n, z)$  ein Polynom in  $z$  ist), wenn man sich auf Lösungen beschränkt, deren Anfangsbedingungen unabhängig von  $z$  sind. Zunächst wählt man  $z = \epsilon$  reell. Dann folgt aus (2.8.7), nachdem durch  $\epsilon$  geteilt worden ist

$$\sum_{n=1}^N U^*(n, \epsilon) (H^*(n) - H(n) - \epsilon H^*(n)JH(n)) U(n, \epsilon) = 0.$$

Der Grenzwertprozeß  $\epsilon \rightarrow 0$  ergibt

$$\sum_{n=1}^N U^*(n, 0) (H^*(n) - H(n)) U(n, 0) = 0.$$

Da  $U(n, 0)$  eine beliebige Lösung von  $J(U(n+1, 0) - U(n, 0)) = 0$  ist, gilt also für alle  $v \in \mathbb{C}^{2d}$

$$\sum_{n=1}^N v^* (H^*(n) - H(n)) v = 0.$$

Da  $N$  beliebig ist, gilt also für alle  $n$   $H^*(n) = H(n)$ , wie behauptet.

Als Nächstes wird  $z = i\epsilon$  rein imaginär gewählt, wobei  $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist. Wie oben wird nun gezeigt, dass  $H(n) = W(n) \geq 0$  ist.

Nun weiß man, dass  $H^*(n) = H(n) = W(n) \geq 0$  gilt. Folglich kann man mit derselben Strategie wie oben mithilfe von (2.8.7) zeigen, dass  $H(n)JH(n) = 0$  ist.

Es bleibt zu zeigen, dass  $\bigcap N(H(n)) = \{0\}$  ist. Sei  $H(n)v = 0$  für  $n = n_0, \dots, n_0 + 2d - 1$ , dann löst  $U(n) := v J(U(n+1) - U(n)) = zH(n)U(n)$  für diese  $n$  und alle  $z$ . Es existiert also eine zu (2.8.1) gehörende Lösung  $y$ , so dass  $U(n) = T(n)^{-1}Y(n)$  ist. Nun ergibt die Darstellung von  $H(n) = W(n)$ , die in der Zeile nach Gleichung (2.8.6) angegeben wurde, dass  $PY(n) = 0$  oder  $y(n) = 0$  gilt für alle  $n = n_0, \dots, n_0 + 2d - 1$ . Folglich ist  $Y(n_0 + d) = 0$ , was  $v = 0$  zur Folge hat.

Es sei darauf hingewiesen, dass  $\dim N(H(n)) = 2d - 1$  ist. Folglich benötigt man den Schnitt über wenigstens  $2d$  solcher Kerne, um den Nullraum zu erhalten.

Dieser Abschnitt wird beendet mit einer kurzen Beschreibung des Raumes  $Z$  aus dem Abschnitt 2.2 speziell für kanonische Systeme aus diesem Abschnitt. Es wird das System (2.8.5) auf  $n \in \{1, \dots, N\}$  mit Randbedingungen von der Form (2.2.3) betrachtet und es wird angenommen, dass (2.8.5) eine äquivalente Beschreibung der Form (2.8.1) besitzt. Dann gilt  $Z \perp \ell_2^H(\{d+1, \dots, N-d\})$ . Im Folgenden wird der Beweis dieser Aussage kurz skizziert. Gelte  $\tau y = wf$  und sei  $J(U(n+1) - U(n)) = H(n)F(n)$  das zugehörige inhomogene System. Insbesondere entstehen  $U$  und  $F$  wie oben beschrieben aus  $y$  und  $f$ . Wenn  $H(n)U(n) = 0$  für  $n = 1, \dots, N$  gelte, dann zeigt eine analoge Rechnung wie im letzten Teil des Beweises von Theorem 2.8.1, dass  $y(n) = 0$  ist für diese  $n$ 's. Folglich muß  $U(d+1) = \dots = U(N-d+1) = 0$  und folglich  $H(d+1)F(d+1) = \dots = H(N-d)F(N-d) = 0$  sein, wie behauptet.

Das bedeutet, dass der Hilbertraum  $\ell_2^H \ominus Z$  sich nur von  $\ell_2^H$  in der Nähe der Endpunkte  $n = 1$  und  $n = N$  unterscheidet. Dort sind Randbedingungen gefordert für die der zugrundeliegende Hilbertraum verändert werden muß. Der Raum  $Z$  beschreibt diesen Effekt. Dies soll nun an einem Beispiel diskutiert werden.

Es wird der Operator  $(\tau y)(n) = y(n-1) + y(n+1)$  auf  $n \in \{1, \dots, N\}$  betrachtet und es sollen die selbstadjungierten Realisierungen von  $\tau$  auf  $\ell_2(\{1, \dots, N\})$  bestimmt werden. Gewöhnlich wird wie folgt verfahren. Man führt zusätzliche Punkte  $n = 0, n = N+1$  derart ein, dass die Randbedin-



gungen

$$y(0) \sin \alpha + y(1) \cos \alpha = 0, \quad y(N) \sin \beta + y(N+1) \cos \beta = 0,$$

erfüllt sind. Mithilfe dieser Randbedingungen definiert man die selbstadjungierten Operatoren  $(H_{\alpha,\beta}y)(n) = (\tau y)(n)$ . Zum Beispiel ist  $(H_{\pi/2,\beta}y)(1) = y(2)$ . Wenn  $\alpha = 0$  ist, besagt die Randbedingung, dass  $y(1) = 0$  ist. Dies legt nahe,  $\tau$  auf dem reduzierten Hilbertraum  $\ell_2(\{2, \dots, N\})$  zu betrachten.

Nun soll diskutiert werden, was der kanonische System Zugang in diesem Fall ergibt. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass  $y(N+1) = 0$  am rechten Endpunkt ist. Aus 2.8.2 ergibt sich, dass  $Y(n) = \begin{pmatrix} y^{(n-1)} \\ -y^{(n)} \end{pmatrix}$  ist. Die Randbedingung, die zu  $y(1) = 0$  gehört, ist  $(0, 1)U(1) = 0$  (es sei daran erinnert, dass  $Y(1) = U(1)$  ist). Man rechnet leicht nach, dass

$$T(2n) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(2n+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$H(2n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(2n+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun zeigt eine offensichtliche Anwendung der Gleichung  $J(U_{n+1} - U_n) = H_n F_n$  zusammen mit den Randbedingungen und der Bedingung  $H_n U_n = 0$ , dass  $Z$  der eindimensionale Raum ist, der durch  $F(n) = \delta_{n1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  aufgespannt wird. Folglich gilt, wie erwartet,

$$\ell_2^H(\{1, \dots, N\}) \ominus Z = \ell_2^H(\{2, \dots, N\}) \cong \ell_2(\{2, \dots, N\}).$$

Wegen  $U(n, z) = T^{-1}(n)Y(n, z)$  und  $H_n = W_n = c_d^{-2}(n)T^*(n)PT(n)$  lautet das Theorem 2.1.1 für skalare Gleichungen folgendermaßen:

**Theorem 2.8.2** *Sei  $S_m$  die Menge, auf der (2.8.1) absolutstetiges Spektrum mit exakt der Vielfachheit  $m$  ( $1 \leq m \leq d$ ) hat. Sei ferner  $n_j \in \mathbb{N}$  eine beliebige Folge mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} n_j = \infty$ . Dann existieren für fast alle  $\lambda \in S_m$   $d + m$  linear unabhängige Lösungen  $y_1, \dots, y_{d+m}$  von*

$$\sum_{j=1}^d (c_j(n+j)y(n+j) + c_j(n)y(n-j)) + c_0(n)y(n) = \lambda w(n)y(n).$$

mit

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} y_k^*(n_j)y_k(n_j) < \infty$$

für  $k = 1, \dots, d + m$ .

Dies ist gerade für den diskreten Schrödingeroperator

$$Hy(k) = y(k+1) + y(k-1) + V(k)y(k)$$

die Aussage des Theorems 1.2 aus [28], die Simon und Last bewiesen haben. Zum Schluß soll noch eine Anwendung des Theorems 2.1.1 für skalare Gleichungen angegeben werden.

Es ist bekannt, dass eine Gleichung der Form

$$p(k)y(k+1) + p(k-1)y(k-1) = q(k)y(k),$$

wobei  $p(k) > 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist, eine unbeschränkte Lösung besitzt, falls für fast alle  $k \in \mathbb{N}$   $|q(k)| \geq (1 + \varepsilon(k))p(k) + p(k-1)$ ,  $\varepsilon(k) \geq 0$ , und  $\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon(l) = \infty$  ist. Siehe dazu Kapitel 6 in [2]. Also besitzt eine selbstadjungierte Realisierung  $H$  von

$$(\tau y)(k) = c_1(k+1)y(k+1) + c_1(k)y(k-1) + c_0(k)y(k)$$

zum Beispiel für  $c_0(k) = \pm k^2$  und  $c_1(k) = k$  kein absolutstetiges Spektrum.

---

## Literaturverzeichnis

- [1] O. Abels: Spektraltheorie gewöhnlicher linearer Differentialoperatoren vierter Ordnung *Dissertation, Universität Osnabrück* (2001)
- [2] Ravi P. Agarwal: Difference equations and inequalities: theory, methods, and applications, 2nd ed. *Marcel Dekker, Inc., New York, 2000*
- [3] C. D. Ahlbrandt; D. B. Hinton and R. T. Lewis: The Effect of Variable Change on Oscillation and Disconjugacy Criteria with Application to Spectral Theory and Asymptotic Theory *J. Math. Anal. Appl.* **81** (1981), 234–277.
- [4] D. Z. Arov and H. Dym: J-inner matrix functions, interpolation and inverse problems for canonical systems, I: foundations *Int. Eq. Op. Theory* **29** (1997), 373–454.
- [5] F. V. Atkinson. Discrete and Continuous Boundary Problems *Academic Press, New York, 1964*.
- [6] L. de Branges: Hilbert Spaces of Entire Funktionen *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1968*
- [7] H. Behncke; C. Remling: Uniform asymptotic integration of a family of linear differential systems. *Math. Nachr.* **225** (2001), 5–17.
- [8] H. Behncke; A. Fischer: Spectral properties of differential systems *Journal of computational and applied mathematics* **148** (2002), 267–285.
- [9] H. Behncke; D.B. Hinton; C. Remling: The Spectrum of Differential Operators with Almost Constant Coefficients. *J. of Diff. Equ.* **175** (2001), 130–162.
- [10] N.K. Chakravarty: Some problems in eigenfunction expansions I. *Quart. J. Math. Oxford (2)*. **16** (1965), 135–150.

- 
- [11] N.K. Chakravarty: Some problems in eigenfunction expansions II. *Quart. J. Math. Oxford (2)*. **19** (1968), 213–224.
- [12] N.K. Chakravarty: Some problems in eigenfunction expansions III. *Quart. J. Math. Oxford (2)*. **19** (1968), 397–415.
- [13] E. A. Coddington and N. Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations *McGraw-Hill, New York*, 1972.
- [14] W. F. Donoghue: Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation *Springer-Verlag, Berlin*, 1974.
- [15] N. Dunford and J.T. Schwarz, Linear Operators II, Interscience, New York, 1963.
- [16] M.S.P. Eastham: The deficiency index of a second order system. *J. London Math. Soc.* **2** (1981), 311–320.
- [17] M.S.P. Eastham: The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems. *London Math. Soc. Monographs New Series*. **Vol. 4** Oxford University Press, Oxford, 1989.
- [18] W. D. Evans and A. Zettl: Dirichlet and separation results for Schrödinger-type operators *Proc. Roy. Soc. Edin.* **80 A** (1978), 151–162.
- [19] W. N. Everitt and L. Markus: Multi-interval linear ordinary boundary value problems and complex symplectic algebra *Memoirs Amer. Math. Soc.* **715** (2001).
- [20] A. Fischer and C. Remling : The absolutely continuous spectrum of discrete canonical systems *preprint*
- [21] F. Gesztesy and E. Tsekanovskii: On matrix-valued Herglotz functions *Math. Nachr.* **218** (2000), 61–138.
- [22] S. Hassi, H. de Snoo and H. Winkler: Boundary-value problems for two-dimensional canonical systems *Int. Eq. Op. Theory* **36** (2000), 445–479.
- [23] D.B. Hinton; A. Schneider: On the Titchmarsh-Weyl coefficients for singular  $S$ -Hermitian systems I. *Math. Nachr.* **163** (1993), 323–342.
- [24] D.B. Hinton; J.K. Shaw: On the Titchmarsh-Weyl  $M(\lambda)$ -functions for linear Hamiltonian systems. *J. Diff. Eq.* **40** (1981), 316–342.

- 
- [25] D. B. Hinton; J.K. Shaw: On the Spectrum of a Singular Hamiltonian System II *Qaest. Math.***10** (1986), 1–48.
- [26] A.M. Krall:  $M(\lambda)$  Theory for Singular Hamiltonian Systems with One Singular Point *SIAM J. Math. Anal.***20** (1989), 664–700.
- [27] H. Langer, C. Tretter: Diagonalization of Certain Block Operator Matrices and Applications to Dirac Operators. *Operator Theory Adv. and Appl.* **122** 2001, 331–358.
- [28] Y. Last and B. Simon: Eigenfunctions, transfer matrices, and absolut continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators *Invent. Math.* **135** (1999), 329–367.
- [29] V. F. Lazutkin: KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions *Springer-Verlag, Berlin*, 1993.
- [30] D. McDuff and D. Salamon: Introduction to Symplectic Topologie *Clarendon Press, Oxford*, 1995.
- [31] J. W. Milnor and J. D. Stasheff: Characteristic Classes *Princeton University Press, Princeton*, 1974.
- [32] R. Nagel: Towards a Matrix Theorie for Unbounded Operator Matrices. *Math. Z.* **201** (1989), 57–68.
- [33] M.A. Naimark: Linear Differential Operators. Ungar, New York 1967.
- [34] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, III. Scattering Theory, Academic Press, San Diego, 1979.
- [35] C. Remling: Spectral analysis of higher order differential operators, I. General properties of the  $M$ -function. *J. London Math. Soc.* **58** (1998), 367–380.
- [36] C. Remling: Spectral Analysis of Higher Order Differential Operators II. Fourth order operators *J. London Math. Soc.* **59** 1999, 188–206.
- [37] C. Remling: Schrödinger operators and de Branges spaces *J. Funct. Anal.* **196** (2002), 323–394.
- [38] L. A. Sakhnovich: Spectral Theory of Canonical Systems: Method of Operator Identities *Birkhäuser, Basel*, 1999.
- [39] G. Stolz: Spectral Theory for Slowly Oscillating Potentials: Schrodinger Operators. *Math. Nachr.* **183** (1997), 275–294.

- [40] S. A. Orlof: Nested matrix discs analytically depending on a parameter and theorems on the invariance of ranks of radii of limiting discs *Math. USSR Izv.* **10** (1976), 565–613.